КМ (Сергей Гарьевич)

ЛЕКЦИЯ 1 (05.09.2014)

*Механика С.Ю. Никитин, С.С. Чесноков.

Основные понятия механики

1. Материальная точка (Тело, разм. кот. можно пренебречь)
2. Абсолютно твёрдое тело
3. Сплошная среда

2. - это с-ма частиц (мат. точек), расст. между любой парой кот-ых всегда остается неизменным.

3 - Среда, в которой в-ва распределены непрерывно (Воздух, вода, ...)

§1 Кинематика материальной точки

Кинематика изучает движение тел без рассм-я причин этого дв-я.

Задача кинем-ки - математически точно описать движение тела.

Прямолинейное дв-е

измерение расстояний и промежутков времени (задача)

Чтобы изм. расст-е, нужно сравнить его с длиной нек. тела, принятого за эталон.

Метр - единица изм. расстояния

[м]

метр - это расст-е, кот. проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{300\,000\,000}$ секунд. (современное опр-е).

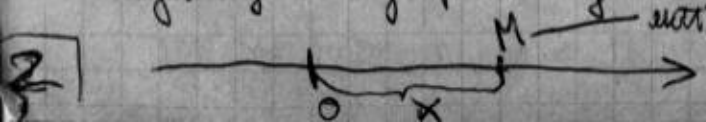
Чтобы измерить время, нужно сравнить его с продолжительностью процесса, принятого за эталон.

Секунда - единица изм. времени

[с]

секунда - это продолжительность приблизительно 10^{10} колебаний электрона в атоме цезия. (совр. опр-е)

Ось координат - это прямая линия, на кот. выбраны: начало отсчёта, положительное напр-е и единица измерения длины.



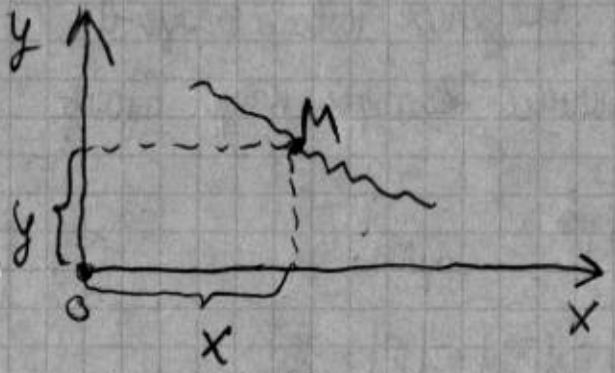
x [м] – координата

t – время.

$x = x(t)$ – закон движения

Движение точки на плоскости

Декартова с-ма координат – эта с-ма двух взаимно перп. осей коорд., имеющих общее начало



x, y [м]

$x = x(t), y = y(t)$

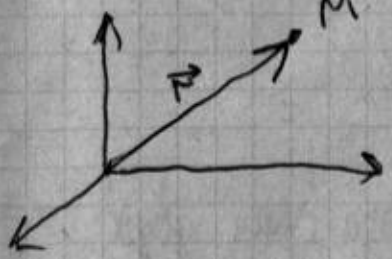
Движение точки в трёхмерном пр-ве

Д-ва с-ма коорд;

x, y, z [м] – дек-вы координаты точки

$x(t), y(t), z(t)$ – закон движения.

Радиус-вектор точки – это вектор, проведённый от начала отсчёта, до точки



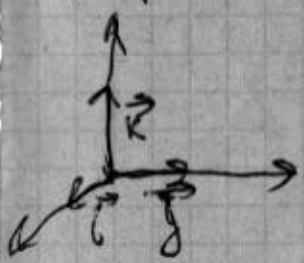
модель вектора – его длина

$|\vec{r}| \equiv r$

будем так обозначать введение нового обозн-я.

ДСК

Орты – это единичные векторы, напр. вдоль декартовых осей



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты.

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения.

Выражение радиус-вектора через декартовы коорд-ты.

$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot x + \vec{k} \cdot z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (по т. Пифагора).

4 Перемещение – это ~~путь~~ разность радиус-вект.

...ров точки, взятых в 2 разные момента времени.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$

Величина $t_2 - t_1 = \Delta t$ наз-ся длительностью перемещения.

Скорость материальной точки — это предел отношения перемещения к длительности, когда длительность стремится к нулю.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

Скорость это производная радиус-вектора точки по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

Декартова компонента скорости

(V_x, V_y, V_z) [м/с]

$$\vec{V} = \vec{i}\, V_x + \vec{j}\, V_y + \vec{k}\, V_z$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\right) =$$

$$= \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt} \equiv \vec{i}\,\dot{x} + \vec{j}\,\dot{y} + \vec{k}\,\dot{z}$$

$$V_x = \dot{x}, \quad V_y = \dot{y}, \quad V_z = \dot{z}$$

$$\left|\vec{V}\right| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \qquad \left[\frac{м}{с}\right]$$

Ускорение

- это производная скорости точки по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$

Дек. компоненты ускорения?

(a_x, a_y, a_z)

$$\vec{a} = \vec{i}\cdot a_x + \vec{j}\cdot a_y + \vec{k}\, a_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{i}\,V_x + \vec{j}\,V_y + \vec{k}\,V_z\right) =$$

$$= \vec{i}\frac{dV_x}{dt} + \vec{j}\frac{dV_y}{dt} + \vec{k}\frac{dV_z}{dt} = \vec{i}\,\dot{V}_x + \vec{j}\,\dot{V}_y +$$

$$+ \vec{k}\,\dot{V}_z$$

КМ

$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$

$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$

$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \left[\frac{м}{с^2}\right]$$

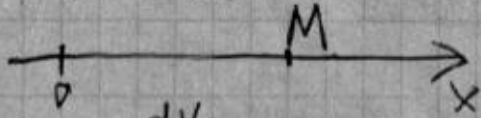
Равномерное прямолинейное движение:

$V_x = const$

$x(t) = V_x \cdot t \qquad \left(\frac{dx}{dt} = V_x\right)$

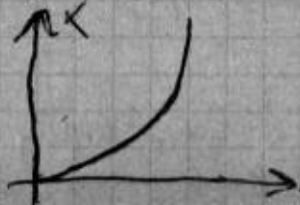
Прямолинейное равноускоренное движение:

$a_x = const$



$a_x = \frac{dV_x}{dt} \rightarrow V_x = a_x \cdot t$

$V_x = \frac{dx}{dt} = a_x \cdot t \rightarrow x = \frac{1}{2} a_x t^2$



Опыт показывает, что равноуск. дв-ия явл. такие дв-я, как скатывание тележки по н-ти и свободное падение.

Измерение ускорения

$$a_x = \frac{2x}{t^2}$$

Пример: Свободное падение тела:

$$a_x \approx 9{,}8 \ \frac{м}{с^2} \equiv g$$

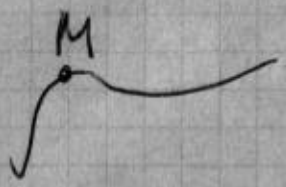
↑ ускорение свободного падения

Криволинейное движение точки

Тангенциальное и нормальное ускорения.

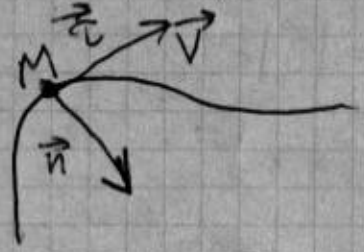
Тангенциальным наз-ся компонента ускорения, параллельная вектору скорости в данный момент вр.

Норм. наз-ся компонента уск., перп. ск-ти и напр. к центру кривизны, в данный



Круг кривизны кривой в точке M - это предельное положение круга, прохо-го через данную точку M и две другие точки кривой N и P, при стремлении $N \to M$, $P \to M$.

Центр кривизны - центр круга кривизны



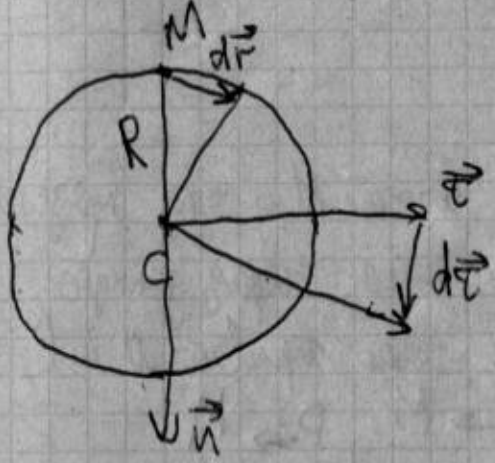
$$\vec{a} = \vec{\tau}\, a_\tau + \vec{n} \cdot a_n$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1 \quad (\text{орты})$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{V} \quad \to \quad \vec{V} = \vec{\tau} \cdot V$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\tau} \cdot V)}{dt} = \underbrace{\vec{\tau}\frac{dv}{dt}}_{\text{тангенциальное}} + \underbrace{V\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\text{норм-е}}$$

$d\vec{\tau} = ?$



$d\vec{\tau} = \vec{n} \cdot d\varphi$

$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dr}{R}$ $\qquad \tau = |\vec{\tau}| = 1$

$d\tau = \frac{dr}{R}$

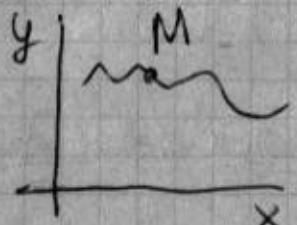
$\vec{a} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + v \cdot \vec{n}\frac{d\varphi}{dt} =$ [illegible]

$= \vec{\tau}\dot{v} + \vec{n} v \frac{1}{R}\frac{dr}{dt} = \vec{\tau}\dot{v} + \vec{n}\frac{v^2}{R} = \vec{a}$

$a_\tau = \dot{v}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$.

КМ

Упр:



$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

↑ ~~радиус~~ радиус кривизны в т.

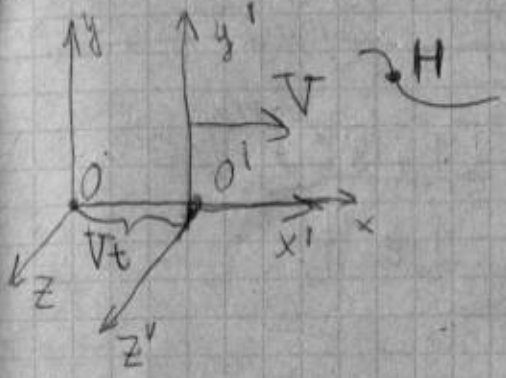
Лекция 2 (12.09.2014)

§2 Принцип относительности. Преобразование Галилея и преобразования Лоренца.

Принцип отн-ти Галилея: никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной сист. отсч. (СО) нельзя установить находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется

Математическая формулировка: ур-я, описывающие з-ны механики, должны быть инвариантны (т.е. сохр. свою форму) отн. преобразования, выражающего переход от некоторой СО в СО, движущуюся прямо-но и равн-о.

→



$$\left.\begin{aligned} x &= x' + Vt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\}$$ – преобразования Галилея.

Правило сложения скоростей Галилея

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \quad ; \quad \left.\begin{aligned} V_x &= V_x' + V \\ V_y &= V_y' \\ V_z &= V_z' \end{aligned}\right\}$$ – пр-о сл-я скоростей Галилея

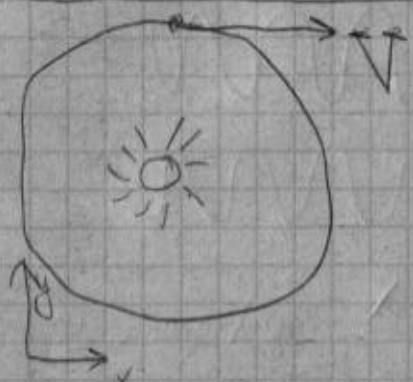
$\frac{dx}{dt} = V_x$; $\frac{dx'}{dt} = V_x'$

или в др. виде:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{со}$$

В 1861 г. Максвелл вывел с-му уравнений, описывающую св-ва электро-магнитного поля. Оказалось, что ур-я Максвелла не инв. отн. преобразования Галилея. Чтобы решить это противоречие Майкельсон предложил провести опыт, в котором проверить правило сл-я скоростей Галилея для световых волн. Для этого опыта нужна очень быстрая СО. И поэтому Майкельсон в качестве этой СО выбрал земной шар, движущийся вокруг Солнца.

КМ



$V = 3 \cdot 10^4 \frac{м}{с}$

$c = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{м}{с}$.

Вторая трудность состоит в том, что мы можем изм. приборы располагать только на Земле. Поэтому Майкельсон предложил сравнить две ск-ти света отн. Земли: одну – по ходу дв. Земли а другую – перпендикулярно.

Гипотеза неподвижного эфира

$V_x = V_x' + V$

$V_y = V_y'$

$V_x^2 + V_y^2 = c^2$;

Продольная ск. света:

$V_y' = 0$.

$V_{\parallel} = V_x' = c \pm V$

продольных.

Поперечная ск. света.

$V_x' = 0$, V

$V_{\perp} = V_y' = \sqrt{c^2 - V^2}$

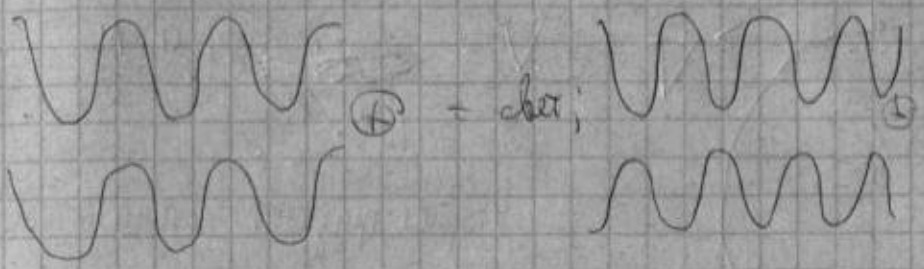
$V_{\parallel} \neq V_{\perp}$!

Для измерения разности этих скоростей Майкельсон предложил использовать интерференцию света.

Интерференция света

– это взаимная компенсация действия световых волн в

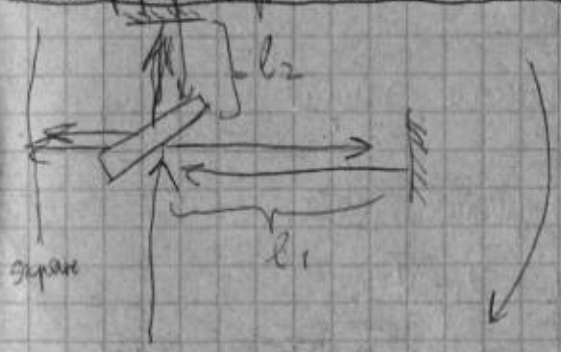
ген. точка ур-ва. (Грубо: свет + свет = темнота).



Период световых колебаний: $T = \frac{\lambda}{c}$, где λ-длина световой волны, c - ск. света. $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м, $C = 3 \cdot 10^8$ м

$T \approx 10^{-15}$ с.

Интерферометр Майкельсона



поворот всего прибора

Условия сильного изменения интерференционной картины при ...

$$\frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V} =$$

$$= \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad (1) \Rightarrow \text{свет.}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \ominus$$

поворот

$$\frac{l_2}{c-V} + \frac{l_2}{c+V} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-V^2}} + \frac{T}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 \approx l_2 = \\ = \frac{L_1}{4} \lambda \left(\frac{c}{V}\right)^2 \end{cases}$$

$l_1 \approx l_2 \approx 10$ м.

Опыт ~~что~~ показал, что при повороте прибора интерференционная картина не меняется. Майкельсон заключил, что гипотеза неподвижного эфира ошибочна.

Этот рез-т был обобщён и сф-ан в виде принципа:

Принцип постоянства скорости света:

– ск. света не зависит от того, по отношению к какой СО: покоящейся или движущейся она определяется.

$V_{абс} = V_{отн} = c$!

Из этого принципа следуют:

$x = c \cdot \tau$; $(\tau \neq t')$!

$x' = c \cdot t'$;

Относительность времени.

Оказывается, дв-е вместо пр. время

$x, t \rightleftarrows x', t'$

Давайте найдем преобразование, которое удовл. принципу пост. ск. света.

Используем линейное преобр.

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' + x' \cdot V / c^2 \end{cases}$$

Это преобразование удовл. принципу постоянства ск. света (1)

$$x = ct$$

$$\Rightarrow x' = ct'$$

Обратное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - Vt \\ t' = t - xV/c^2 \\ x' = ct' \end{array}\right\} (2)$$

$$x = ct$$

Подстановка (2) в (1) не приводит к тождеству, потому:

Преобразования Лоренца

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + x' \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Принцип отн-ти Эйнштейна

Ур-я, выражс физ. законы, должны быть инвариантны отн. преобразования Лоренца. Оказалось, что

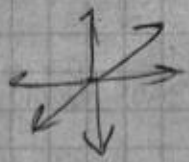
КМ

у-я Максвелла удовл. этому принципу.

§3 Кинематика твёрдого тела

Поступательное дв-е тела

– это дв-е, при котором ориентация тела в пр-ве не меняется.



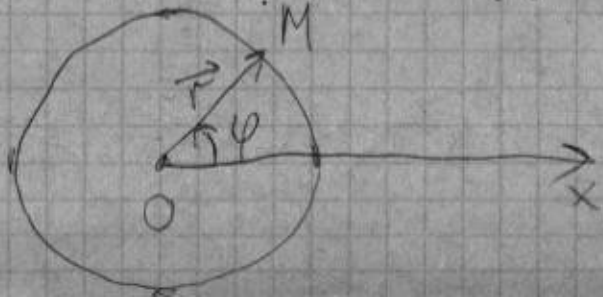
$\vec{V_i} = \vec{V}$

↑ скорость какой-либо точки тела

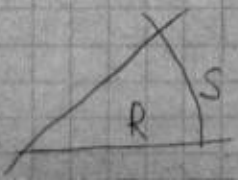
Вращение вокруг неподв. оси

– это дв-е, при котором все точки тела дв-ся по окр-ти, а центры всех окр-тей лежат на одной прямой, называемой неподв. осью.

Положение тела можно задать углом поворота.



Измерение угла в радианах



$\varphi = \frac{S}{R}$; угол в радианах – это отн-е длины дуги окр-ти к радиусу окр-ти.

Угловая ск. вращения тела – это производная угла оборота тела по времени. $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\ \left(\frac{рад}{с}\right)$.

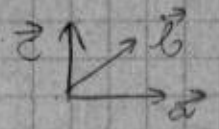
Связь линейной и угловой скоростей.

$$V = \frac{dr}{dt} \approx \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

Вектор угловой ск-сти – это вектор напр. вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю угловой ск-сти.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

↑ вект. пр-е.



КМ.

Движение тела с одной неподв. точкой.

Теорема Эйлера

Движение тела с одн. неподв. точкой в любой момент времени можно рассматривать как вращение вокруг оси, проходящей через неподв. точку.

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

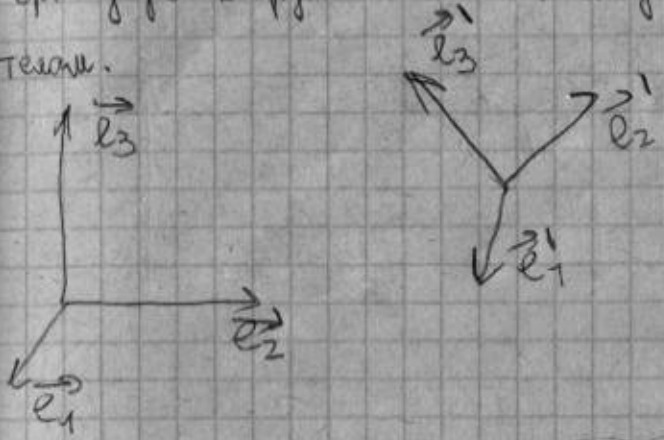
Мгновенная ось вр-тела - эта прямая линия, на кот лежат неподв. в данный момент точки тела

Лекция 3 (19.09.2014)

Матрица поворота тела

Опр - это м-ца, составленная из скалярных произведений

орт двух координатных с-м: неподвижной и связанной с телом.



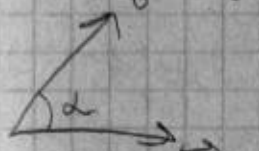
S - м-ца.

$(S)_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}'_j$

$(i, j = 1,2,3)$

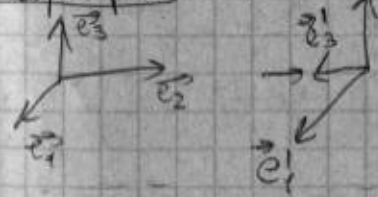
Скалярное пр-е векторов.

– это произведение модулей векторов на косинус угла между ними. Обозн-е: $\vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$



$$S = \begin{bmatrix} \vec{e}_1\vec{e}'_1 & \vec{e}_1\vec{e}'_2 & \vec{e}_1\vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}'_1 & \vec{e}_2\vec{e}'_2 & \vec{e}_2\vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}'_1 & \vec{e}_3\vec{e}'_2 & \vec{e}_3\vec{e}'_3 \end{bmatrix}$$

Примеры:



$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Преобразование компонент вектора при повороте с-мы координат

$$\vec{r} = \vec{e}_1 \cdot x_1 + \vec{e}_2 \cdot x_2 + \vec{e}_3 \cdot x_3 =$$

$$= \vec{e}'_1 \cdot x'_1 + \vec{e}'_2 \cdot x'_2 + \vec{e}'_3 \cdot x'_3$$

умножим правую и левую части скалярно

на $\vec{e}_1$: $x_1 = S_{11}x_1' + S_{12}x_2' + S_{13}x_3' = \sum_{j=1}^{3} S_{1j}x_j' = x_1$

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} (S)_{ij}\, x_j' \;,$$

Двойной поворот

$\hat{A}, \hat{B}$ - м-цы поворотов.

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\, x_j'$$

$$x_j' = \sum_{k=1}^{3} B_{jk}\, x_k''$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} \sum_{k=1}^{3} B_{jk} x_k'' = \sum_{k=1}^{3} x_k'' \underbrace{\sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{jk}}_{C_{ik}}$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} C_{ik} x_k''$$

два поворота экв. одному м-цей $\hat{C}$:

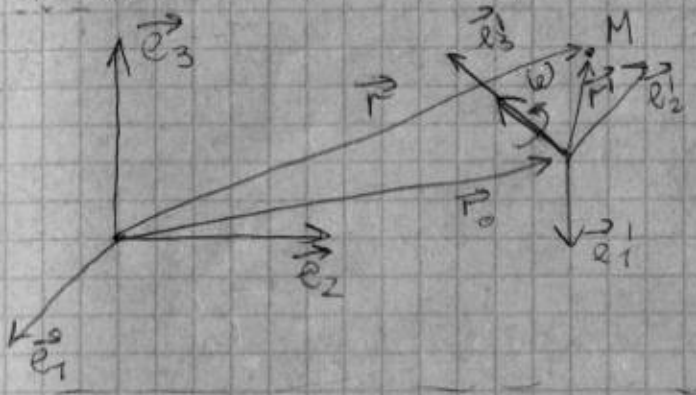
$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B}.$$

$$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

§4 Кинематика вращающейся системы отсчета

Какие особенности приобретают физ. явления, если их рассматривать **отн.** вращающихся систем отсчета? В этом параграфе найдем связь между кинематическими

характеристиками точки в неподвижной и вращающейся системах.



$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$;

Связь перемещений точки:

$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'$;

Обозначим перемещение точки отн-но подв. с-мы через $d'\vec{r}'$

$\vec{r}' = \vec{e}_1' \cdot x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3'$

$d\vec{r}' = \underbrace{\vec{e}_1' dx_1' + \vec{e}_2' dx_2' + \vec{e}_3' dx_3'}_{d'\vec{r}'} + x_1' d\vec{e}_1' + \textcircled{+}$

↑ в неподв. с-ме

$\textcircled{+}\ x_2' d\vec{e}_2' + x_3' d\vec{e}_3'$

$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $d\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]\,dt$

$d\vec{e}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1']\,dt$

$d\vec{e}_2' = [\vec{\omega}, \vec{e}_2']\,dt$

$d\vec{e}_3' = [\vec{\omega}, \vec{e}_3']\,dt$

$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']\,dt$

Связь скоростей точки

$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{r}']$; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$;

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$;

КМ

Связь ускорений точки

$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d\vec{r}']$ (будем считать $\vec{\omega} = const$)

$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']dt$

Аналогично: $d\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']dt$

$(\vec{v}' = \vec{e}_1' \cdot v_1' + \vec{e}_2' \cdot v_2' + \vec{e}_3' \cdot v_3')$.

$d\vec{v} = d\vec{v}_0 + d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']dt + [\vec{\omega}, d'\vec{r}'] +$

$+ [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]dt$

$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_п' + \vec{a}_к$

отн-е переносное Кориолисово уск-е

$\vec{a}_п = \vec{a}_0 + [\omega, [\omega, \vec{r}']]$

$\vec{a}_к = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$.

Преобразуем переносное уск-е:

$\vec{r}' = \vec{r}_\parallel' + \vec{r}_\perp'$

$[\vec{\omega}, \vec{r}'] = \underbrace{[\vec{\omega}, \vec{r}_\parallel']}_{0} + [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp']$

$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp']] =$

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(a, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ (Баз-минус заб)

$= \vec{\omega}\underbrace{(\vec{\omega}, \vec{r}_\perp')}_{0} - \vec{r}_\perp'\omega^2 = -\vec{r}_\perp'\omega^2$;

$$[\vec{w}, [\vec{w}, \vec{r}']] = -w^2 \vec{r}'_\perp = a_{дс}$$ - центростремит. уск-е.

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_п + \vec{a}_к \\ \vec{a}_п = \vec{a}_0 - w^2 \vec{r}'_\perp \\ \vec{a}_к = 2[\vec{w}, \vec{v}'] \end{cases}$$

§5 Законы Ньютона

1. Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не ~~заставят~~ заставят его изменить это состояние.

2. Пр-е масса мат. точки на ускорение равно действующей на неё силе. $m\vec{a} = \vec{F}$

3. Действие двух тел друг на друга равны и противоположно направлены.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Сила и масса

Масса - это мера инертности тела на действие силы

Сила - это мера действия на данное тело других тел

Измерение сил и масс

Введём единицы измерения.

Килограмм [кг] - это масса эталонного тела,

представляющего собой цилиндр из сплава платины (90%) иридия (10%) диаметром 39,17мм и такой же высоты

Ньютон [Н] – эта сила, вызывающая уск-е $1 \frac{м}{с^2}$ тела массой 1кг.

$m_{эт} = 1кг.$

$H = 1кг \cdot 1 м/с^2.$

Для того, чтобы изм массу произв. тела, подействуем на него силой в 1Н ($= F_{эт}$) и измерим уск-е, к-е получит тело под действием этой силы.

a_1

$m = \frac{F_{эт}}{a_1}$

Пример.

$a_1 = 2 \frac{м}{с^2}$

$m = \frac{1Н}{2 \frac{м}{с^2}} = 0,5кг.$

Для изм-я силы, подействуем ею на тело, массой в 1кг и изм. уск-е.

$F = m_{эт}\ a_2$

a_2

Пример

$a_2 = 3\ \frac{м}{с^2}$

$F = 1\text{кг} \cdot 3\ \frac{м}{с^2} = 3Н.$

Опытная проверка 2-го з-на Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3Н}{0{,}5\text{кг}} = 6\ \frac{м}{с^2} = a_{теор}.$$

$a_{теор} = a_{эксп}$;

Второй з-н перестаёт действовать только в 2-х случаях:

1. При очень больших скоростях тел (сопоставимых с Ск. св.)
2. Для очень маленьких тел, св. в маленьких об. пр-ва (для электрона в атоме).

Св-ва сил взаимодействия:

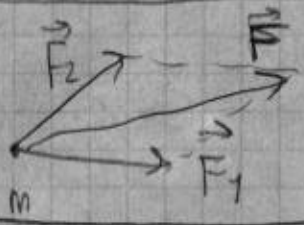
1. Силы вз-я, приложенные к разным телам 2 направ. вдоль одной прямой имеют одинаковую природу

Сложение сил

Если на мат. т. одновр. действуют две силы,

26 То она начинает двигаться так, как если бы действовала одна сила, равная вект. сумме первых двух сил.

КМ



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Лекция 4: (26.09.2014)

§ 6. Силы в механике

Силы в природе:

1. Гравитационные
2. Электромагнитные
3. Сильные ($\leq 10^{-15}$ м) (ядерные)
4. Слабые (очень краткодействующие)

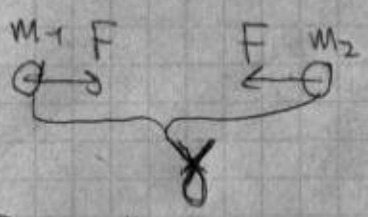
$$(n \to p + e + \nu)$$

нейтрон, протон, электрон, нейтрино.

Гравитационные силы

З-н всемирного тяготения

Любые две мат. точки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам, и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.



$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2};$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G — гравитационная постоянная.

$$G \approx 6{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}; \quad [G] = \frac{Н \cdot м^2}{кг^2};$$

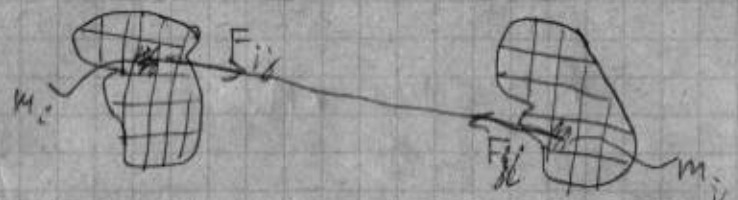
Принцип суперпозиции

Каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е. так, как если бы других частиц не было.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

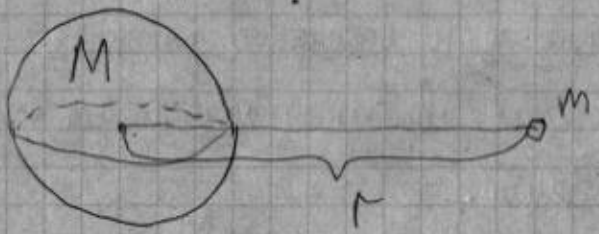
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

КМ



$$\vec{F} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$$

Пример (Притяжение точки к шару)



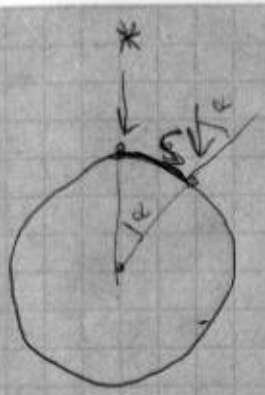
Интегрирование;

Расчёт показывает, что точка притягивается к шару так, как если бы вся масса шара, находилась бы в ~~центре~~ его центре.

Взвешивание Земли

$$mg = G\frac{M \cdot m}{R^2} \rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}$$



$$\alpha = \frac{S}{R} \Rightarrow R = \frac{S}{\alpha}$$

$R \approx 6400$ км.

$g \approx 10 \frac{м}{с^2}$

$G \approx 6{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

$M \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг.

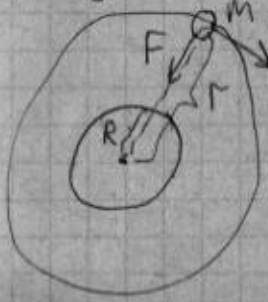
Факты, подтверждающие з-н всемирного тяготения

1. Одинаковость ускорения свободного падения для всех тел вблизи пов-ти Земли.

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

2. Период обращения Луны



$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

КМ

$V^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow V = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} = R\sqrt{\frac{g}{r}}$

$T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$

$R \approx 6400$ км, $g \approx 10\ \frac{м}{с^2}$, $r = 384\,000$ км.

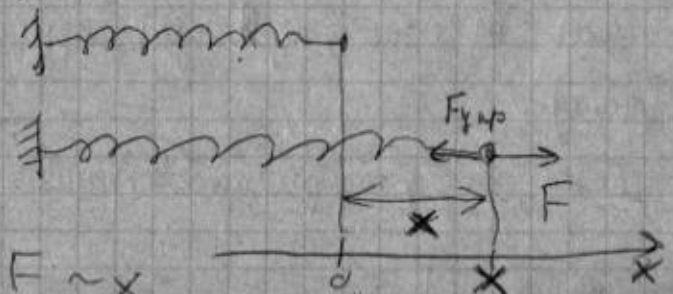
$T \approx 30$ сутак.

Сила упругости

– это сила, препятствующая деформации упругих тел.

Упругим называют тело, восстанавливающее свою форму после окончания действия сил.

На опыте измерена зависимость силы упругости от величины деформации. Опыт показывает, что если деформация не слишком велика, то сила упругости пропорциональна величине деформации.



$F_{упр} = -kx$; k – коэфф. упругости пружины $[k] = \frac{Н}{м}$

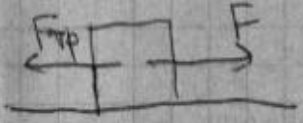
$F \sim x$

↑ З-н Гука

Сила трения

– это сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

Трение покоя



$\vec{F}_{тр} = -\vec{F}$.

Опыт показывает, что сила трения покоя ограничена сверху некоторым максимальным значением.

$F_{тр} \leq F_{max}$ (опыт).

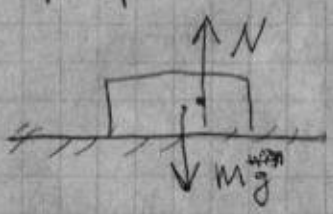
Опыт показывает, что максимальная сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления.

$F_{max} \sim N$; где N – сила нормального давления (это составляющая силы вз-я тел, перпендикулярная пов-ти соприкосновения)

$F_{max} = \mu N$; μ – наз-ся коэффициент трения

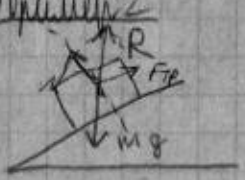
32 $[\mu] = 1$ (безразмерный)

Пример 1



$N = mg$

Пример 2



Сила трения – это составляющая силы $R_з$-я тел, параллельная пов-ти соприкосновения тел.

Трение скольжения

Опыт показывает, что сила трения скольжения $\approx F_{max}$ (максимальной силе трения покоя)

$F_{тр} = F_{max} = \mu N$

Вязкое трение

это трение, препятствующее дв-ю тел в сплошной среде.

Особенности вязкого трения

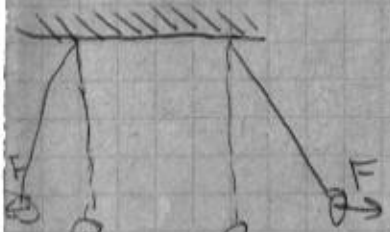
1. Отсутствие трения покоя
2. Сила вязкого трения зависит от ск-сти

Опыт показывает, что если ск-сть дв-я тела не слишком велика, то сила вязкого трения $\sim$ ск-сти тела

$F_{тр} \sim v$

Электромагнитные силы

Сила Кулона



Опыт

Электрический заряд – это мера электрического вз-я тел

Электрическое поле – это поле, созд. эл. зарядами и проявляющее себя действием на эл. заряд.

Напряжённость эл. поля – это мера действия поля на заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{F}$ ← сила, q ← заряд, $\vec{E}$ ↑ напряжённость

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{(Сила Кулона)}.$$

Сила Лоренца (Магнитная сила)

$$\vec{F} = q\,[\vec{V}, \vec{B}]$$

$\vec{B}$ – магнитная индукция

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}]$$

$\vec{V}$ – скорость ~~заряда~~ заряда q

$\vec{E}$ – напр. эл. поля, $\vec{B}$ – маг. инд.

КМ

Релятивистское ур-е дв-я

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

m - масса мат. точки, v - ск-сть мат. точки, c - ск. света

$\vec{p}$ - релятивистский импульс.

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ - сила Лоренца

§7 Неинерциальные с-мы отсчёта. Силы инерции.

Инерциальная с-ма - это с-ма, отн. кот. всякое тело удалённое бесконечно от др. тел не ин. уск-я.

Неинерциальными являются с-мы, кот дв-ся ускоренно отн. инерциальной

Введем ур-е дв-я точки отн. неинерц. СО.

$m\vec{a} = \vec{F}$ (инерц. СО)

$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{a}'$ - уск-е отн. не инерц. СО.

$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{инерц}}$

$\vec{F}_{\text{инерц}} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$ - сила инерции (это дова-

Вочная сила, действ. на мат. т. в неинерц. СО)

СВЯЗЬ → $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_п + \vec{a}_к$

$\vec{F}_{инерц} = \vec{F}_п + \vec{F}_к$

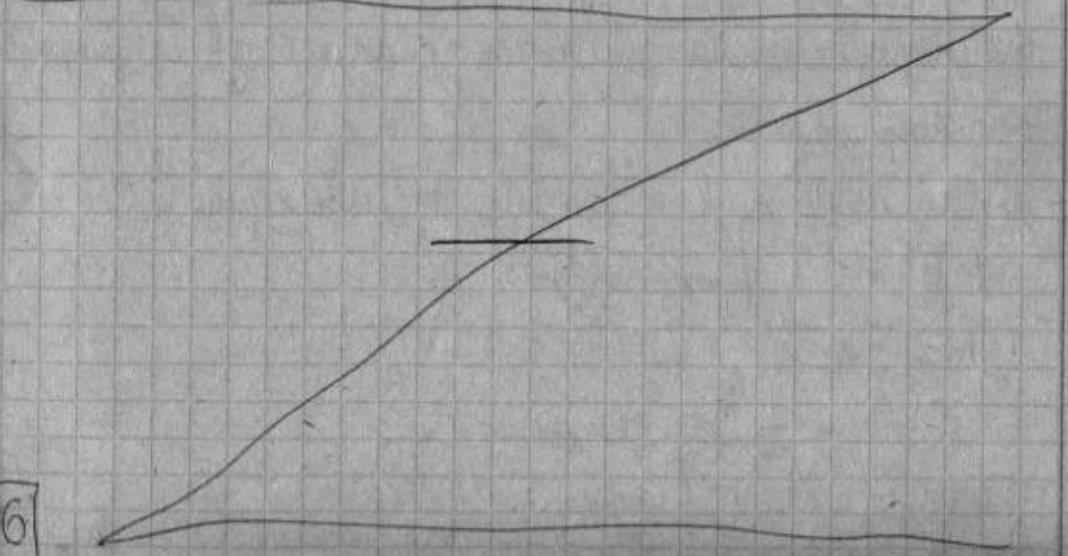
↑ Кориолисова.

$\vec{F}_п = -m\vec{a}_0 + m\omega^2\vec{r}_1$

– переносная сила инерции

$\vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}]$ – Кориолисова сила инерции.

$m\omega^2\vec{r}_1 = \vec{F}_{цб}$ – центробежная сила инерции.



КМ

Лекция 5: (03. 10. 2014)

Силы инерции

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_п + \vec{F}_к$$

$$\vec{F}_п = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}_\perp'$$

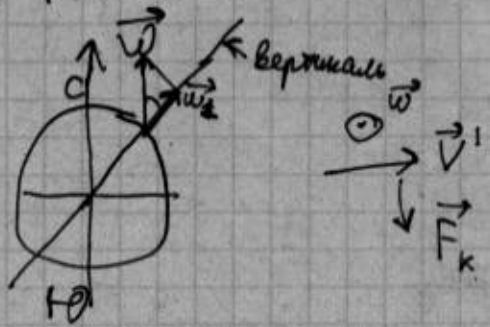
– переносная сила инерции

$$F_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{V}']$$

– кориолисова сила инерции

Невесомость – это явление исчезновения веса тела, вызванное ускорением системы отсчёта.

Перегрузка – это увеличение веса тела, вызванное ускорением системы отсчёта.



Маятник Фуко

...

Особенности сил инерции

- Эти силы отличны от нуля только для наблюдателя, связанного с неинерц. СО.
- Нельзя указать тело, со стороны которого приложена сила инерции. Сила ин. не подчинена 3-му з-ну Ньютона.

§8 Импульс с-мы частиц. Движение центра масс.

Импульс м.точки - это произведение её массы на её ск-сть.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad [p] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Импульс с-мы частиц - это сумма импульсов отдельных частиц системы.

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i ;$$

Центр масс системы частиц

- это точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

КМ

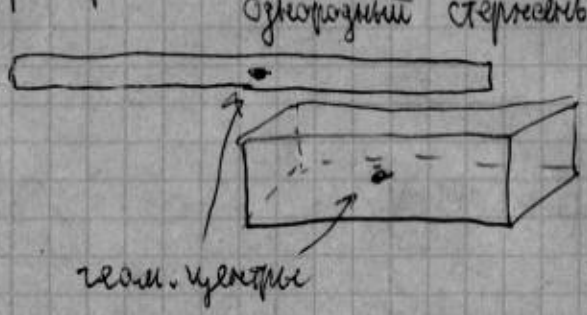
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$m = \sum_i m_i$ – масса системы.

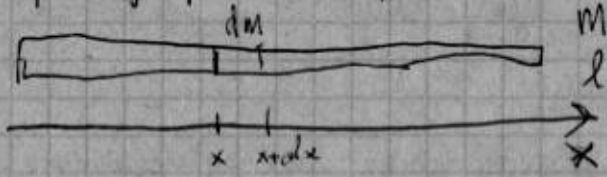
Пример

$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

Пример



Пример центра масс стержня



m – масса стержня
l – длина

$\vec{r}_c$; спроект. на ось X:

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} ;$$

$$x_y = \frac{1}{m}\int_0^m x\,dm = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\,\frac{m}{\ell}\,dx = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell x\,dx = \frac{1}{\ell}\,\frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell}{2}$$

$$dm = \frac{m}{\ell}\,dx$$

$= \frac{\ell}{2}$.

~~Скорость центра масс~~

Скорость центра масс

$$\vec{V}_y = \frac{d\vec{r}_y}{dt} = \dot{\vec{r}}_y$$

$$\vec{V}_y = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{V}_y = \frac{\vec{p}}{m} \Rightarrow \vec{p} = m \cdot \vec{V}_y$$

Импульс системы равен произведению массы системы на вектор скорости центра масс.

Ускорение центра масс

- это производная скорости центра масс по времени.

$$\vec{a}_y = \frac{d\vec{V}_y}{dt} = \dot{\vec{V}}_y$$

$$\vec{a}_y = \frac{1}{m}\sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

КМ

Закон движения центра масс

Внутренние силы – это силы взаимодействия между телами данной системы

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = 0$$

Итак, для произвольной системы сумма внутренних сил равна нулю.

Внешние силы – это силы, действующие на тела системы, со стороны тел, не входящих в данную систему.

$\vec{F}_i$

2-й з-н Ньютона для мат. точки системы:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

$\sum_i$:

$\therefore \vec{F}_{внеш} \neq 0$

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \left(\sum_i \vec{F}_i\right) + \sum_{ij} \vec{f}_{ij}$$

$m\vec{a}_{ц} = \vec{F}_{внеш}$

Центр масс системы частиц движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса с-мы, и к ней были приложены все внешние силы.

§9 Закон сохранения импульса

З-н изменения импульса системы частиц

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

вычислим производную по времени:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_{ц} = \vec{F}_{внеш}$$

Скорость изменения импульса системы равна сумме внешних сил.

Если эта сумма внеш. сил равна нулю то импульс с-мы сохраняется.

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{внеш}$$

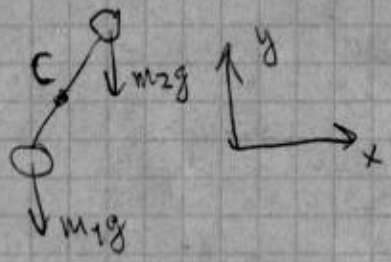
Более сильная формулировка з-на сохр. импульса:

Если существует такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна нулю, то в направлении этой оси импульс сохраняется.

Если $F^{(x)}_{внеш} = 0$, то

$$p_x = \sum_i m_i a_{ix} = const.$$

Пример



$$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = const.$$

Реактивное движение

– это движение, происходящее за счёт выброса реактивных струй.

$$m\vec{V} = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) +$$
$$+ \vec{u} \cdot dm$$
$$\vec{u} = \vec{c} + \vec{V}$$

$$m\vec{V} = m\vec{V} + m\,d\vec{V} - \vec{V}\,dm - (dm\,d\vec{V}) + \vec{c}\,dm + \vec{V}\,dm$$

$(dm\,d\vec{V}) \to 0$

$$m\,d\vec{V} = -\vec{c}\,dm \qquad /dt:$$

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_p \quad \text{– реакт. сила}$$

$$\vec{F}_p = -\vec{c}\,\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \mu \quad \left(\frac{кг}{с}\right)$$

← скорость расхода массы

$$\vec{F}_p = -\vec{c}\,\mu.$$

Пример расчета "Энергия"

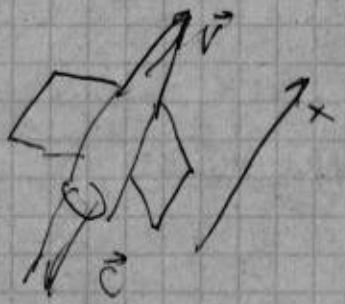
$$\mu = 10\ \frac{\text{Тонн}}{с} = 10^4\ \frac{кг}{с}.$$

$$c = 3\ \frac{км}{с} = 3 \cdot 10^3\ \frac{м}{с}.$$

$F_p = m c \mu = 3 \cdot 10^3 \frac{т}{с} \cdot 10^4 \frac{кг}{с} = 3 \cdot 10^7$ Н.

(поднимет 3000 тонн)

Стартовая масса ракеты



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_p = -\mu \vec{c}$$

$$m \frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$

$$(m_0 - \mu t) \frac{dv}{dt} = \mu c$$

$$\frac{dv}{c} = \mu \frac{dt}{m_0 - \mu t}$$

$$\int_0^v \qquad \int_0^t$$

$$\frac{v}{c} = -\ln \frac{m}{m_0}$$

$$\ln \frac{m_0}{m} = \frac{v}{c} \qquad \frac{m_0}{m} = e^{v/c}$$

$m_0 = m e^{v/c}$

$\mu = 8 \frac{км}{с}$ (первая косм.)

$c = 2{,}7$ км/с

$m = 100$ тонн.

$m_0 \approx m e^3 \approx 2000$ тонн.

§10 Работа и потенциальная энергия

Элементарная работа

– это скалярное произведение силы на бесконечно малое ~~приложения~~ перемещение точки приложения силы

$$dA = \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$dA = F\, dr \cos\alpha =$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Работа – это сумма элементарных работ

$$A = \int dA = \int \vec{F}\, d\vec{r}$$

КМ

$[A] = Н \cdot м =$ Джоуль (Дж)

Джоуль – это работа силы в 1Н при перемещении точки приложения силы на 1м в напр. действия силы.

Все силы делят на потенциальные и непотенциальные

Потенциальная наз-ся сила, работа которой по перемещению по любому замкнутому контуру равна нулю.

Примеры:

Сила тяжести – потенциальная

Сила упр. – потенц.

Пример непотенциальной силы – сила трения

Элементарная потенциальная энергия

– это элементарная работа потенциальной силы,

взятая со знаком минус

$$d\Pi = -dA_{\Pi}$$

Потенциальная энергия

- это сумма элементарных потенциальных энергий

$$\Pi = -\int dA_{\Pi} = -\int \vec{F} d\vec{r}$$

ЛЕКЦИЯ 6: (10.10.2014)

Выражение силы через потенциальную энергию

$$d\Pi = -dA_{\Pi} = -\vec{F}d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$\Pi = \Pi(x, y, z)$ - потенциальная энергия точки (x, y, z)

сравним

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial x} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y};$$

$$\Rightarrow F = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z =$$

$$= -\left(\vec{i}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right) := -\text{grad}\,\Pi$$

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad}\,\Pi}$$

Градиент

$$\text{grad} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} := \vec{\nabla}$$

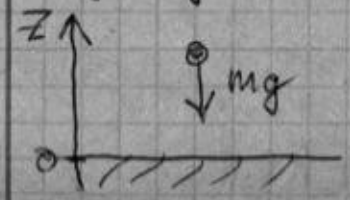
↑ Оператор Набла.

Потенциальная энергия системы частиц

– это сумма потенциальных энергий отдельных частиц системы.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

① Однородное поле тяготения



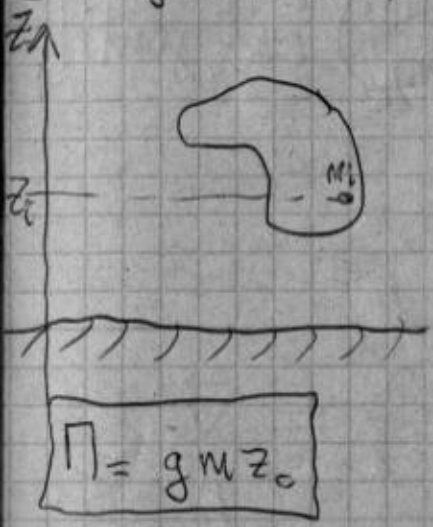
$$d\Pi = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -m\vec{g}\,d\vec{r} =$$

$$= mg\,dz,$$

$$\Pi = \int d\Pi = mg\int_0^z dz = mgz$$

$$\Pi = mgz$$

(2) Потенциальная энергия тела



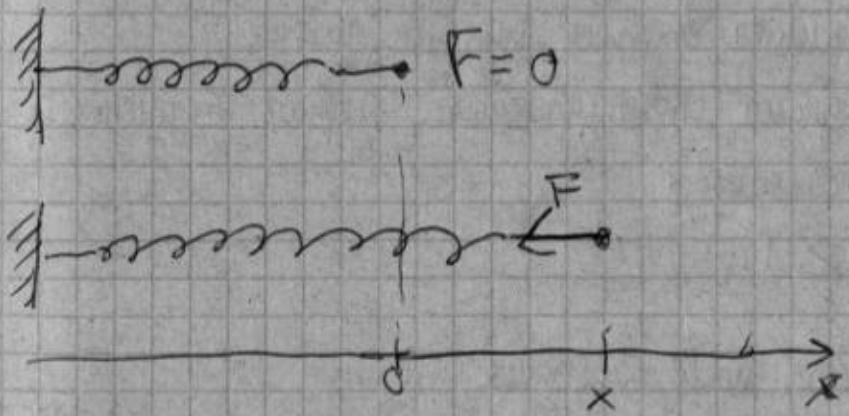
$$\Pi = \sum_i \Pi_i = g \sum_i m_i z_i =$$

$$= g m z_c$$

↑ z-координата центра масс.

$$\Pi = g m z_c$$

(3) Сила упругости



$F_x = -kx$ (з-н Гука).

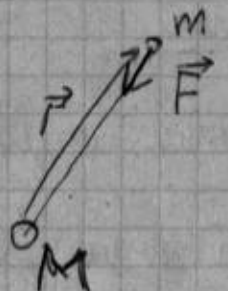
$$d\Pi = -F dr = -F_x dx = kx dx$$

$$\Pi = \int d\Pi = k \int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\boxed{\Pi = \frac{kx^2}{2}}$$

④ Центральное силовое поле

- это поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром.



$$\vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r} F$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -\vec{F}\,d\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r} F\,d\vec{r} \quad (=)$$

$$\vec{r}\,d\vec{r} = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \frac{1}{2} d(r^2) = r\,dr$$

$$\boxed{\vec{r}\,d\vec{r} = r\,dr}$$

(=) $F\,dr$

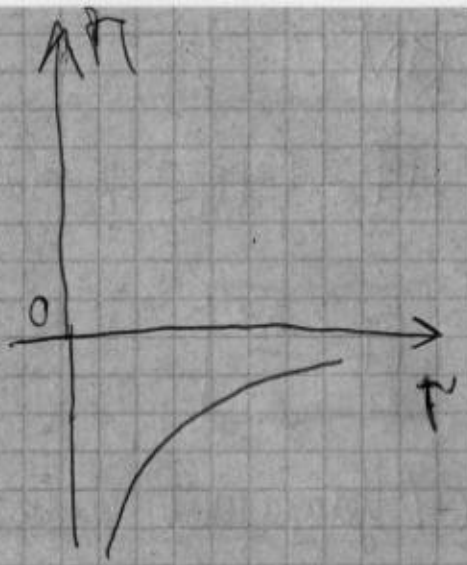
$$\Pi = \int d\Pi = \int F\,dr = GMm \int \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -GMm \int_{r_0}^{r} d\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$\Pi = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}\right)$$

Положим $r_0 = \infty$

$$\boxed{\Pi = -\frac{GMm}{r}}$$



§ 11 Кинетическая энергия

Кинетической энергией мат. точки называется

$K = \frac{mV^2}{2}$, где m – масса точки, V – её скорость

$$[K] = \text{кг}\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}$$

Закон изменения кинетической энергии

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \qquad (\cdot\, d\vec{r})$$

↖ скалярно

Б2] $m\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r}$; $mVdV = \vec{F}d\vec{r}$

КМ

$$mvdv = \vec{F}d\vec{r} \;;\; d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r}$$

$$dK = \vec{F}d\vec{r}\;,\quad \boxed{dK = dA}$$

Приращение кинетической энергии точки равно работе действующих на неё сил.

Кинетическая энергия системы частиц

— это сумма кинетических энергий отдельных частиц системы.

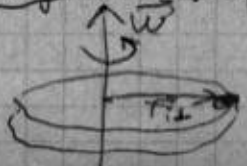
$$K = \sum_i K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$$

Кинетическая энергия тела

Поступательное движение:

$K = \frac{mV^2}{2}$, где m - масса всего тела, V - скорость любой её точки.

Вращение вокруг неподвижной оси



m_i - §3: $v_i = \omega r_{i\perp}$

$$K = \frac{1}{2} w^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

Сумма имеет смысл характеристики тела по отношению к данной оси вращения.

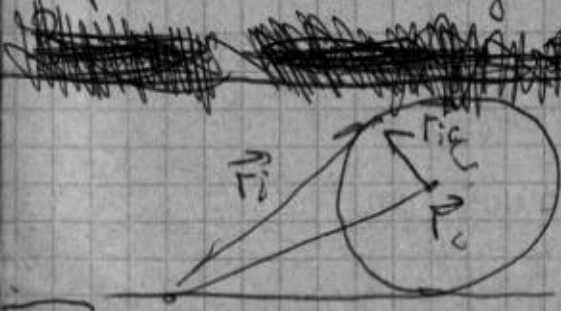
Момент инерции тела

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \qquad [J] = кг \cdot м^2.$$

$$K = \frac{J w^2}{2}$$

Плоское движение твердого тела

- это движение, при котором все точки тела движутся параллельно нек. неподв. плоскости.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \vec{v}_c \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{ic}^2)$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = m v_c - v_c \cdot m = 0$$

$K = K_c + K_{oc}$

K_c — кин. эн. центра

K_{oc} — кинетическая эн. вращения отн. центра.

$$\boxed{K = \overbrace{\frac{m v_c^2}{2}}^{K_c} + \overbrace{\frac{1}{2} J \omega^2}^{K_{oc}}}$$ (Теорема Кёнига.)

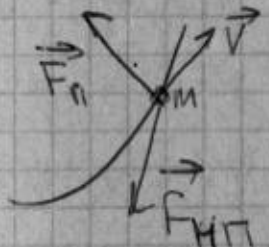
здесь J – момент инерции тела отн. оси, проходящей через центр масс.

§ 12 Закон сохранения энергии в механике

Полная механическая энергия - это сумма кинетической и потенциальной энергий системы.

$$E = K + \Pi, \quad [E] = Дж.$$

Закон изменения полной энергии



$$dK = dA \ominus \left(\text{Теорема об изм. кин. эн.}\right)$$

$$\ominus \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}_п d\vec{r} + \vec{F}_{нп} d\vec{r} =$$

$\vec{F}_{нп}$ ← не потенциальная

$$= \underbrace{dA_п}_{-d\Pi} + dA_{нп};$$

$$dK = -d\Pi + dA_{нп}; \quad d(\underbrace{K+\Pi}_{E}) = dA_{нп}$$

$$\boxed{dE = dA_{нп}.}$$

Приращение полной механической энергии равно работе непотенциальных сил.

Если же работа непотенциальных сил равна

мульо, то полная механическая энергия системы сохраняется.

(Если $A_{нп}=0$, то $E = K+П = const$)

Пример

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Импульс и энергия в теории относительности

Закон сохр. имп. (ЗСИ)

Если сумма внеш. сил равна нулю, то релятивистский импульс системы сохраняется.

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = const.$$

Закон сохр. энерг. (ЗСЭ)

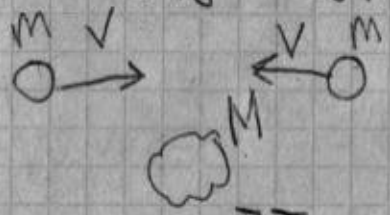
Если сумма внеш. сил равна нулю, то ~~сумма внеш~~ релятивистская энергия сохраняется:

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = const.$$

Эти законы (ЗСИ, ЗСЭ) всегда действуют вместе.

ЗСЭ в теории относительности как следствие ЗСИ и принципа относительности.

Пример: неупругий удар



$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{M\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (1)$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (2)$$

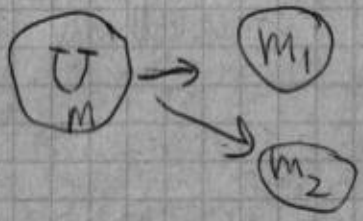
(1) $\Rightarrow \vec{V} = 0$

(1), (2) $\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 2m$ (!)

Этот пример показывает, что возможны взаимные превращения массы и энергии.

Факты, подтверждающие теорию относ.

① Деление ядер Урана



$E = c^2 \Delta m$

$\Delta m = m - m_1 - m_2$

$E_0 = m c^2$ — энергия покоя.

② Световое давление

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E \cdot \vec{v} = \vec{p} \cdot c^2$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

$m = 0 \quad E = pc \Rightarrow v = c$ фотон.

Сила светового давления

$$F = \dot{p} \qquad p = \frac{E}{c}$$

$$F = \frac{1}{c}\dot{E} = \frac{P}{c}$$, где P - мощность света

$$P = 10^3 \text{ Вт}$$

$$F = \frac{10^3 \text{ Вт}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н}. \ (!)$$

Лебедев экспериментально подтвердил сущ-ние сил светового давления, причем эти силы определяются $\frac{P}{c}$.

ЛЕКЦИЯ 7: (17.10.2014)

§ 13. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

Опр

Момент импульса частицы – это векторное произведение радиус-вектора частицы на её

КМ

Импульс

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$[\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}]$$

Опр

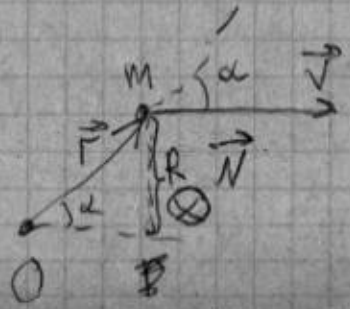
Момент силы – это векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad , [\text{м} \cdot \text{Н}]$$

Опр

Момент импульса системы частиц – это сумма моментов импульса отдельных частиц системы

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

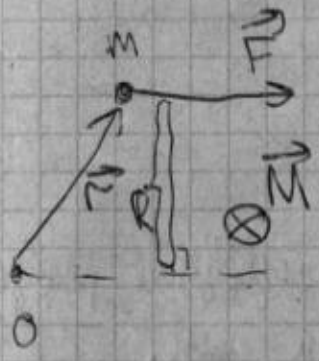


$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$N = r \cdot mv \cdot \sin\alpha =$

$= mvR$

R - расстояние от линии движения до т. O.

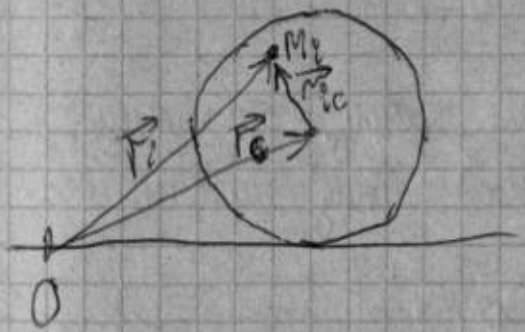


$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = FR$

R - плечо силы F

Момент импульса тела



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i \,, \quad m = \sum_i m_i$$

$$\vec{N} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_c + \vec{r}_{ic}, \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}]$$

62] $= [\vec{r}_c, m\vec{v}_c] + \sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}] +$

КМ

$$+\left[\vec{r}_c, \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_{ic}}_{=0}\right] + \left[\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic}}_{=0}, \vec{v}_c\right]$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m\vec{r}_c - m\vec{r}_c = 0;$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{ic}) = m\vec{v}_c - m\vec{v}_c = 0;$$

$\vec{v}_i = \vec{v}_c$

1 слагаемое $\left([\vec{r}_c, m\vec{v}_c]\right)$ – момент импульса центра

2 слагаемое $\left(\underbrace{\sum_i m_i [\vec{r}_{ic}, \vec{v}_{ic}]}_{=\vec{N}_{oc}}\right)$ – момент импульса отн. центра

Момент относительно [redacted] оси

Опр

[redacted]

Момент [redacted] относительно оси – это

проекция вектора момента на эту ось.

(Момент силы или импульса)

$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$

$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp, \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp]$$

$$= \underbrace{[\vec{r}_\parallel, \vec{F}_\parallel]}_{=0} + \underbrace{[\vec{r}_\perp, \vec{F}_\parallel] + [\vec{r}_\parallel, \vec{F}_\perp]}_{\vec{M}_\perp} + [\vec{r}_\perp, \vec{F}_\perp]$$

$$\boxed{\vec{M}_\parallel = [\vec{r}_\perp, \vec{F}_\perp]}$$ - правило нахождения момента относительно оси.

Аналогично:

$$\boxed{\vec{N}_\parallel = [\vec{r}_\perp, m\vec{v}_\perp]}$$

Для системы:

$$\vec{N}_\parallel = \sum_i [\vec{r}_{i\perp}, m_i \vec{v}_{i\perp}]$$

Пример: вращение вокруг неподвижной оси.

$$\vec{v}_{i\perp} = \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}] \quad (\S 3)$$

$$\vec{N}_\parallel = \sum_i m_i [\vec{r}_{i\perp}, [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]] =$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{\omega} r_{i\perp}^2 - \vec{r}_{i\perp} (\vec{r}_{i\perp}, \vec{\omega})\right)$$

$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{\omega} \underbrace{\sum_i m_i r_{i\perp}^2}_{J} = J\vec{\omega}$$

$J \leftarrow$ момент инерции.

$$\boxed{\vec{N}_{\parallel} = J\vec{\omega}}$$

Пример: плоское движение твердого тела

$$\vec{N} = \vec{N}_C + \vec{N}_{OC}$$

Возьмём составляющие этих векторов, параллельные оси вращения.

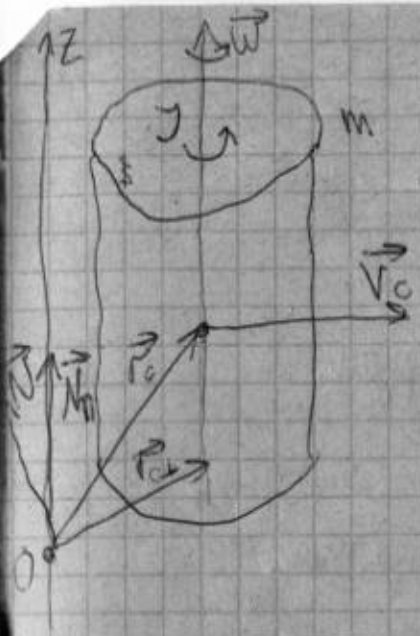
$$\vec{N}_{\parallel} = \vec{N}_{C\parallel} + \vec{N}_{OC\parallel}$$

$$\vec{N}_{C\parallel} = [\vec{r}_{C\perp}, m\vec{v}_{C\perp}] \qquad \vec{v}_{C\perp} = \vec{v}_C$$

$$\vec{N}_{C\parallel} = [\vec{r}_{C\perp}, m\vec{v}_C]$$

$$\vec{N}_{OC\parallel} = J\vec{\omega} \quad (J = J_C \text{ – момент ин. отн. оси, проходящей через ц. масс})$$

$$\boxed{\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{C\perp}, m\vec{v}_C] + J\vec{\omega}}$$



§ 14 ~~Закон сохранения момента импульса~~ Теорема моментов. Закон сохранения момента импульса

Вычислим скорость изменения момента импульса точки.

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt} = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}]$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \Rightarrow [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] = 0$$

$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\dot{\vec{N}} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

66 $\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}}$ – теорема моментов

КМ

Теор. (Моментов)

Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту действующих на неё сил.

△ выше

Для системы частиц:

$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \underbrace{\sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m\vec{v}_i]}_{=0} + \sum_i [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i]$$

$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

внутренние силы

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}] =$$

$$= \vec{M}_{внеш} + \vec{M}_{внутр}$$

$\vec{M}_{внеш} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ – сумма моментов внеш. сил.

Покажем, что $\vec{M}_{внут} = 0$:

Элементарный момент внут. сил:

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}] =$$

$$= [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] - [\vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] =$$

$$= [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}] = 0, \text{ т.к. } (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \parallel \vec{f}_{ij}.$$

$$\vec{M}_{внут} = \sum_i \sum_j \vec{M}_{ij} = 0.$$

$$\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{внеш}}$$ – теорема моментов для системы

Теор. (Моментов) (для С-мы)

Скорость изм. момента импульса системы равна сумме моментов внешних сил

△ выше

КМ

Закон сохранения момента импульса

Если сумма моментов внешних сил равна 0, то момент импульса системы сохраняется.

(Если $\vec{M}_{внеш} = 0$, то $\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = const$.)

Более сильная формулировка

Если $\exists$ такая ось, отн. кот. сумма моментов внешних сил равна 0, то момент импульса с-мы отн. этой оси сохраняется.

(Если $M^{(z)}_{внеш} = 0$, то $N_z = const$)

§ 15. Материальная точка в центральном поле

Опр Центральное поле - это поле сил, направленной всегда в сторону одной и той же точки.

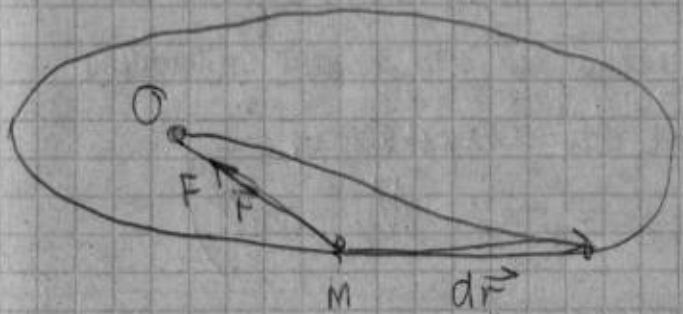
(Поле тяготения Солнца в Солнечной с-ме).

Законы Кеплера

1. Планеты Солнечной системы движутся по эллипсам в общем фокусе которых нахо-

диса Солнце
2. За равные промежутки времени радиус-вектор планеты описывает равные площади.
3. Квадраты периодов вращения планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

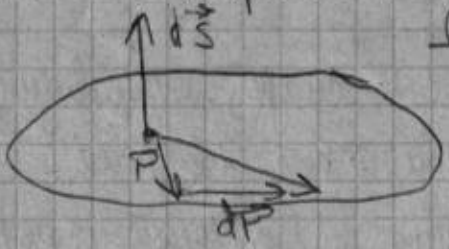
Прокомментируем 2-ой з-н:



$$M = [\vec{r}, \vec{F}] = 0$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$$

Следствие 1: Движение в центральном поле эвл. плоским.
Следствие 2: Сохранение секторной скорости.



Опр
Секторная площадь - это

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$$

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot dr \sin\alpha$$

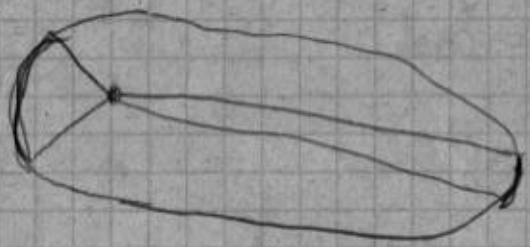
Опр
Секторная скорость - это:

КМ

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} \dot{;}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}] = \frac{1}{2m}[\vec{r}, m\vec{v}] =$$

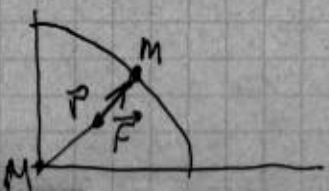
$$= \frac{\vec{N}}{2m} \; ; \; \vec{N} = const \Rightarrow \vec{\sigma} = const$$



3-ий З-н. Кеплера легко вывести для круговых орбит.

Лекция 8: (24.10.2014)

Выведем первый закон Кеплера из основных законов механики.



$$\vec{N} = \vec{M} = 0 ;$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0$$

$\begin{cases} \vec{N} = \text{const}; \quad (\text{ЗС момента импульса}) \\ E = K + \Pi = \text{const}; \quad (\text{ЗСЭ}) \end{cases}$

$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m[\vec{r}, \vec{v}] \overset{(\perp Oxy - \text{пл-ть вращения})}{=} m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} =$

$= \vec{k}\, m (x\dot{y} - y\dot{x}) = \vec{N} = \text{const} = N \cdot \vec{k}$

$\Rightarrow$

$N = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}.$

$K = \frac{mv^2}{2}, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

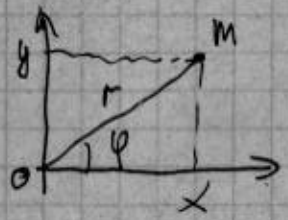
$\Pi = -\frac{GMm}{r}, \quad GMm := A$

$\Pi = -\frac{A}{r}$

$\begin{cases} N = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{A}{r} \end{cases}$

Введём полярные координаты точки

КМ



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

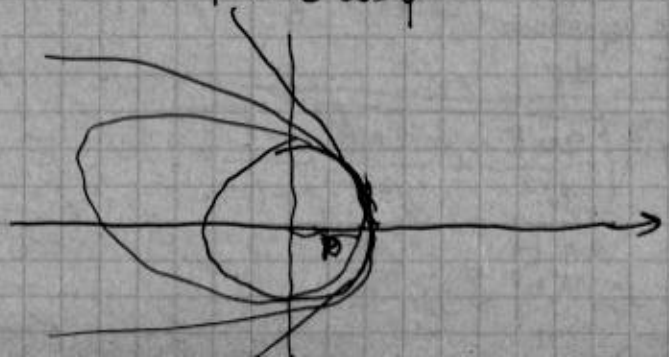
$$N = m r^2 \dot{\varphi}$$
$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{cases} N = m r^2 \dot{\varphi} \\ E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{A}{r} \end{cases}$$

Из этих уравнений получили:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi};$$

$\varepsilon = 0$: окр-ть
$0 < \varepsilon < 1$: эллипс
$\varepsilon = 1$: парабола
$\varepsilon > 1$: гиперб.



$$\begin{cases} \dot\varphi = \dfrac{N}{mr^2} \\ \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 - \dfrac{2A}{mr} = \dfrac{2E}{m} \end{cases}$$

$$\dot r^2 + \frac{N^2}{m^2r^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr}$$

$$\begin{cases} \dot r = \pm\sqrt{\dfrac{2E}{m} + \dfrac{2A}{mr} - \dfrac{N^2}{m^2r^2}} = \dfrac{dr}{dt}; \\ \dot\varphi = \dfrac{N}{mr^2} = \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

поделим 1-е ур-е на 2-ое:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2r} - \frac{1}{r^2}}$$

- это ур-е траектории в дифференциальной форме

разделим переменные:

$$\pm d\varphi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2mE}{N^2} + \dfrac{2mA}{N^2r} - \dfrac{1}{r^2}}}$$

74 $S := \frac{1}{r}$; $dS = -\frac{dr}{r^2}$

$$\pm d\varphi = \frac{dS}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} S - S^2}}$$; выделим под корнем полный квадрат:

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} S - S^2 = \frac{2mE}{N^2} - \left(S^2 - 2S \frac{mA}{N^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2A^2}{N^4} \right) + \frac{m^2A^2}{A^4} = \underbrace{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}}_{a^2} - \left(\underbrace{S - \frac{mA}{N^2}}_{x} \right)^2 =$$

$$= a^2 - x^2 \,, \quad dx = dS \,;$$

$$\pm d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\underbrace{\arcsin \frac{x}{a}}_{\psi} \right)$$

$$\sin\psi = \frac{x}{a} \,; \qquad \cos\psi \, d\psi = \frac{dx}{a}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2\psi} \, d\psi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, d\psi = \frac{dx}{a}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \, d\psi = dx$$

$$\pm d\varphi = d\left(\arcsin \frac{x}{a} \right)$$

$$\pm \varphi = \arcsin \frac{x}{a} + \text{const}$$

Выберем знак минус и положим константу, равную $-\frac{\pi}{2}$.

$$\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

$$\boxed{x = a\cos\varphi}$$

$$x = S - \frac{mA}{N^2} = a\cos\varphi \Rightarrow S = \frac{mA}{N^2} + a\cos\varphi = \frac{1}{r}$$

$$r = \frac{1}{\frac{mA}{N^2} + a\cos\varphi} = \frac{N^2/ma}{1 + \frac{N^2}{mA}a\cos\varphi}$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \text{ где:}$$

$$p = \frac{N^2}{mA}, \quad \varepsilon = a \cdot \frac{N^2}{mA}$$

$$\varepsilon = \frac{N^2}{mA}\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}} = \sqrt{1 + \frac{2N^2E}{mA^2}}$$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow E = 0$

§ 16 Плоское движение твердого тела

КМ

Уравнение движения центра масс:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}$$

Уравнение вращения: (вокруг неподвижной оси)

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M} \quad \text{(теорема моментов)}$$

вводим углы векторов компоненты, параллельные оси вращения

$$\dot{\vec{N}}_{\parallel} = \vec{M}_{\parallel}$$

$$\vec{N}_{\parallel} = J\vec{\omega}$$ момент инерции

$$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{\parallel}$$

Опр Угловое ускорение вращения:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \left[\frac{рад}{с^2}\right]$$

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_н$$

Спроектируем это ур-е на направление оси вращения:

$$\boxed{J\varepsilon_z = M_z}$$ – уравнение вращения.

Это ур-е применимо в 2-х случаях:

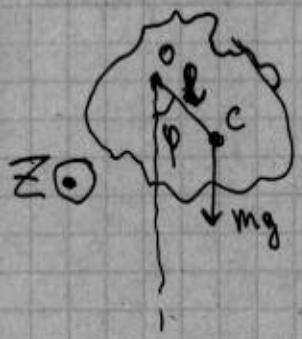
- для любой неизв. оси вращения
- для движущейся оси, проходящей через центр масс тела

Пример 1: физический маятник

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{g}] =$$

$$= \left[\sum_i m_i\vec{r}_i, \vec{g}\right] =$$

$$= [m\vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m\vec{g}]$$



$$J\varepsilon_z = M_z$$

Свяжем ось Z с центр. отсчёта угла φ правилом правого винта

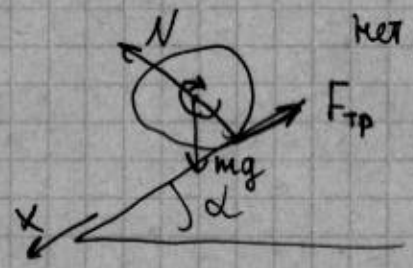
$$\varepsilon_z = \omega_z = \ddot{\varphi}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_c, m\vec{g}] \quad , \quad M_z = -|M| = -l\,mg\sin\varphi$$

$$J\ddot{\varphi} = -l\,mg\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{l\,mg}{J}\sin\varphi = 0$$

Пример 2: скатывание цилиндра по наклонной плоскости



нет проскальзывания.

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{тр}$$
$$J\varepsilon = R F_{тр}$$

$x = R\varphi \qquad \dot{x} = R\varepsilon, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}$

Имеем с-му:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{тр} \\ J_z = R F_{тр} \\ \ddot{x} = R\varepsilon \end{cases}$$

$$F_{тр} = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{J\ddot{x}}{R^2}$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \frac{J\ddot{x}}{R^2}$$

$$\ddot{x}\left(m + \frac{J}{k^2}\right) = mg\sin\alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

§17 Момент инерции твердого тела

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 ;$$

Теор. (Гюйгенса – Штейнера)

Момент инерции тела отн. произвольной оси равен моменту инерции тела отн. оси, проходящей через ц. м. тела, параллельно данной + полная масса тела умноженная на квадрат расстояния между осями.

$$\left(J = J_c + ma^2\right)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$$

Выделим компоненты, перп. оси вращения.

$$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}$$

$$J = \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}^{\,2} = \sum_i m_i \vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{r}_{i\perp} =$$

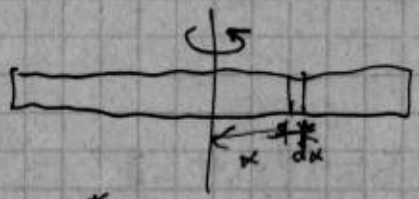
$$= \sum_i m_i \left(\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}\right)\left(\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}\right) =$$

$$= ma^2 + J_c + 2\left(\vec{r}_{c\perp} \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ic\perp}}_{=0}\right)$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m\vec{r}_c - m\vec{r}_c = 0.$$

■

Пример 1: стержень



$$J_z = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

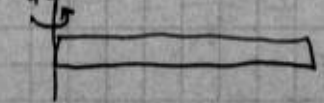
$$dm = \frac{m}{l} dx$$

Элементарный момент инерции $dJ = x^2 dm$

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx$$

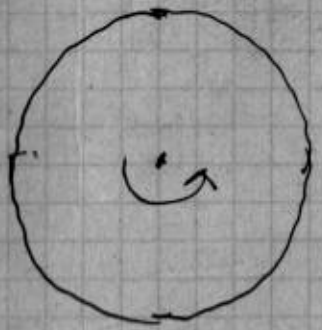
$$J = \int dJ = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{3l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) =$$

$$= \frac{ml^2}{12};$$



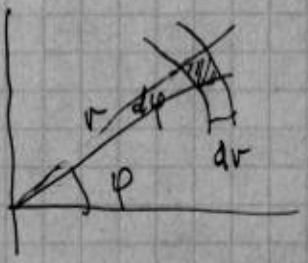
$$J = \frac{ml^2}{2}$$

Пример 2 : диск



m, R

$dr, d\varphi$



$dS = r d\varphi \cdot dr$

$dS = r dr d\varphi$

$$S = \int dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^2;$$

$dJ = r^2 dm$, $dm = \frac{m}{S} dS$

$$dJ = \frac{m}{S} r^2 r dr d\varphi = \frac{m}{S} r^3 dr d\varphi$$

$$J = \int dJ = \frac{m}{S} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{m}{S} 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

$$a_c = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

$$J = \frac{mR^2}{2}$$

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$$

Лекция 9: (31.10.2014)

§18 Системы со связями. Степени свободы. Обобщённые координаты.

Опр

Связь – это не выполняющиеся из ур-ий движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы.

Опр

Силы реакции – это силы, с которыми тела, осуществляющие связи действуют на тела системы.

Опр

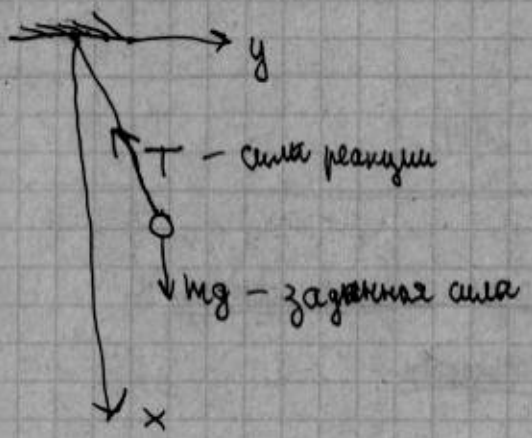
Заданные силы – это известные наперёд силы или

известные функции координат и скоростей частиц.

Силы реакции и заданные будем обозначать соответственно $\vec{R}$ и $\vec{F}$

$$m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell = \vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell ;$$

Пример: маятник



$x^2 + y^2 = l^2$ – ур-е связи.

Классификация связей

Голономные и неголономные

Стационарные и нестационарные

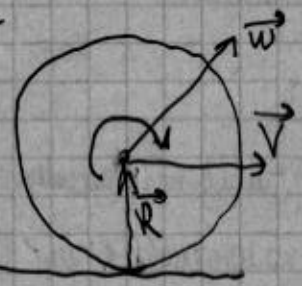
Опр

Голономными наз-ся связи, кот. сводятся к ограничениям только на координаты тел (Пример: маятник).

(Пример: качение цилиндра по накл. плоскости без проскальз-

зывания.)

Пример неголономной связи: качение шара без проскальзывания.



$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

Опр

Связь стационарна, если уравнение связи не содержит времени в явном виде. В противном случае связь не стационарна.

~~Пример нестационарной связи:~~ маятник, у кот. длина нити меняется по некоторому закону.

$$x^2 + y^2 = l^2(t)$$

ЗАДАЧА МЕХАНИКИ:

- описать закон движения и силы реакции по заданным силам и уравнениям связи.

$$m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell = \vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell \quad (\ell = \overline{1,N})$$

~~$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$~~

$$f_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1,k};$$

N - число точек системы, k - число связей.

$\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_k(t)$, $\vec{R}_i(t) = ?$

Чтобы решить эту задачу введём новые понятия.

Опр

Число степеней свободы с-мы — это число независимых координат, полностью определяющих положение с-мы в пр-ве.

$:= S$

Опр

Обобщённые координаты — это любые S координат, полностью определяющих положение с-мы в пр-ве.

$\{ := q_1, q_2, \dots, q_S \} := q$

Опр

Обобщённые скорости — это производные обобщённые координат по времени.

$\{ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_S \} := \dot{q}$

Примеры:

- мат. точка $(S = 3)$

2 м.т. $(S=6)$

2 м.т., связанные стержнем. $(S=5)$.

$S=6$

произвольное твердое тело.
$S=6$

$S=3N-k$, где N – число точек, k – число связей.

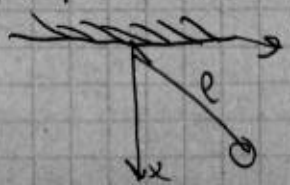
СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ

1°. Радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями набора обобщённых координат. $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,\dots,q_s,t)$

2°. Обобщённые координаты обращают в тождество ур-я связей.

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,t)\equiv 0.$$

Пример: плоский математический маятник $S=1$, $k=2$:



$z=0$

$x^2+y^2=l^2$

Выберем в качестве обобщённой

координаты угол отклонения маятника от вертикали

$q = \varphi, \quad \dot{q} = \dot{\varphi}$

$$\begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = l\sin\varphi \end{cases}$$

§19 Виртуальное перемещение. Виртуальная работа. Идеальные связи.

Опр

Виртуальное перемещение — это воображаемое беск. малое перемещение, допускаемое связями в данный момент времени t. (Оно не обладает длительностью и не зависит от заданных сил).

Вектор виртуального перемещения

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, t)$

Возьмём дифференциал от этого вектора при фикс. t:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

↑ вектор вирт. перемещ.

Символ δ действует, как обычный дифференциал - по отношению к обобщ. коорд но не ко времени.

Опр

Виртуальная работа — это работа силы на виртуальное перемещение.

$$\delta A = \vec{F}\,\delta\vec{r}$$

В частности, вирт. раб. сил реакции:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i$$

Опр

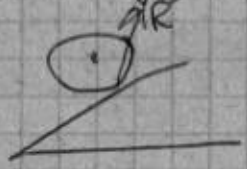
Идеальные связи — это связи, для которых вирт. раб. сил реакции равна 0.

Примеры

Гладкая поверхность

$$\vec{R} \perp \delta\vec{r}\,, \quad \delta A_R = \vec{R}\,\delta\vec{r} = 0$$

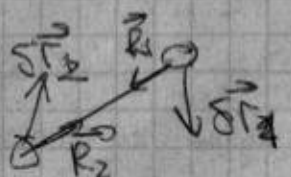
Качение без проскальзывания:



$\delta\vec{r} = 0$

$\delta A_R = 0$

Жесткий невесомый стержень



$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$ (3-й закон Ньютона)

$\delta A_R = \vec{R}_1 \delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \delta\vec{r}_2 =$

$= \vec{R}_1 \delta\vec{r}_1 - \vec{R}_1 \delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{R}_1 \delta\vec{r}$

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$

$\vec{R}_1 = \alpha\vec{r}$

$\delta A_R = \alpha \vec{r}\delta\vec{r} = \alpha r \delta r = \frac{\alpha}{2}\delta(r^2)$

$\delta A_R = \frac{\alpha}{2}\delta(\ell^2) = 0$

$\ell = \text{const}$

§20 Уравнения Лагранжа. Обобщённые силы.

Δ Систему с идеальными голономными связи.

$m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell = \vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell \quad (\ell = 1, \dots, N)$.

S: $q_1, q_2, \dots, q_s$

$\vec{r}_\ell = \vec{r}_\ell(q_1, \dots, q_s, t)$

$\delta\vec{r}_\ell = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \delta q_j$

$\delta A_R = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{R}_\ell \delta\vec{r}_\ell = 0$

Исключим силу реакции: для этого

Первое скал. $\cdot\, \delta\vec{r}_\ell$ и просуммируем по всем точкам.

$$\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell \delta\vec{r}_\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \cdot \delta\vec{r}_\ell \qquad \left(\sum_{\ell=1}^{N} R_\ell \cdot \delta\vec{r}_\ell = 0 \text{ из идеальности}\right)$$

— это уравнение Даламбера - Лагранжа.

Теперь выведем отсюда систему уравнений, в которой число уравнений равно числу степеней свободы:

$$\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{S} \delta q_j \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} =$$

Обозначим $X_j = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}$

$$= \sum_{j=1}^{S} \delta q_j X_j \underset{\substack{\text{ур-е} \\ \text{ДЛ}}}{=} \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \cdot \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \cdot \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1} \delta q_j \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \cdot \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} =$$

Обозначим: $Q_j = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \cdot \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}$

$$= \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} (X_j - Q_j)\,\delta q_j = 0.$$

Из независимости обобщённых координат следует, что

$$\forall\, j \in \{1, \dots, s\} \qquad X_j = Q_j.$$

Покажем, что X_j можно выразить через кинетическую энергию системы. Хотим получить: $X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$;

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell v_\ell^2 = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec v_\ell \cdot \vec v_\ell$$

$$\vec r_\ell = \vec r_\ell(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec v_\ell = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_\ell}{\partial q_j}\,\dot q_j + \frac{\partial \vec r_\ell}{\partial t}$$

$$\vec v_\ell = \vec v_\ell(q, \dot q, t) \quad \left(= \vec v_\ell(q_1, \dots, q_s, \dot q_1, \dots, \dot q_s, t)\right)$$

$$K = K(q, \dot q, t).$$

92 Из выражения для $\vec v_\ell$ следует, что

$$\frac{\partial \vec{v}_\ell}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j};$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \cdot \vec{v}_\ell \cdot \frac{\partial \vec{v}_\ell}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{v}_\ell \cdot \frac{\partial \vec{v}_\ell}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{v}_\ell \cdot \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \dot{\vec{v}}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}}_{X_j} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} m_\ell \vec{v}_\ell \frac{\partial \vec{v}_\ell}{\partial q_j}}_{\frac{\partial K}{\partial q_j}}$$

$$\Rightarrow X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

Уравнение Лагранжа относительно кинетической энергии K

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j, \quad Q_j = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}$$

Обобщённые силы:

Опр

Обобщённой силой называется $Q_j = \sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j}$.

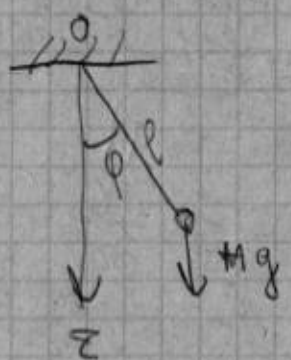
Размерность: $[Q] = \frac{\text{Дж}}{\underbrace{[q]}}$ ← размерность обобщённых коорд.

Если $[q] = м$, то $[Q] = Н$.

Если $[q] = 1$ то $[Q] = Н \cdot м$ (момент силы).

(угол в радианах, напр)

Пример - маятник



$S = 1$

$q = \varphi, \ \dot{q} = \dot{\varphi}$

$Q = m\vec{g} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = mg \frac{\partial z}{\partial \varphi} \ominus$

$z = l\cos\varphi, \ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -l\sin\varphi$

$\ominus \ -mgl\sin\varphi$ (этот момент силы).

$K = \frac{mv^2}{2}, \ v = l\dot{\varphi}$

$$K = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot{\varphi}\right) = Q$$

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi \quad \text{(ур-е колебания)}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0}.$$

ЛЕКЦИЯ 10: (07.11.2014)

§ 21 Функция Лагранжа

Обобщённые силы

Рассм. ~~сис~~ с-му с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами.

$$\vec{F}_e = -\operatorname{grad}\Pi_e = -\left(\vec{i}\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} + \vec{j}\frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} + \vec{k}\frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e}\right)$$

$$Q_j = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\vec{F}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial y_\ell}\frac{\partial y_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial z_\ell}\frac{\partial z_\ell}{\partial q_j}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \Pi_\ell}{\partial q_j};$$

$$\Pi_\ell = \Pi_\ell(q_1, q_2, \dots, q_s, t);$$

$$Q_j = -\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial \Pi_\ell}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{\ell=1}^{N} \Pi_\ell \Leftrightarrow$$

$$\Pi = \sum_{\ell=1}^{N} \Pi_\ell$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j};$$

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}};$$

$$\Pi = \Pi(q, t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (\text{т.к. } \Pi \text{ не зависит от } \dot{q}_j).$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(K-\Pi) - \frac{\partial}{\partial q_j}(K-\Pi) = 0$$

Функция Лагранжа

Опр

– это разность кинетической и потенциальной энергии системы, выраженная через обобщённые координаты, обобщённые скорости и время.

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t);$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \qquad j = \overline{1, S}$$

(где S – число степ. свобод)

– уравнение в форме Лагранжа

Обобщённые импульсы

Опр

Обобщ. импульс – это частная произв. ф-и Лагранжа по обобщённой скорости.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$[p] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{[q]}$$

$[q] = M \Rightarrow [p] = [mV]$ – кол. импульс

$[q] = 1 \Rightarrow [p] = [mV \cdot r]$ – кол. момент импульса

Закон изменения обобщённого импульса

ур-е Лагранжа $\Rightarrow$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Пусть $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, тогда $\dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = const$

Такая обобщённая координата q_j называется циклической (координата, которая не входит явным образом в функцию Лагранжа). Тогда обобщ. импульс соотв. циклической координаты сохраняется.

§22 Уравнение Гамильтона. Канонические переменные

Рассм. систему с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами. Не теряя сост. с-мы будем характеризовать набором обобщ. координат и обобщенных импульсов. Этот набор называется **канонические переменные системы**.

q, p

Выведем уравнение движения таких систем.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Найдем дифференциал функции L:

$L = L(q, \dot{q}, t)$;

$$dL = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^{s} \left(\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Введём ф-цию $H = \sum_{j=1}^{s} p_j \cdot \dot{q}_j - L$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} \left(p_j \cdot d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j \right) - dL.$$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} \left(p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - p_j d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} \left(\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Теперь выразим ф-цию H через канонические переменные и время:

$$H = H(q, p, t)$$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Уравнения Гамильтона.

$$j = \overline{1,s}$$

Гамильтониан (ф-ция Гамильтона) — это функция, опр. формулой:

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = H(q, p, t);$$

$[H] = Дж.$

Зависимость Гамильтониана от времени:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\left(-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Полная пр-ная по времени равна 4П.

$\exists \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ - это консервативные системы

Опр

- это системы, для кот. Гамильтониан не зав. явным образом от времени.

$H = H(t,p) = const.$

? $H = E = K + \Pi = H(q,p)$?

Покажем, что Гамильтониан консервативной с-мы имеет смысл её полной мех. энергии.

$$H = \sum_{j=1}^{S} p_j \dot{q}_j - L$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j}}_{=0}$$

$\Pi = \Pi(q)$.

$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$

КМ

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i, \quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s)$$

~~$\vec{r}_i = \vec{r}$~~

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}}_{K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}(q)}$$

$$\| \quad K_{\beta\alpha}(q).$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta}\left(\dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_\beta \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

$\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{\beta j}$ → Символ Кронекера. ← $\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{\alpha j}$

$$P_j = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{S} K_{\alpha\beta}(\dot{q}_\alpha \delta_{\beta j} + \dot{q}_\beta \delta_{\alpha j})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{S} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{S} K_{\alpha\beta}\delta_{\beta j} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{S} \dot{q}_\beta \sum_{\alpha=1}^{S} K_{\alpha\beta}\delta_{\alpha j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{S} \dot{q}_\alpha K_{\alpha j} + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{S} \dot{q}_\beta K_{j\beta} =$$

$$= \boxed{\sum_{\alpha=1}^{S} K_{j\alpha}\dot{q}_\alpha = P_j}$$

$$H = \sum_{j=1}^{S} P_j \dot{q}_j - L = \underbrace{\sum_{j=1}^{S}\sum_{\alpha=1}^{S} K_{j\alpha}\dot{q}_\alpha \cdot \dot{q}_j}_{=2K} -$$

$$-L = 2K - L$$

$$H = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi.$$

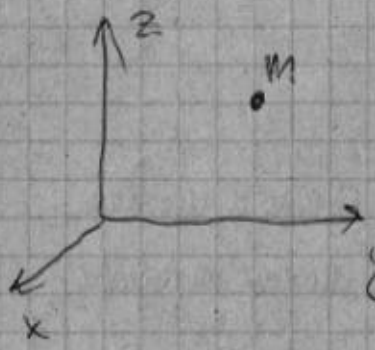
$$K + H = H(q,p)$$

Опр

Для консерв. с-м Гамильтониан - это полная мех. эн. с-мы, выраженная через

канонические переменные.

Пример: частица в потенциальном силовом поле.



$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z.$

$(S = 3)$

$K = \frac{mV^2}{2} =$

$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) =$

$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$p_y = m\dot{y}$

$p_z = m\dot{z}$

} обобщ. импульсы

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m} \end{cases}$

$K = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$

$\Pi = \Pi(x, y, z);$

$$H = K + \Pi = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \Pi(x, y, z)$$

§23 Равновесие системы и ее устойчивость

Опр

Равновесие – это состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться очень долго.

Условия равновесия

$$m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell = \vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell = 0 \quad \ell = \overline{1,n}$$

$$\boxed{\vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell = 0 \quad \ell = \overline{1,n}} \quad (1).$$

(Сумма сил, действ. на любую точку с-мы = 0).

Далее, рассм. с-му с идеальной связью.

$$\delta A_R = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{R}_\ell \cdot \delta\vec{r}_\ell = 0.$$

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \cdot \delta\vec{r}_\ell = 0} \quad (2)$$

(В сост. равновесия виртуальная работа заданных сил $=0$)

Далее, перейдем к обобщенным координатам:

$$\vec{r}_\ell = \vec{r}_\ell(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\delta\vec{r}_\ell = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{s} \delta q_j \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}}_{Q_j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3} Q_j \delta q_j = 0$$

Отсюда следует, что $\boxed{Q_j = 0 \quad \forall j = \overline{1,s};}$ (3)

Пример: равновесие стержня

$F = ?$

$s = 1, \; q = \alpha$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = m\vec{g} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \alpha} + \vec{F} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \alpha} =$$

$$= -mg \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} - F \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}$$

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos\alpha, \quad x_2 = l\sin\alpha$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} = -\frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} = l\cos\alpha$$

$$Q = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Fl\cos\alpha = 0$$

$$F = \frac{1}{2} mg\,tg\alpha$$

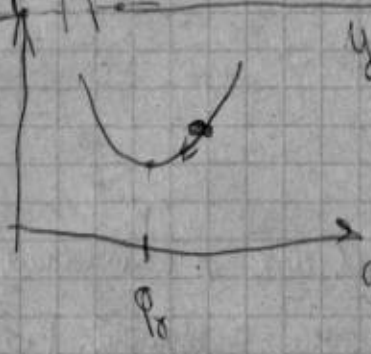
Отв

Равновесие устойчиво, если система, выведенная из этого сост. и предоставленная самой себе, начинает движение в сторону положения равновесия. В противном случае, равновесие неустойчиво.

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$

108 (4) $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$

КМ



устойчивое

не устойчивое

Пример

не устойчивое

ЛЕКЦИЯ 11: (14.11.2014)

§ 24 Колебания в системах с одной степенью свободы

Опр

Колебание – это повторяющееся движение в окрестности положения устойчивого равновесия системы.

Математически колебания описываются функ. ур-ем, которое наз-ся ур-ем гармоник

колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

x - координата, которая отсчитывается от положения равновесия системы. ω - частота колебаний, $[\omega] = c^{-1}$.

Общее решение:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$,

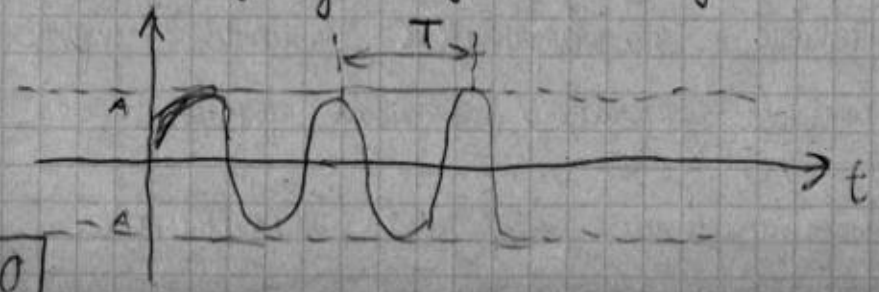
t - время, A - амплитуда, φ - начальная фаза.

$\Phi = \omega t + \varphi$ - фаза колебаний

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Опр

Гармонической наз-ют функцию, которая меняется по закону синуса или косинуса.



КМ

T – период колебаний.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Амплитуда и фаза колебаний зависят от начальных усл., т.е. от ~~коорд.~~ коорд. и произв. коорд. по времени в нач. момент времени.

$$x(t=0) = x_0;$$
$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\cos(\varphi); \\ \dot{x}_0 &= -A\omega\sin(\varphi); \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{x_0^2 + (\dot{x}_0)^2}{\omega^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{x_0^2 + (\dot{x}_0)^2}{\omega^2}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x_0}{A};$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{\dot{x}_0}{A\omega};$$

Метод определения частот:

1. Написать уравнение дв-я системы

2. Привести это ур-е к стандартному виду.

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Пример 1: физический маятник.

$s = 1$, C – центр масс

$\varphi, \dot{\varphi}$

$$K = \frac{J\omega^2}{2} = J\frac{(\dot{\varphi})^2}{2}$$

$$\Pi = -mgl\cos\varphi$$

$$L = K - \Pi = J\frac{(\dot{\varphi})^2}{2} + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) = J\ddot{\varphi}$$

$$J\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

КМ

Рассмотрим малые колебания.

$\sin\varphi \approx \varphi$:

$$J\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0$$

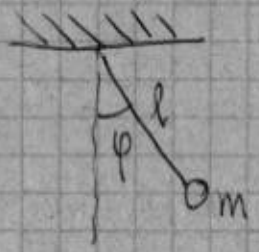
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}}$$

m - полная масса маятника, g - ус-е своб. падения,

l - расстояние от оси вращения до центра масс.

J - момент инерции маятника отн. оси вращения.

Математический маятник (Пример 2)



- част. случай Пр. 1.

$$J = ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ - ф-ла Гюйгенса.

Пример 3: обруч (част. сл. Пр. 1)

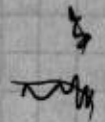
$l = r$

$J_C = mr^2$

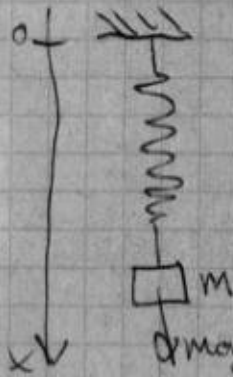
$= 2mr^2$, $J = J_C + mr^2$ т. Гюйгенса-Штейнера

$$w = \sqrt{\frac{mgr}{2mr^2}} = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$$



Пример 4: пружинный осциллятор



$$m\ddot{x} = mg - K(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + K(x - l_0) - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + K\underbrace{\left(x - l_0 - \frac{mg}{K}\right)}_{y} = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + Ky = 0$$

$$\ddot{y} + w^2 y = 0, \text{ где } w = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

§25 Физические эффекты в колебательных системах.

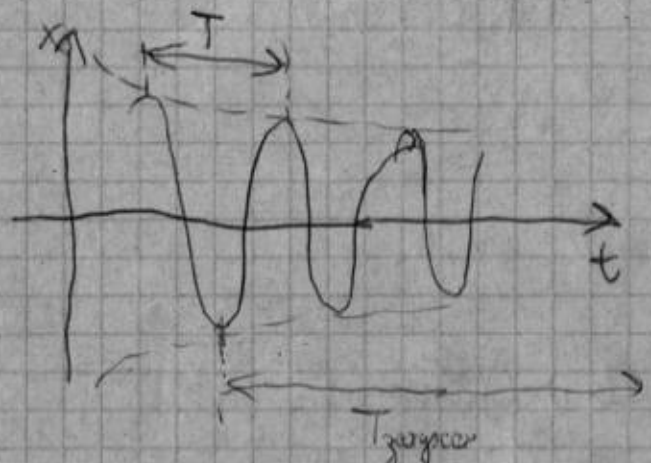
1) Гармонические колебания

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

2) Затухающие колебания

КМ

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$$



Опр

Добротность: $Q = \frac{T_{затух}}{T}$

(3) Вынужденные колебания

Опр

– это колебания, происходящие под действием периодически изм. внеш. силы.

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t).$$

ф-ла Эйлера $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) =$

$= \frac{1}{2}e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}$ + к.с. (комплексно сопряжённое)

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

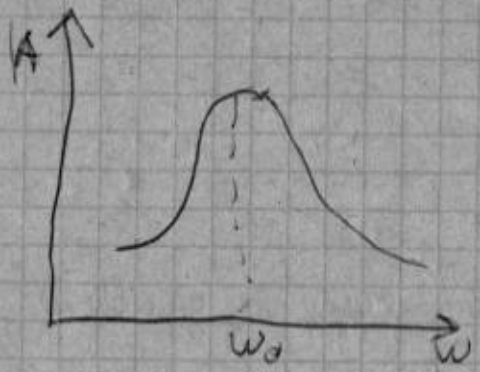
$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} A i\omega e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2} A \omega^2 e^{i\omega t} + \text{к.с.}$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha) = f_0$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\alpha}$$



Отр

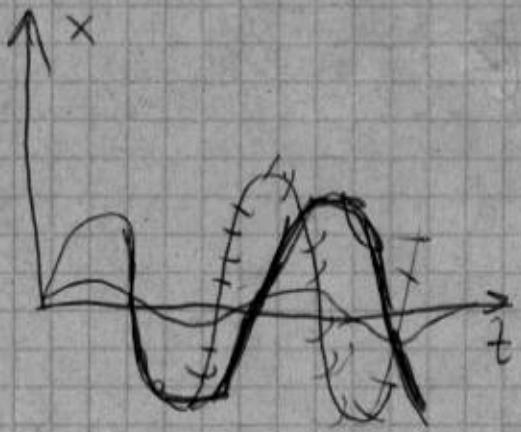
Резонанс - это явление возр. амплитуды колебаний при совпадении частоты внешней силы с соб. част. системы.

(4) Нелинейные колебания

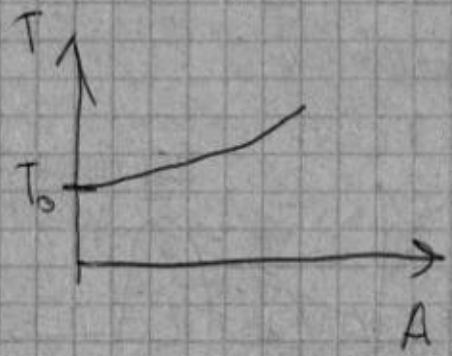
$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

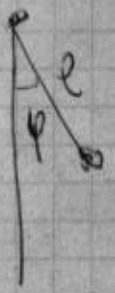
$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin x = 0$$

В этом случае период колебаний начинает зависеть от амплитуды.



$$T = T(A).$$





$$E = K + \Pi = \text{const}$$

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{m l^2 (\dot\varphi)^2}{2}$$

$$\frac{m l^2 \dot\varphi^2}{2} - mgl\cos\varphi = E = \text{const}.$$

$$\dot\varphi^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\varphi$$

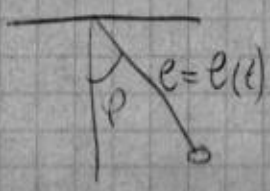
$$\dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{g}{l}\cos\varphi}$$

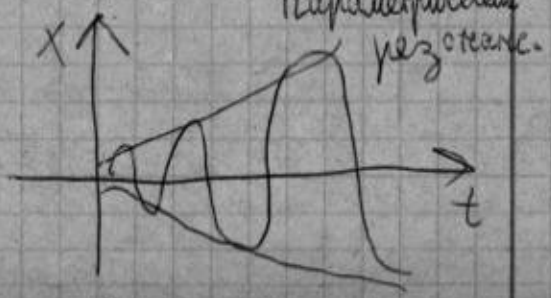
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\quad}} = dt$$

$$\int(\quad) = \int(\quad)$$

(5) Параметрические колебания

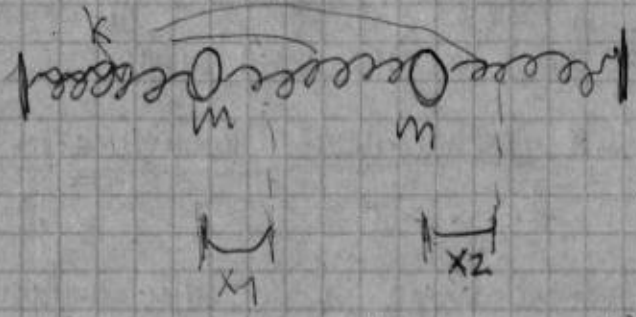
$$\ddot x + \omega^2(t)\, x = 0$$





§26 Нормальные колебания и нормальные координаты

Рассм. систему с 2-мя степенями свободы:



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \quad (1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \quad (2) \end{cases}$$

Видно, что ур-я колебания оказались связанными

$(1)+(2)$: $m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$

$(2)-(1)$: $m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$.

$Q_1 = x_1 + x_2$

$Q_2 = x_2 - x_1$

~~$\theta_1 = x_1 + x_2$~~ ,

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0 \quad , \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0 \quad , \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

⇒ 1. Сущ. лин. ком. θ_1, θ_2 координат, для кот. ур-я координат не зависим. Эти комбинации носят названия нормальные координаты

Опр

Нормальными наз-ся коорд., кот. при любых об-ях с-мы меняются независимо друг от друга.

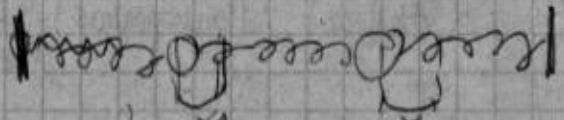
2. Каждая норм. коорд. меняется на своей соб. частоте.

Эти частоты наз-ся собственными частотами.

3. Сущ. режимы нормальные колебания, при которых координаты всех точек с-мы совершают гарм. колебания на одной из соб.

частот с-мы., Такие режимы наз. нормальными колеб.
(Такие колебания возн., если отлична от 0 только одна норм. координата с-мы)

Пример. норм. кол.



$$\theta_2(0) = x_2(0) - x_1(0) = 0$$

$$\dot\theta_2(0) = \dot x_2(0) - \dot x_1(0) = 0.$$

$$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) \\ \dot x_1(0) = \dot x_2(0) \end{cases}$$

$$\theta_1(0) = 0$$

$$\dot\theta_1(0) = 0$$

$$x_1(0) = -x_2(0)$$

...

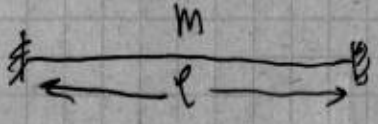
ЛЕКЦИЯ 12: (21.11.2014)

→

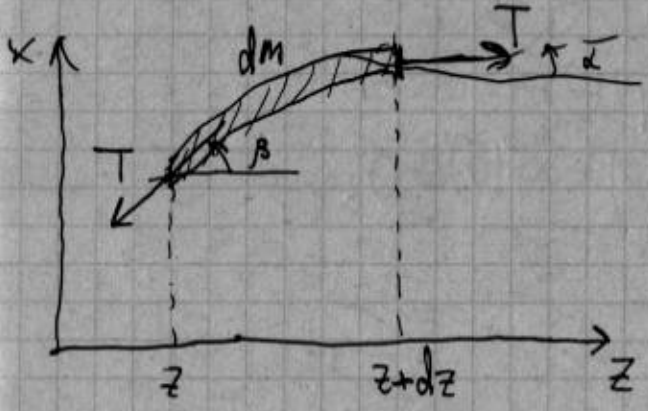
§27 Механика волновых процессов

Опр

Волна – это колебания, распр. в сплошной среде



(струна) (однородная).



z – координата вдоль струны, x – поперечная

$[T] = H$.

$\rho := \frac{m}{\ell}$

$[\rho] = \frac{кг}{м}$.

ρ – линейная плотность.

$dm = \rho dz$

$$dm \frac{\partial^2 x}{\partial t} = T\sin\alpha - T\sin\beta \approx$$

$\alpha, \beta \ll 1 \Rightarrow \sin\alpha \approx tg\alpha, \sin\beta \approx tg\beta$.

122] $\approx T(tg\beta - tg\alpha) = T\left(\frac{\partial x}{\partial z}\Big|_{z+dz} - \frac{\partial x}{\partial z}\Big|_{z}\right) =$

$$= T \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \cdot dz = \rho dz \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

$$\frac{T}{\rho} = V^2$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}$$ Волновое уравнение.

Решение:

$$X(z,t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt);$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -V \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}$$

Бегущие волны

$z - vt = \text{const}$.

$\frac{dz}{dt} = V$ – скорость распространения волны.

$f_1 \rightarrow z$ $\quad V \leftarrow f_2 \rightarrow z$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Стоячие волны

Опр

– это волны, которые ~~они~~ описываются произведением ф-и времени на ф-ю координат.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

$$X(z,t) = Z_1(x) \cdot \Theta(t).$$

$$Z_1 \cdot \ddot{\Theta} = v^2 \Theta \, Z_1''$$ ← пр-я по коорд.

разделим переменные:

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = v^2 \frac{Z_1''}{Z_1} = \text{const}. \quad [c^{-2}]$$

Так как св-е струны ограничено, константа может быть только отрицательной.

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = -\omega^2$$

ω – частота $[c^{-1}]$

$$\ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$$

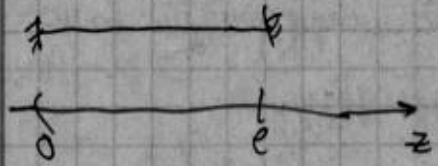
$$Z_1'' + k^2 Z_1 = 0.$$

Найдем частное решение в виде:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$$

$$Z_1(z) = Z_0 \cdot \sin(kz) \quad ;$$

Чтобы найти частоту колебания учтём граничные условия:



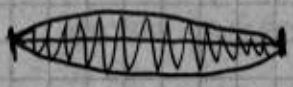
$$Z_1(0) = Z_1(\ell) = 0.$$

$$k\ell = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k_n = n\frac{\pi}{\ell} - \text{волновое число } [м^{-1}].$$

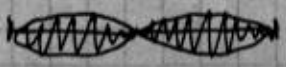
Отсюда следует, что частоты колебаний струны могут быть следующими:

$$\omega_n = k_n \cdot V = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot n \cdot \frac{\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, \ldots$$



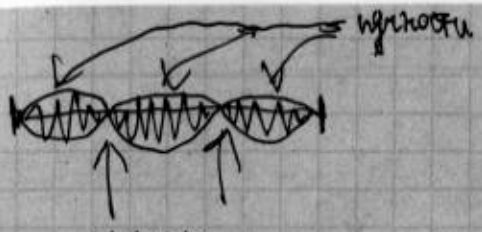
$n = 1, \omega = \omega_1$

основной тон.



$n = 2, \omega = \omega_2$

обертон



$n = 3$, $\omega = \omega_3$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\,\frac{\pi}{l}$$

Замечание:

Узлы стоячей волны образуются за счёт интерференции волн бегущихся в струне навстречу друг другу.

§28 Случайные величины и вероятности

Рассм. с-мы, сост. из большого числа частиц. Для таких систем трудно написать закон движения, поэтому мы будем описывать их через вероятное состояние системы.

Опр

Случайное событие – это событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторять.

Опр

126 Вер-ть сл. соб. – это отношение числа появлений

КМ

события в серии испытаний к полному числу испытаний, когда число испытаний стремится к бесконечности.

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$$

$$0 \le P \le 1$$

$P = 1$ – достоверное событие

$P = 0$ – недостоверное событие.

Аксиома сложения вероятностей:

Вер-ть наступления одного из взаимоисключающих событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Аксиома умножения вер.:

Вер-ть наступления независимых случайных событий равна произв. их вер-тей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Случайная величина:

– эта величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многокр. повт.

Опр.

Распределение плотности вероятности — это отношение вер. попадания случайной величины в маленький интервал вблизи заданного значения к длине интервала, когда интервал $\to 0$.

x — сл.в. , x_0 .

$$W(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x)}{\Delta x} ;$$

$W \geq 0$, $[W] = \frac{1}{[x]}$.

(размерность)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = 1$$

Правило вычисления средних:

$f(x)$, x — сл.в.

$\langle f(x) \rangle \equiv \overline{f(x)}$ (среднее значение)

$$\overline{f(x)} = \int f(x) W(x)\,dx$$

Среднее значение сл.в.: (мат. ожид.).

$$\overline{x} = \int x W(x)\,dx$$

КМ

Опр

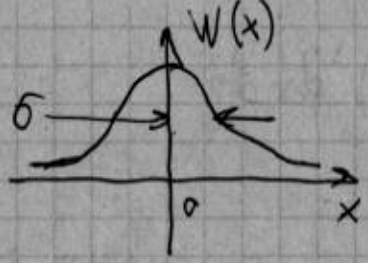
Дисперсия – средний квадрат отклонения от среднего

$$\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \int (x-\bar{x})^2 W(x)\,dx.$$

Распределение Гаусса

$$W(x) = C e^{-\alpha x^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$



Многомерное распределение вероятности

Опр

Многомер. плотность вер-ти – это отношение вер-ти попадания нескольких сл.в. в малые интервалы вблизи заданных зн-ий к произведению длин интервалов, когда все интервалы стремятся к 0.

X, Y – сл. в. $\quad X_0, Y_0$ – заданные зн-я

$$W(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{x_0 \le x \le x_0 + \Delta x,\ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$W(x,y) \geq 0, \quad [W] = \frac{1}{[xy]}$.

Нормировка:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Вычисление средних:

$f(x,y)$;

$$\overline{f(x,y)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,W(x,y)\,dx\,dy$$

Правило понижения порядка

$$W_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x,y)\,dy;$$

$$W_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x,y)\,dx;$$

Независимые величины:

$$W(x,y) = W_1(x) \cdot W_2(y)$$

§29 Распределение Гиббса

КМ

Основной з-н статистической механики равновесных систем:

В состоянии термодин. равновесия распределение плотности вер. для различ. сост. с-мы описывается ф-лой Гиббса:

$$W(z) = C \cdot \exp\left(-H(z)/kT\right)$$

z – [illegible] $q, p = q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$.

C – константа.

H – гамильтониан с-мы.

Для консервативн. с-м: $H = K + \Pi$.

(будем Δ исс)

k – постоянная Больцмана

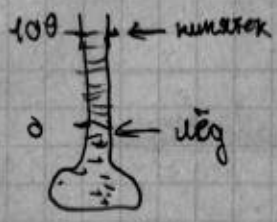
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$, $[k] = \frac{Дж}{град.}$

T – абсолютная температура с-мы.

Опр

Температура – Это то, что измеряется термометром.

Термометр:



Опр Градус Цельсия – это одна сотая часть интервала между темпр. плавления льда и температурой кипения воды при нормальном давлении.

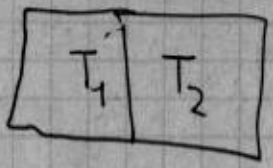
Абсолютная температура:

$$T = t + 273 \quad [\text{Кельвин}]$$

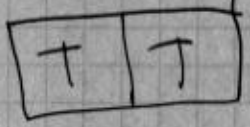
↖ темп. Цельсия.

Опр

Равновесие – это состояние, в котором с-ма предоставленная самой себе может находиться сколь угодно долго.



$T_1 \neq T_2$ неравновесное.



равновесное.

Лекция 13: (28.11.2014)

Следствия распределения Гиббса:

1. Распределение молекул по скоростям

$W(V_x, V_y, V_z) =$

$$= C e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2(kT)}}$$

распределение Максвелла.

$$W(v_x) = Ce^{-mv_x^2/2kT}$$

$$W(v_x) = C \cdot e^{-v_x^2/v_0^2}$$

$$v_0^2 := 2kT/m ;$$

Найдем дисперсию тепловой скорости:

$\overline{v_x^2}$ – дисперсия тепловой скорости молекул.

$$-\infty < v_x, v_y, v_z < +\infty$$

Нормировка

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(v_x)\, dv_x = 1 ;$$

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\, W(v_x)\, dv_x =$$

$$= C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-v_x^2/v_0^2}\, dv_x$$

интегр. по частям :

$$\frac{dW(v_x)}{dv_x} = \frac{1}{dv_x} C \cdot e^{-v_x^2/v_0^2} = C \cdot e^{-v_x^2/v_0^2} \left(-\frac{1}{v_x^2}\right) 2v_x$$

$$v_x C e^{-v_x^2/v_0^2} = -\frac{v_0^2}{2} \frac{dW(v_x)}{dv_x}$$

$$\overline{v_x^2} = -\frac{v_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \, dW(v_x) =$$

$$= \underbrace{-\frac{v_0^2}{2} \left(v_x W(v_x)\right) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{v_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W(v_x) dv_x}_{=1} =$$

$$= \frac{v_0^2}{2}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{2kT}{m} = \frac{kT}{m}.$$

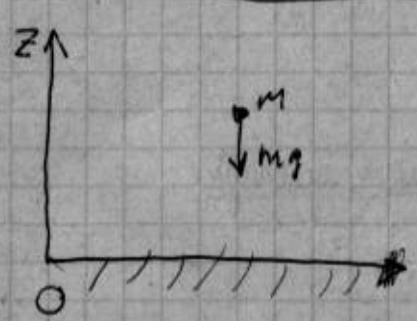
$$\boxed{\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}}$$

2. Распред. частиц во внеш. силовом поле:

$$W(z) = C \cdot e^{-\Pi(z)/kT}$$

распределение Больцмана.

134 Пример: однородное поле тяготения:



$\Pi(z) = mgz.$

$W(z) = C \cdot e^{-mgz/kT}$

$W(z) = C\, e^{-z/z_0},$

$z_0 := \frac{kT}{mg}$

$0 \le z < \infty$

Нормировка:

$$\int_0^\infty W(z)\,dz = 1.$$

Средняя высота частицы в поле тяготения:

$$\overline{z} = \int_0^\infty z \cdot W(z)\,dz$$

$$\overline{z} = \int_0^\infty z \cdot C\, e^{-z/z_0} dz = C \cdot \int_0^\infty z \left(-z_0 e^{-z/z_0}\right)' =$$

$$= -C \cdot z_0 \int_0^\infty z \left(e^{-z/z_0}\right)' = -C z_0 \left(\underbrace{z e^{-z/z_0}\Big|_0^\infty}_{=0} - \right.$$

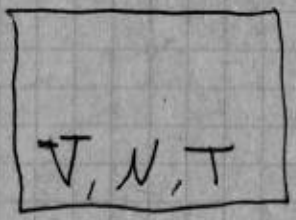
$$\left. - \int_0^\infty e^{-z/z_0}\,dz \right) = C z_0 \int_0^\infty e^{-z/z_0} dz =$$

$$= z_0 \int_0^\infty C \cdot e^{-z/z_0} dz = z_0$$

$\bar{z} = \frac{kT}{mg}$

§30 Размер и масса молекул

Найдём давление газа в сосуде:



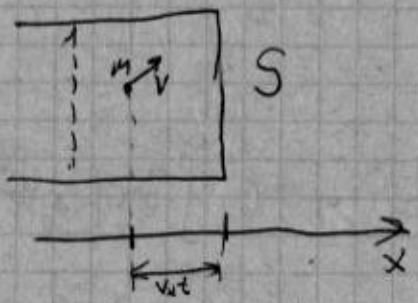
V – объём сосуда, $[V] = м^3$

N – число молекул $[N] = 1$

T – абс. темп. $[T] =$ комбин.

$n = \frac{N}{V}$ – концентр. мол. $[n] = \frac{1}{м^3}$;

$p = \frac{F}{S}$ – давление, $[p] = \frac{Н}{м^2} = Па$;



Найдем сначала элементарное давление газа, созд. молекулами с определенной ск. $\in (v_x, v_x + dv_x)$

$$dp(v_x) = \frac{1}{S \cdot t} \underbrace{2mv_x}_{\text{изм. импул.}} \overbrace{\underbrace{v_x \cdot t \cdot S}_{\text{объем части}} \cdot n \cdot w(v_x)}^{\text{число мол. с такой ск.}} \cdot dv_x.$$

число всех молекул в этой части

$$dp(v_x) = 2n \cdot m v_x^2 \, w(v_x) dv_x$$

Полное давл. это сумма элем. давлений.

$$p = \int dp = 2nm \int_0^\infty v_x^2 w(v_x) dv_x \quad (=)$$

(Берем от 0 до ∞ т.к. ударяются только летящие "вправо" молекулы).

$$(=) \; n \cdot m \cdot \overline{v_x^2} = n \cdot m \cdot \frac{kT}{m} = nkT;$$

$\boxed{p = nkT}$ – уравнение состояния идеального газа.

p - давл. [Па]

n - концентр. $\left[\frac{1}{м^3}\right]$

T - абс. темп. [К].

Газ при нормальных условиях

$p = 10^5$ Па $= p_0$

$T = 273$ К $= T_0$.

$p = nkT$, $n = n_0 = \frac{p_0}{kT_0}$ – нормальная концентр.

Для измерения молекулярных параметров нужно знать постоянную Больцмана.

Измерение постоянной Больцмана (Опыт Перрена):

$$\overline{z} = \frac{kT}{mg} \quad \text{(из пред. параграфа)}$$

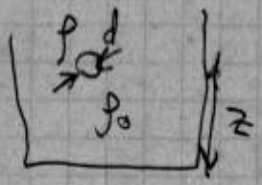
Перрен взял шарики из акварельной краски с диаметром $d = 0{,}4$ мкм., (мкм $= 10^{-6}$ м).

$$m = \rho V, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$V = \frac{\pi d^3}{6}.$$

С учетом силы Архимеда:

$$\overline{z} = \frac{6kT}{g(\rho - \rho_0)\pi d^3}$$



$\rho = 1.2 \cdot 10^3$ кг/м^3

$\rho_0 = 10^3$ кг/м^3

$g = 10 \frac{м}{с^2}$, $T = 300$ k

КМ

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/...

$\overline{\varepsilon} = 60$ мкм

Оценим массу молекулы воздуха:

$n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ — число Лошмидта.

Плотность воздуха при норм. усл.:

$$p_0 = \frac{m}{V} = \frac{N m_0}{V} = n_0 m_0$$

$$m_0 = \frac{p_0}{n_0} = 0{,}5\, 10^{-25} \text{ кг}.$$

Размер молекулы воздуха:

его можно вычислить через плотность жидкости.

$$\rho_ж = 10^3 \frac{кг}{м} = \frac{m_0}{d^3}$$

m_0 d — диаметр. $d = \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho_ж}} \approx 3{,}5 \underbrace{10^{-10}}_{Å}$ м.

Средняя тепловая скорость молекул:

$$\overline{v} = \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m_0}} = 300 \text{ м/с}$$

Средние расстояния между молекулами:

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{N}{Ne^3} = \frac{1}{e^3}$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} \approx 3 \cdot 10^{-9}\ м$$

Время свободного пробега:

$$\tau = 10^{-9}\ с$$

Факты, подтв. распр-е Гиббса:

① Свойства газов

$p = nkT, n = \frac{N}{V}$;

$pV = NkT$

$\frac{pV}{T} = Nk = const.$

② Распр-е воздуха в атмосфере Земли

$W(z) = Ce^{-z/z_0}$, $z_0 = \frac{kT}{mg}$;

...

ЛЕКЦИЯ 14 (05.12.2014)

§31 Распределение энергии по степеням свободы.

КМ

Закон о равном распределении энергии по степеням свободы:

В состоянии термодин. равновесия на каждую квадратичную степ. своб. в среднем приходится одинаковая энергия:

$$E = \frac{kT}{2}, \quad k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{гр}$$

T – абс. темп., $T = t + 273$.

Квадр. степ. своб. – это переменная, вклад которой в Гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной

$$H(t) = a z_1^2 + h(z')$$

z' – оставшиеся z (кроме z_1).

а не зав. от z_1, но может быть фи-ей от z'.

Докажем эту теорему:

$$E = \overline{a z_1^2} = \int a z_1^2 \, w(z) \, dz, \text{ где}$$

$$w(z) = C e^{-H(z)/kT} \quad \text{– распределение Гиббса}$$

$$w(z) = C e^{-az_1/kT} \cdot e^{-h(z)/kT}$$ (плотность вероятности)

подставим это в интеграл:

$$E = C \int dz' e^{-h(z')/kT} \int dz_1 \, a z_1^2 \, e^{-\frac{a z_1^2}{kT}}$$

$$J = \int dz_1 \, a z_1^2 \, e^{-\frac{a z_1^2}{kT}} \quad dz_1$$

$$\frac{d}{dz_1} e^{-a z_1^2/kT} = e^{-a z_1^2/kT} \left(-\frac{a}{kT}\right) 2 z_1$$

$$a z_1 e^{-a z_1^2/kT} = -\frac{kT}{2} \frac{d}{dz_1} e^{-a z_1^2/kT}$$

$$J = -\frac{kT}{2} \int z_1 \frac{d}{dz_1} e^{-a z_1^2/kT} \, dz_1 =$$

$$= -\frac{kT}{2} \left(z_1 e^{-a z_1^2/kT} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int e^{-a z_1^2/kT} dz_1 \right)$$

$$J = \frac{kT}{2} \int e^{-a z_1^2/kT} dz_1$$

$$E = \frac{kT}{2} C \int e^{-h(z')/kT - a z_1^2/kT} \, dz =$$

$$= \frac{kT}{2} \int w(z) \, dz = \frac{kT}{2}.$$

КМ

Теорема доказана.

Пример: внутренняя энергия идеального газа

Опр

внутр. энерг. – это среднее значение Гамильтониана системы.

$U = \overline{H}$

Для ид. газа:

$U = \overline{H} = NR$ (=)

↑ число молекул ← кин энергия.

s – число степеней своб. идеального газа.

(=) $N \cdot s \cdot \frac{kT}{2}$

Теплоёмкость газа при постоянном объёме.

$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = Ns \cdot \frac{k}{2}$

Пусть число молекул – один моль

$N = N_A$, $N_A k = R$ – универсальная газовая постоянная. $R = 8{,}3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{гр}}$

$$C_V = s \cdot \frac{R}{2} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

$$s = \frac{2}{R} \cdot \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right).$$

Опыт: He $s = 3$

H_2 $s = 5$

воздух $s = 5$

§32 Диффузия и теплопроводность

Опр

Диффузия – это проникновение одного вещества в другое.

Опытным путём найден:

Закон диффузии

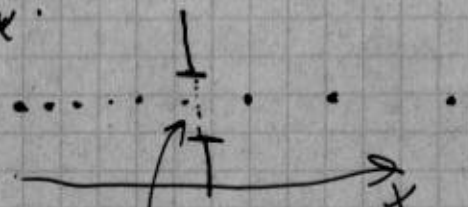
Плотность потока частиц пропорциональна градиенту их плотности.

1144] $n = \frac{N}{V}$ $[м^{-3}]$ $n = n(x)$.

$$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

j_x — плотность потока частиц. $\frac{\partial n}{\partial x}$ — Градиент концентрации.

j_x:



площадка, площадью S.

$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \cdot \Delta t}$$

ΔN_x ← число мол., прошедших через площадку.

$$[j_x] = \frac{1}{м^2 \cdot с}$$

Опр

D — коэффициент диффузии.

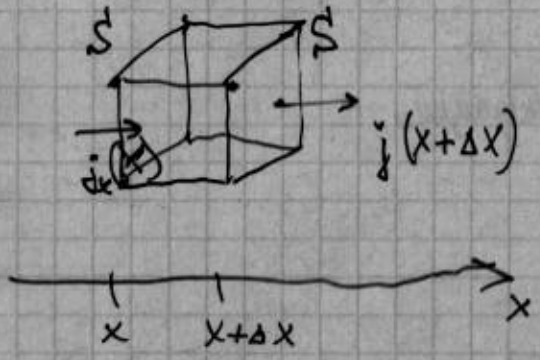
— это коэфф. пропорц-ти между плотностью потока частиц и градиентом плотности.

$$[D] = \frac{[j] \cdot [x]}{[n]} = \frac{1 \cdot м^3 \cdot м}{м^2 \cdot с} = \frac{м^2}{с}.$$

Комментарий:

По своему физ. смыслу D это коэфф. распространения диффузионного пятна.

Уравнение сохранения числа частиц:



$\Delta N^{(+)} = S \cdot \Delta t \cdot j_x(x)$ – входят

$\Delta N^{(-)} = S \cdot \Delta t \; j_x(x+\Delta x)$ – выходят.

$\Delta N = \Delta N^{(+)} - \Delta N^{(-)}$ – возрастание числа частиц.

$= S \cdot \Delta t \left(j_x(x) - j_x(x+\Delta x) \right) =$

← разл. в ряд Тейлора

$\underset{\Delta x \to 0}{=} S \cdot \Delta t \left(j_x(x) - j_x(x) - \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta x \right) =$

$= - S \cdot \Delta t \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} = - \Delta V \cdot \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x} = \Delta N.$

ΔV

КМ

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = -\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$\Delta t \to 0$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}}$$

ур-е сохранения числа частиц в диффер. форме (уравнение непрерывности)

$$j_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}}$$ – уравнение диффузии.

Теплопроводность

– это перенос тепла в неоднородно нагретом теле.

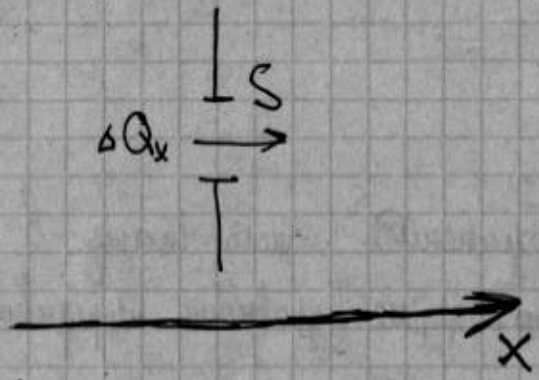
Закон теплопроводности (был найден опытным путём)

плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры

$$\underbrace{j_x}_{\text{плотность потока тепла}} = -\underbrace{\varkappa}_{\text{коэффициент теплопр.}} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{\text{градиент температуры}}$$

Коэф. теплопр. – это коэффициент пропорциональности между ...

$T = T(x)$

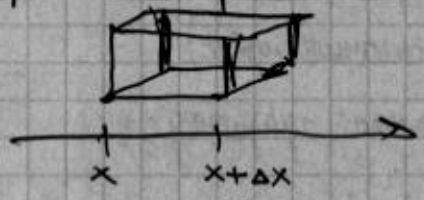


$[S] = м^2$, $[\Delta Q] = Дж$, $j_x = \frac{\Delta Q_x}{S \Delta t}$

$[j_x] = \frac{Вт}{м^2}$

$[\varkappa] = \frac{Вт}{м \cdot град.}$

Уравнение сохранения энергии.



$\Delta Q^{(+)} = S \cdot \Delta t \cdot j_x(x)$ – входит

$\Delta Q^{(-)} = S \cdot \Delta t \cdot j_x(x + \Delta x)$ – выходит

$$\Delta Q = \Delta Q^{(+)} - \Delta Q^{(-)} = S \cdot \Delta t \left(j_x(x) - j_x(x+\Delta x) \right) \underset{\text{ряд Тейлора}}{\approx} S \cdot \Delta t \left(j_x(x) - j_x(x) - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \right) =$$

$$= -S \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot \Delta x = \Delta Q$$

$$S \cdot \Delta x = \Delta V$$

$$\Delta Q = C \rho \Delta V \cdot \Delta T$$

$$C \rho \cdot \Delta T = -\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$/\Delta t, \quad \Delta t \to 0:$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{C\rho} \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

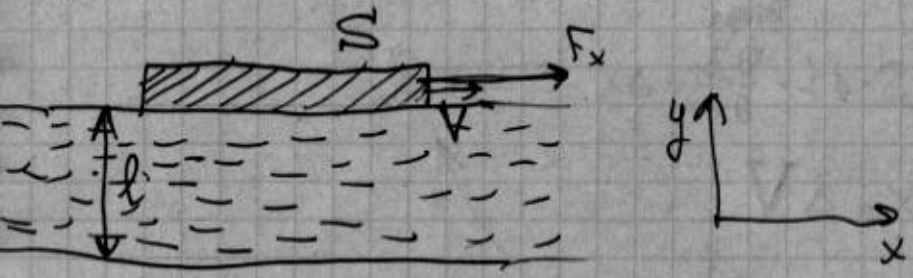
$$j_x = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{C\rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$ — уравнение теплопроводности.

$$\frac{\varkappa}{C\rho} := \varkappa \chi \quad \left[\frac{\cdots}{\cdots} \right]$$

§ 33 Вязкость жидкости

– это св-во жидкости препятствовать дв-ю соприкасающимся с ней тел.



Закон вязкости

Опытным путём установлено, что

$$F_x \sim V \frac{S}{l}$$

$$F_x = \eta \cdot V \cdot \frac{S}{l}, \quad \eta \text{ – коэффициент вязкости.}$$

Опр

Сдвиговое напряжение: – это отношение силы, действующей по касательной к пов-ти, к площади этой пов-ти.

$$\frac{F_\parallel}{S} \qquad \left[\frac{Н}{м^2}\right] = Па.$$

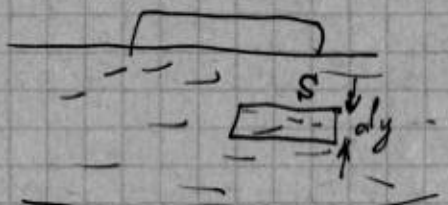
Сдвиговая скорость – это производная скорости потока жидкости по координате, перпендикулярной направлению потока.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V}{\ell}$$

$$\boxed{\frac{F_x}{S} = \eta \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

~~Напр.~~ Сдвиговое напряжение пропорционально сдвиговой скорости.

Ур-е движ вязкой жидкости



$dm = \rho dV$, $dV = S dy$;

$$dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = F(y+dy) - F(y)$$

$dy \to 0$

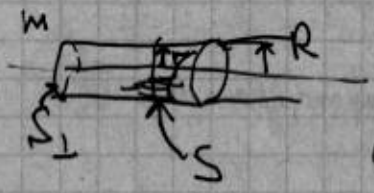
$$dm \frac{\partial v_x}{\partial t} = F(y) + \frac{\partial F}{\partial y} dy - F(y) = \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$\rho S\, dy \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$F = \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};}$$

Профиль скорости жидкости



Δp – разность давления.

$S_\perp = \pi r^2$

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}$$

$\Delta p \cdot \pi r^2$ — сила

$S = 2\pi r \cdot l$

$$\frac{\Delta p\, \pi r^2}{2\pi r l} = -\eta \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{2l\eta} \cdot r$$

КМ

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\ell\eta} r \cdot dr$$

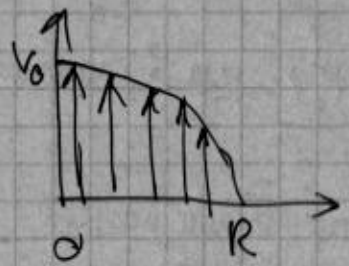
$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_{0}^{r} -\frac{\Delta p}{2\ell\eta} r\,dr$$

$$V(r) - V_0 = -\frac{\Delta p}{2\ell\eta} \frac{r^2}{2}$$

$$V(r) = V_0 - \frac{\Delta p}{4\ell\eta} r^2.$$

$$V_0 = \frac{\Delta p}{4\ell\eta} R^2.$$

$$V(r) = \frac{\Delta p}{4\ell\eta} (R^2 - r^2);$$



профиль скорости
Распределение Пуа...

$$dv = V(r) \cdot t\, 2\pi r\, dr$$

$$V = \int dv = 2\pi t \int_0^R V(r) \cdot r\, dr =$$

$$\frac{V}{t} = 2\pi \frac{\Delta p}{4\ell\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r\,dr =$$

$$= 2\pi \frac{\Delta p}{4\ell\eta} \cdot \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

$$\boxed{\frac{V}{t} = \frac{\pi \Delta p}{8\ell\eta} R^4}$$

Лекция 15: (12.12.2014)

§ 34 Тензор инерции твёрдого тела. Главные оси инерции.

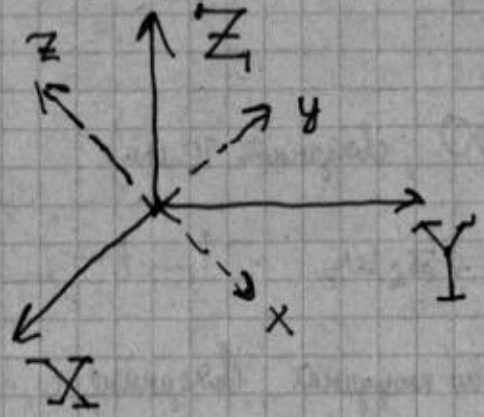
Цель: Описать движение твёрдого тела в самом общем случае.

Два закона будем изучать:

- 3-й закон движения центра масс.
- Теорема моментов.

$$\begin{cases} m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш} \\ \frac{d}{dt}\vec{N} = \vec{M}_{внеш} \end{cases}$$ (уравнения вращения).

Дальше рассм. дв-е тела с одной неподвижной точкой. Введём две системы координат: лабораторную и жестко связанную с телом.



XYZ – лабораторная

xyz – система тела.

Описать дв-е тела можно с помощью м-цы поворота.

$$S_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \qquad i,j = \overline{1,3}$$

$$S_{ij}(t) = ?$$

Теорема Эйлера: $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ (§ 3)

$\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость вращения.

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

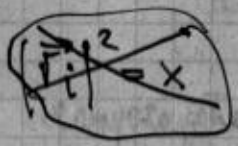
$\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t) = ?$ – проекции мн.

Угловой скорости вращения на оси координат, связанные с телом.

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i \; ; \quad \vec{\dot{N}} = M$$

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] \; ; \quad \vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \; ;$$

$$\vec{N}_i = m_i \, [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = m_i \{ \vec{\omega} \cdot r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega}) \} \quad (*)$$



$$\begin{cases} r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 & (\text{в СО, связанной телом}) \\ (\vec{r}_i, \vec{w}) = x_i \cdot w_x + y_i \cdot w_y + z_i w_z & (- \text{"} -) \end{cases}$$

Спроектируем (*) на оси координат, связанные с телом:

$$N_{ix} = m_i \cdot w_x \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i \left(x_i w_x + y_i w_y + z_i w_z \right) \right)$$

$$N_{ix} = m_i \cdot w_x \left(y_i^2 + z_i^2 - x_i y_i w_y - x_i z_i w_z \right) ;$$

Аналогично получим:

$$N_{iy} = m_i \{ -y_i x_i w_x + (x_i^2 + z_i^2) w_y - y_i z_i w_z \}$$

$$N_{iz} = m_i \{ -z_i x_i w_x - z_i y_i w_y + (x_i^2 + y_i^2) w_z \}$$

Возьмём суммы по всем точкам тела:

$$N_x = J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz}\,\omega_z ;$$
$$N_y = J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz}\,\omega_z ;$$
$$N_z = J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy}\,\omega_y + J_{zz}\,\omega_z ;$$

$$\begin{cases} J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & \text{— момент инерции отн. } O_x \\ J_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & \text{— — и — — } O_y \\ J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) & \text{— — и — — } O_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = J_{yx} ; \\ J_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = J_{zx} ; \\ J_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = J_{zy} ; \end{cases}$$

Внедиагональные эл-ты этой м-цы наз. <u>произведения инерции</u>.

<u>Тензор инерции</u> — это матрица, связывающая между собой декартовы компоненты момента имп. 157

мса тела и мгн. угловой скорости тела.

$$\vec{N} = \hat{J}\vec{\omega};$$

Тензорная связь между векторами означает, что они, вообще говоря, не параллельны друг другу.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Главные оси инерции тела (Ox, Oy, Oz) – это оси, в которых тензор инерции диагонален.

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Эти J_x, J_y, J_z назв. главными моментами инерции тела.

в этих осях:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= J_x \omega_x; \\ N_y &= J_y \omega_y; \\ N_z &= J_z \omega_z; \end{aligned}\right\}$$

Здесь тоже, вообще говоря, $\vec{N} \nparallel \vec{\omega}$;

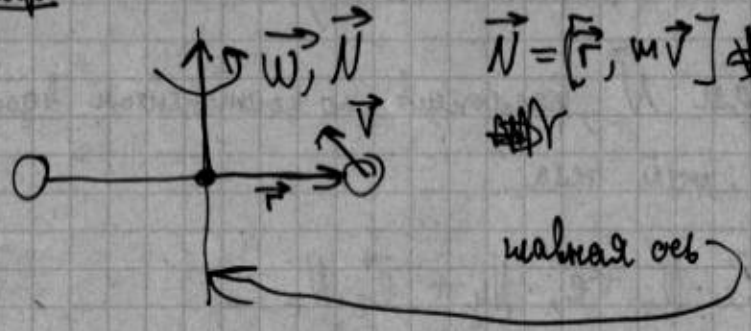
Пример

$\omega_x \neq 0$, $\omega_y = \omega_z = 0$;

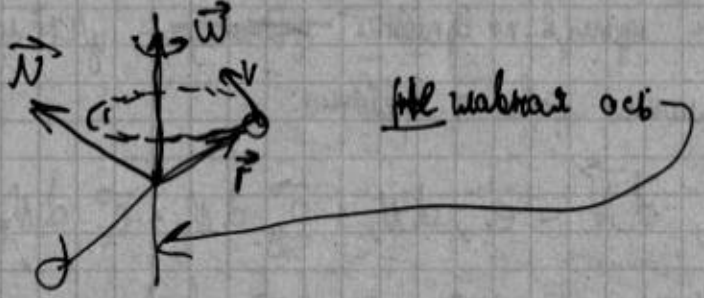
$\Rightarrow$ $N_x \neq 0$, $N_y = N_z = 0$;

(Из физической точки зрения, главные оси выделены тем, что если тело вращает вокруг главной оси, то вектор $\vec{N} \parallel \vec{\omega}$;

Пример



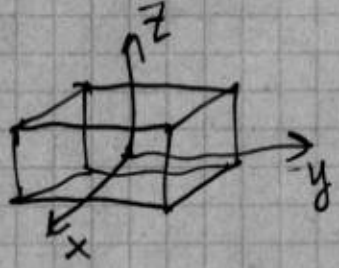
$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$



Если тело обл. симметрии, то оси симм. – главные

оси инерции.

Главные оси инерции параллелепипеда:



§35. Динамика твёрдого тела: Уравнения Эйлера.

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$ (Теорема моментов).

Запишем $\vec{N}$, разложив по компонентам вдоль главных осей тела.

$$\vec{N} = \vec{e}_x \cdot N_x + \vec{e}_x \cdot N_y + \vec{e}_z N_z$$

При вычислении произв. по времени ~~учёте~~ учтём, что все 6 величин зав. от времени:

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt}, \quad d\vec{N} = \vec{e}_x dN_x + \vec{e}_y dN_y + \vec{e}_z dN_z +$$

$$+ N_x d\vec{e}_x + N_y d\vec{e}_y + N_z d\vec{e}_z \quad (1)$$

КМ

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$dr = [\vec{\omega}, \vec{r}]\,dt.$$

Эту формулу можно применить для любого вектора, жёстко связанного с вращающимся телом.

$$\begin{cases} d\vec{e}_x = [\vec{\omega}, \vec{e}_x]\,dt \\ d\vec{e}_y = [\vec{\omega}, \vec{e}_y]\,dt \\ d\vec{e}_z = [\vec{\omega}, e_z]\,dt \end{cases}$$

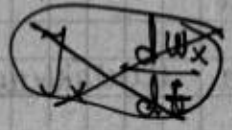
Подставим в (1): $\left(\vec{e}_x\,dN_x + \vec{e}_y\,dN_y + \vec{e}_z\,dN_z := d'\vec{N}\right)$

$$d\vec{N} = d'\vec{N} + [\vec{\omega}, \vec{N}]\,dt$$

$$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{d'\vec{N}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{M}$$

Спроектируем на $Oxyz$ (ЦСО, связ. с телом):

$$N_x = J_x \omega_x,\ N_y = J_y \omega_y,\ N_z = J_z \omega_z;$$



$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x\omega_x & J_y\omega_y & J_z\omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + \vec{e}_y (J_x - J_z)\omega_x\omega_z +$$

$$+ \vec{e}_z (J_y - J_x)\omega_x\omega_y$$

$$\begin{cases} J_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x \\ J_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y \\ J_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z \end{cases}$$

Уравнения Эйлера.

Пример Свободное вращение симметричного волчка

$M_x = M_y = M_z = 0$

Симметричный волчок – тело, у которых совпадают два из трёх главных моментов инерции.

В этом случае уравнения становятся линейными и допускают аналитическое решение.

$$J_A \cdot \dot{\omega}_x + (J_B - J_A)\omega_y\omega_{z0} = 0$$

$$J_A \dot{\omega}_y + (J_A - J_B)\,\omega_x \omega_{z0} = 0$$

$$\dot{\omega}_z = 0 \Rightarrow \omega_z(t) = const := \omega_{z0};$$

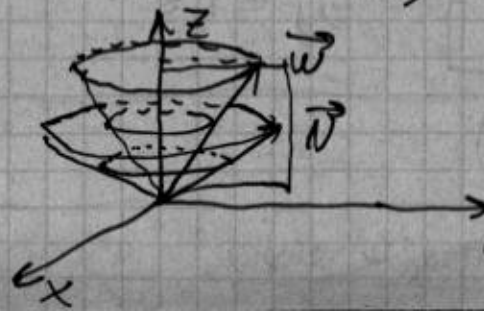
$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = \ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0 \quad (\text{у-е гарм. осциллятора})$$

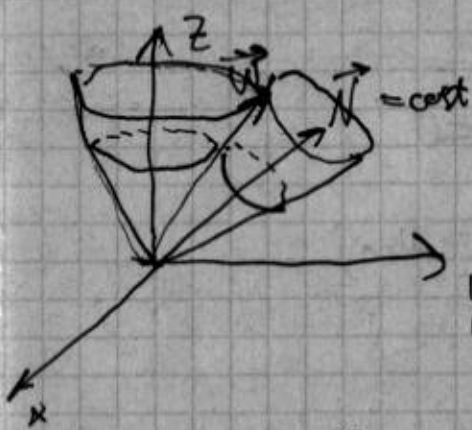
$$\Omega = \omega_{z0} \frac{J_B - J_A}{J_A};$$

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0 \cdot \cos(\Omega t + \varphi); \\ \omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega t + \varphi); \end{cases} \quad \omega_z(t) = \omega_{z0} = const;$$

$$\begin{cases} N_x(t) = N_0 \cos(\Omega t + \varphi); \\ N_y(t) = N_0 \sin(\Omega t + \varphi); \\ N_z(t) = N_{z0} = const; \end{cases}$$



Т.к. $\vec{M} = 0$, то $\vec{N} = const$ (в инд. СО);



Свободный симм. волчок движется так, как если бы он был жёстко связан с конусом, катящимся без проскальзывания по пов-ти другого конуса.

Уравнения для матрицы поворота

$$S_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j')\ ;$$

$$\dot{S}_{ij} = (\vec{e}_i \cdot \dot{\vec{e}}_j')$$

$d\vec{r} = -[\vec{\omega}, \vec{r}]\, dt$; (из ур-я Эйлера).

$$d\vec{e}_j' = [\omega, \vec{e}_j']\, dt\ ;$$

$$\boxed{\dot{S}_{ij} = (\vec{e}_i\, [\vec{\omega}, \vec{e}_j'])} \qquad i, j = \overline{1,3}\ ;$$

ЛЕКЦИЯ 16 (19.12.2014)

Основные понятия и законы

КМ

Классической механики

(1.) 3-ны Ньютона:

1. Всякое тело сохр. сост. покоя или равн.-прям. дв-я до тех пор, пока другие тела не заставят его изм. это состояние

2. Зав-е массы мат.-точки на уск-е равно действ. на неё силе. $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$

3. Действия двух тел друг на друга равны и противоп. напр. $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$

(2.) Что такое масса, сила? Как изм?

Масса – мера отклика тела на действ. силы.

Сила – мера действ. на данное тело других тел.

[Масса] = кг. 1 кг – масса эталонного тела, представ. собой цилиндр. и сделан платины и иридия. $d = 39$ мм h.

[Сила] = Н. 1 Н – сила, вызыв. уск-е...

Чтоб изм. массу, нужно воспользоваться эталонной силой и изм. уск-е, – массу находим по ф-ле $m = \frac{F_{эт}}{a_1} = 1\text{Н}$

Чтобы изм. силу, нужно под. ней на тело ~~массой~~ от. массы...

Правило сл-я сил: если на мат. точку одновр. действ. две силы, то она нач. двигатся так, как если бы на неё действ. одна сила, равная вект. сумме первых двух сил.

(3) Принцип отн. Галилея, Эйнштейна...

Пр. отн-ти Галилея:

Никакими мех. опытами, провед. внут. данн. СО нельзя установить: находится ли эта С-ма в сост. покоя или равном и прям-но дв.

Эйнштейна:

Никакими физ. опытами вообще нельзя устан. —"—.

или ур-я, выранс. физ. законы должны быть инв. отн. преобр. Лоренца.

Пост. ск-ти света:

Ск-сть света не зав. от того, по отн. к какой СО покоящееся или дв-ся она определяется.

$V_{абс} = V_{отн} = c$;

(4) Преобр. Лоренца, рел. ур-е дв-я

КМ

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t = \dfrac{t' + x'(v/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y', \; z = z'; \end{cases}$$

Преобр. Лоренца.

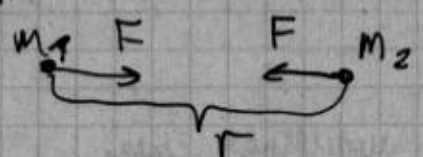
(x, y, z, t – неподв. СО...)

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ – рел. ур-е.

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

(5) Всем. тяг., принцип суперпозиции

З-н всем. тяг: любые две м.т. притягиваются друг к другу с силой, проп. их массам и обр. проп. квадр. расст. межд. ними:



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2};$$

Принц. суп.

Каждая пара частиц вз-ет нез-мо т.е.

так, как если бы др.т. не было

(6).

Элем. раб. – это ск. пр-е силы на беск-малое перемещение точки прил. силы

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = \vec{F}\,d\vec{r}$$

Работа – сумма элем. работ.

$$A = \int dA;$$

Потенц. энергия – эта работа потенц. силы, взятая со зн. минус:

$$d\Pi = -dA_{\Pi}$$

$$\Pi = \int d\Pi;$$

Сила-потенц., если работа силы по перем. точки по любому замк. контуру равна 0. (тяжести, упр., кулона)

$$\oint dA_{\Pi} = 0$$

Непотенц. – сила трения, мышечная сила.

(7)

Внут. силы – силы вз-я между телами данной системы.

Внеш. – силы, дейст. на тела системы со

сторонние, не входящие в данную систему.

(8)

Ц. м. сист. ч. – это точка, радиус-вектор которой опр. ф-лой:

$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$, где $m = \sum_i m_i$;

З-н дв-я ц. м.: Ц. м. сист. дв-ся так, как если бы в этой точке находилась вся масса сист. и к ней были бы приложены все внеш. силы,

$m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}$;

(9) З-ны сохр.

ЗСИ в мех. Ньютона: Если сумма внеш. сил равна 0, то имп. с-мы сохр.

$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const$;

ЗСЭ в мех. Ньютона: Если работа непотенц. сил равна 0, то полная мех. энерг. с-мы сохр.

$E = K + П = const$

Теор. Остр-ки:

ЗСИ, ЗСЭ: Если сумма внеш. сил равна 0, то рел. имп. и рел. энер. с-мы сохр.

рел. имп.: $\vec{P} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}$;

$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \text{const}$;

(10)

Мом. имп. – вект. пр-е радиус-вект. точки на её имп.

$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}]$;

Мом. силы – вект. пр-е радиус-вект. точки приложения силы на вект. силы

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$;

Теор. мом.

Ск-ть изм. момента импульса с-мы равна сумме моментов внеш. сил:

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$

ЗСМИ: Если сумма мом. внеш. сил равна 0, то момент импульса с-мы сохраняется.

$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m\vec{v}_i] = \text{const}$;

(11)

170 Момент инерц. тела отн. данной оси – это вел., хар

КМ

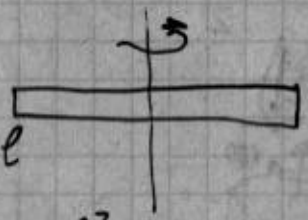
ф-лой:

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$

$r_{i\perp}$ – расстояние данной точки до оси вращения

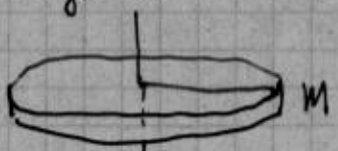
Примеры:

① М.и. стержня



$$J = \frac{1}{12} m\ell^2;$$

② М.и. диска



$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

Теор. Гюйгенса-Штейнера.

М.и. тела отн. данной оси равен сумме моментов ин. тела отн. оси, проходящей через ц.м. тела параллельно данной + произв. масса тела, умнож. на кв. расстояние между осями.

$J = J_C + ma^2$

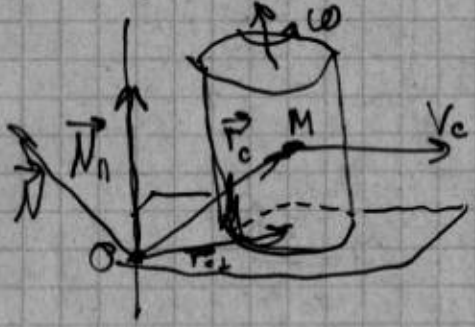
(12)

$\vec{p} = m\vec{V}_C$

$\vec{N}_{II} = [\vec{r}_{C\perp}, m\vec{V}_C] + J\vec{\omega}$

$K = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$; (т. Кёнига);

$(J = J_C)$



Ур-е вращения тела:

$J\varepsilon_z = M_z$; $(\varepsilon_z = \ddot{\varphi})$

(13)

Сила инерц. – это добавочная, действ. на м.т. в неинерц. СО и определяемая ф-лой:

172

КМ

$$\vec{F}_{ин} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$$

↑ уск-е отн. какой-либо инерц. СО.

Переносная Сила инерц.:

$$\vec{F}_п = -m\vec{a}_0$$

Центробежная:

$$\vec{F}_ц = m\omega^2\vec{r}'_\perp$$

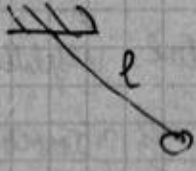
Кариолисова:

$$\vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'];$$

(14)

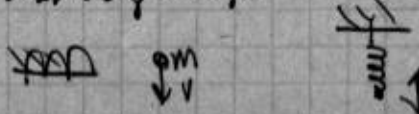
Связи – это не выражающиеся из ур-я дв-я не координаты, скорости и уск. точек мех с-мы.

Примеры с-мы со связью:



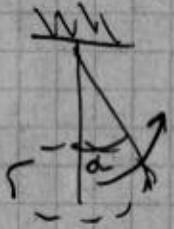
$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

Пример с-мы без связи:



Число степ. своб. газ. число нез. коорд., полностью опр. положение сист. в пр-ве:

$s=1$



$s=2$

θ, φ

(16)

Идеальная газ связь, для которой вирт. работа сил реакции равна 0.

$$\delta A_R = \sum_l \left(\vec{R}_l \cdot \delta \vec{r}_l \right) = 0$$

(вирт. перемещ. – это беск. малое перемещ. точки, допускаемое связями в данный момент вр. t);

174 Примеры:

КМ

1. Абс – гладкая повть
2. Жесткий невес. стержень
3. Качение без проскальз.

идеальн. связи.

(17)

~~$\Delta = K - \Pi$~~

Лагранжиан – это разность кин. и пот. эн. сис-мы, выраженная через обобщ. коорд., обобщ. ск и время.

$$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t);$$

Ур-е Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0;$$

$$j = 1, 2, \dots, S$$

Это верно для сис с идеальными голономными связями и потенц. заданными силами.

(18)

Обобщ. сила – это: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Обобщ. импульс – это ~~частн. п~~ ЧП ф-и Лагранжа по обобщ. ск-сти. $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$;

Их размерности опр-ся разм. обобщ. коорд.

Примеры:

$[q] = M \Rightarrow [Q] = H$;

$[p] = кг \cdot \frac{м}{с}$;

$[q] = 1\,рад \Rightarrow [Q] = Н \cdot м$; (Момент силы)

$[p] = кг \cdot \frac{м^2}{с}$; (Момент импульса);

(19)

Гамильтониан консерв. с-мы

– это сумма кин. и пот. эн. с-мы, выраженная через обобщ коорд. и обобщ. импульсы

$H = K + \Pi = H(q, p)$;

Ур-я Гамильтона:

$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$;

$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ $\quad j = 1, \dots, s$;

176

КМ

(20)

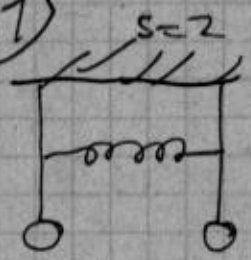
Гарм. колебания:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

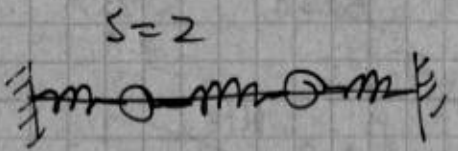
X – обобщ. коорд.

Чтобы найти частоту, нужно написать ур-е дв-я с-мы и привести его к стад. виду ур-я гарм. кол.

(21)



Связанный маятник



Связанный осциллятор

Норм. колебания – это гарм. кол. на одной из соб. частот с-мы

колебания, происх. по з-ну sin-са и cos-са

Норм. коорд. – это обобщ. коорд, кот. мгн. нез – но друг. от друга.

(22)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ – волновое ур-е

$$f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt);$$

23

Распр. пл-ти вер-ти. — это ~~[illegible]~~ отношение вер. попадания сл.в. в малый интервал вблизи заданного зн-я, когда инт-ал стремится к нулю.

x — сл.в.

$$W(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x)}{\Delta x};$$

Распр. Гиббса:

$$W(z) = C \cdot e^{-\frac{H(z)}{kT}};$$

$H(z)$ — гамильтониан.

$$z = (q, p);$$

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{градус}};$$

T — абс. температура с-мы $= t\,°C + 273$;

Основной з-н статист. мех. равновесных с-м:

в сост. терм. равнов. распр. плотности вер. для разл. сост с-мы описываются распределением Гиббса.

(24)

Распределение Максвелла:

$$W(V_x, V_y, V_z) = C e^{-\frac{m(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}{2kT}};$$

V_x, V_y, V_z – ск. – сть молекулы газа

Распр. Больцмана:

$$W(z) = C e^{-\Pi(z)/kT}$$

$\Pi(z)$ – потенц. эн. системы.

Если в поле силы тяж.: $\Pi = mgz$

(25)

В Состоянии терм. равнов. на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия:

$$E = \frac{kT}{2};$$

(26)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$ – диффузии

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ – Теплопроводности

Отр

Коэфф-т диффузии — коэфф. проп. между плотностью потока частиц и градиента их концентрации

Коэфф-т теплопр. — это коэфф-т проп. между плотностью потока тепла и градиентом температуры.

Лекции по курсу "Классическая механика"

Содержание:

§1 Кинематика материальной точки 1
§2. Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобр. Лоренца 11
§3. Кинематика твёрдого тела 17
§4. Кинематика вращающихся систем отсчёта 21
§5. Законы Ньютона 24
§6. Силы в механике 27
§7. Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции 35
§8. Импульс системы частиц. Движение центра масс 38
§9. Закон сохранения импульса 42
§10. Работа и потенциальная энергия 46
§11. Кинетическая энергия 52
§12. Законы сохранения энергии в механике 55
§13. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент сил 60
§14. Теорема Эйлера. Закон сохранения момента импульса 66
§15. Материальная точка в центральном поле 69
§16. Плоское движение твёрдого тела 76
§17. Момент инерции твёрдого тела 79
§18. Системы со связями. Степ. свободы. Обобщ. координаты 83

§19. Виртуальные перемещения. Виртуальная работа. Идеальные с. 88
§20. Уравнения Лагранжа. Обобщённые силы. 90
§21. Функция Лагранжа. Обобщённые импульсы. 95
§22. Уравнения Гамильтона. Канонические переменные. 99
§23. Равновесие системы и его устойчивость. 106
§24. Колебания в системах с одной степенью свободы. 109
§25. Физические эффекты в колебательных системах. 114
§26. Нормальные колебания и нормальные координаты. 119
§27. Механика волновых процессов. 122
§28. Случайные величины и вероятности. 126
§29. Распределение Гиббса. 130
§30. Размер и масса молекул. 136
§31. Распределение энергии по степеням свободы 140
§32. Диффузия и теплопроводность. 144
§33. Вязкость жидкости 150
§34. Тензор инерции твёрдого тела. Главные оси инерции 154
§35. Динамика твёрдого тела. Уравнения Эйлера. 160
Основные понятия и законы классической механики 164