Учебное пособие

Г. Д. Ким, Л. В. Крицков

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ

ТОМ II (1)

ББК 22.147

Рекомендовано
Советом по прикладной математике и информатике
УМО по классическому университетскому образованию
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010200
"Прикладная математика и информатика" и направлению 510200
"Прикладная математика и информатика"

Ким Г. Д., Крицков Л. В.
Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1. М.: ИКД "Зерцало-М", 2003. — 170 с.

ISBN 5-94373-068-0

Книга представляет собой первую часть второго тома задачника по объединенному курсу линейной алгебры и аналитической геометрии. Каждый раздел содержит теоретическое введение, примеры решения типовых задач и большое число задач для семинарских занятий и самостоятельной работы студентов. Задачи снабжены ответами и указаниями. Книга тесно связана с учебником Ильина В. А., Ким Г. Д. "Линейная алгебра и аналитическая геометрия".

Для студентов физико-математических специальностей университетов.

ISBN 5-94373-068-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой первую часть второго тома сборника задач по объединенному курсу алгебры и аналитической геометрии. Оно содержит подборку задач по теории линейных пространств над произвольным полем, теории евклидовых и унитарных пространств, а также задачи, касающиеся алгебры линейных операторов в конечномерных пространствах.

Будучи непосредственным продолжением первого тома [8], пособие наследует его структуру. Задачи сгруппированы в параграфы, нумерация которых продолжает нумерацию первого тома. В начале каждого параграфа приводятся определения и формулировки теорем, касающиеся рассматриваемых понятий, а также примеры решений типовых задач. Теоретической поддержкой задачника являются учебник В.В.Воеводина [2], в котором заложены методические основы объединения курсов алгебры и геометрии, и учебник В.А.Ильина, Г.Д.Ким [7]. Последовательность разделов, а также определения и обозначения соответствуют учебнику [7]. В конце задачника помещены ответы к задачам, к некоторым из них даются рекомендации.

Список литературы

1. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– М.: Наука, 1987.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра.– М.: Наука, 1974.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.И. Матрицы и вычисления.– М.: Наука, 1984.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1988.
5. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ.– М.: Наука, 1969.
6. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре.– М.: Наука, 1975.
7. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
8. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том I.– М.: Зерцало, 2003.
9. Кострикин А.И. Введение в линейную алгебру.– М.: Наука, 1977.
10. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.– М.: Наука, 1986.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: Наука, 1971.
12. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа (в 2-х частях).– М.: Наука, 1978.
13. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.– М.: Наука, 1996.
14. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Наука, 1967.
15. Сборник задач по алгебре / Под ред. Кострикина А.И.– М.: Факториал, 1995.
16. Халмош П. Конечномерные векторные пространства.– М.: Физматгиз, 1963.
17. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.– М.: Мир, 1989.
18. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства).– М.: Наука, 1969.

Глава XII. Линейное пространство над произвольным полем

§44. Определение и основные свойства

Пусть дано поле P. Непустое множество V называется *линейным* или *векторным пространством над полем* P, если на этом множестве определены внутренний закон композиции $V \times V \to V$, называемый сложением, и внешний закон композиции $P \times V \to V$, называемый умножением на число из поля P, удовлетворяющие следующим аксиомам: для любых $a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) существует элемент $\theta \in V$ такой, что $a + \theta = \theta + a = a$;
4) для любого элемента $a \in V$ существует элемент $-a \in V$ такой, что $a + (-a) = (-a) + a = \theta$;
5) $1 \cdot a = a$;
6) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ называется *рациональным*, над полем $\mathbb{R}$ – *вещественным*, а над полем $\mathbb{C}$ – *комплексным линейным пространством*.

Понятия линейной зависимости, базиса и размерности линейного пространства, линейного подпространства и линейного многообразия, рассмотренные применительно к вещественным линейным пространствам в главе IV части 1, сохраняются и в линейном пространстве над произвольным полем. Практически неизменными остаются и все теоремы (а также их доказательства), касающиеся этих понятий. Незначительное изменение коснется лишь формулировок: в них добавится уточнение, какое именно поле рассматривается. Безусловно, это сходство с вещественными линейными пространствами относится к тем общим свойствам линейных пространств, которые опираются лишь на аксиомы поля. Частные же особенности поля (такие, например, как конечность поля или отличие от нуля его характеристики) могут сделать свойства линейного пространства исключительными (пример 44.4, задачи 44.11-44.15, 44.93, 45.26, 45.48).

Приведем теперь некоторые дополнительные понятия и факты, связанные с линейными пространствами над произвольным полем.

Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается любой вектор системы, называется *базой* этой системы векторов.

Теорема 44.1. *Подсистема системы векторов является базой системы векторов тогда и только тогда, когда образует максимальную линейно независимую подсистему.*

Следствие. *Все базы одной системы векторов состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов системы.*

Число векторов базы называется *рангом системы векторов*. Очевидно, ранг системы векторов равен максимальному числу линейно независимых векторов системы. Обозначение: $\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_n)$.

Две системы векторов линейного пространства называются *эквивалентными*, если любой вектор каждой из этих систем линейно выражается через другую систему. Из определения следует, что *база системы векторов эквивалентна самой системе*.

Теорема 44.2. *Если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_m$, то $\operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k) \le \operatorname{rg}(b_1, \ldots, b_m)$.*

Следствие 1. *Ранги эквивалентных систем совпадают.*

Следствие 2. *Эквивалентные линейно независимые системы векторов состоят из одинакового числа векторов.*

Говорят, что *система векторов* $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства V *порождает пространство* V, если любой вектор $x \in V$ является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$.

В этой терминологии базис линейного пространства V – это линейно независимая система векторов, порождающая все пространство V.

Теорема 44.3 (о неполном базисе). *В n-мерном пространстве любую линейно независимую систему из k, где $k < n$, векторов можно дополнить до базиса.*

Пример 44.1. Арифметическое пространство P^n. Пусть P – поле, а P^n – множество всевозможных упорядоченных наборов n чисел из поля P, т.е. $P^n = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in P, i = \overline{1,n}\}$. Два арифметических вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются равными, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1,n}$. Введем в P^n операции по следующим правилам:

а) если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то
$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$
б) для любого числа $\alpha \in P$
$$\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Нетрудно проверить, что P^n – линейное пространство над полем P.

Единичные векторы
$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1) \tag{44.1}$$
образуют базис P^n (см. пример 17.2), называемый *естественным базисом* пространства P^n, координатами вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в естественном базисе служат его компоненты $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В частности, $\mathbb{C}^n$ – комплексное линейное пространство, $\dim \mathbb{C}^n = n$ и векторы (44.1) образуют его базис.

Пример 44.2. Арифметическое пространство $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. В линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ векторы умножаются на комплексные числа. Однако можно было бы ограничиться умножением только на вещественные числа, при этом результат умножения, несомненно, останется арифметическим вектором из $\mathbb{C}^n$. Это означает, что внешний закон композиции можно вводить и как умножение на вещественные числа, т.е. как отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Символом $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ будем обозначать множество $\mathbb{C}^n$, в котором внешний закон композиции определен как $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ – вещественное линейное пространство.

В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ векторы (44.1) не могут быть базисом, так как умножением этих векторов только на вещественные числа нельзя получить любой комплексный арифметический вектор $a = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$, где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$. Добавим к векторам (44.1) еще n векторов:

$$f_1 = (i, 0, \ldots, 0),\ f_2 = (0, i, \ldots, 0),\ \ldots,\ f_n = (0, 0, \ldots, i).$$

Покажем, что система векторов $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ образует базис $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Действительно, линейная комбинация этих векторов с вещественными коэффициентами α_k, β_k имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum_{i=1}^{n} \beta_k f_k = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n) \tag{44.2}$$

и равна нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k + i\beta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, т.е. $\alpha_k = \beta_k = 0$, $k = \overline{1,n}$. Следовательно, векторы $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Они порождают все пространство $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, так как любой вектор $(\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$ из $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ согласно (44.2) является линейной комбинацией этих векторов с вещественными коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$.

Итак, $\dim \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} = 2n$.

В частности, само поле $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественное линейное пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. В этом случае $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$, а естественным базисом служат числа 1 и i.

Пример 44.3. Множество $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, в котором операции сложения и умножения выполняются по правилам

+	0	1
0	0	1
1	1	0

и

·	0	1
0	0	0
1	0	1

соответственно, образует, как нетрудно проверить, поле. Как и любое поле, оно является линейным пространством над самим собой.

Заметим, что это поле есть ничто иное как поле вычетов $\{C_0, C_1\}$ по модулю 2, в котором каждый из классов представлен своим элементом. Операции сложения и умножения в $\mathbb{Z}_2$ введены по правилам:

1) сумма m и n есть остаток от деления обычной суммы $m + n$ на 2,

2) произведение m и n есть остаток от деления обычного произведения mn на 2.

Такая операция сложения (умножения) называется *сложением* (соответственно *умножением*) *по модулю* 2 и обозначается $(m + n) \bmod 2$ (соответственно $(mn) \bmod 2$).

Аналогичным образом могут быть введены алгебраические операции и в $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p - 1\}$.

Пример 44.4. Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество, состоящее из n элементов. На множестве всех его подмножеств V определим операции сложения и умножения на числа из поля $\mathbb{Z}_2$ (см. предыдущий пример) по правилам:

$$X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$
$$1 \cdot X = X, \quad 0 \cdot X = \phi.$$

Нетрудно проверить (например, на кругах Эйлера), что относительно этих операций множество V является линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_2$. Отметим, что в этом пространстве $\theta = \phi$, $-X = X$.

Покажем, что подмножества $X_1 = \{a_1\}$, $X_2 = \{a_2\}, \ldots$, $X_n = \{a_n\}$ образуют базис V. Во-первых, они образуют линейно независимую систему, так как никакая нетривиальная линейная комбинация (т.е. с коэффициентами, равными 1) этих подмножеств не равна θ: $1 \cdot X_{i_1} + 1 \cdot X_{i_2} + \ldots + 1 \cdot X_{i_k} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} \neq \phi$. Во-вторых, как следует из последнего равенства, любое подмножество является линейной комбинацией подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Таким образом, $\dim V = n$.

Отметим также, что число всех векторов в пространстве V конечно и равно 2^n.

Пример 44.5. Доказать, что линейное пространство $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ вещественных чисел над полем рациональных чисел бесконечномерно.

Решение. Покажем, что для любого натурального числа n можно указать n вещественных чисел, линейно независимых над полем $\mathbb{Q}$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – произвольные различные простые числа и

$$x_1 = \log_2 p_1, \quad x_2 = \log_2 p_2, \ \ldots, \ x_n = \log_2 p_n.$$

Покажем, что если

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \tag{44.3}$$

для некоторых рациональных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Без ограничения общности можно считать, что все коэффициенты в левой части (44.3) целые: $\alpha_i = k_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,n}$ (в противном случае, т.е. если $\alpha_i = \dfrac{k_i}{m_i}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$, достаточно умножить обе части равенства (44.3) на наименьшее общее кратное знаменателей $m_1, m_2, \ldots, m_n$). Таким образом, выполнено равенство

$$k_1 \log_2 p_1 + k_2 \log_2 p_2 + \ldots + k_n \log_2 p_n = 0 \tag{44.4}$$

или, что тоже самое,

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} = 1. \tag{44.5}$$

Если все показатели степени $k_1, k_2, \ldots, k_n$ в левой части (44.5) неотрицательны, то так как $p_i \neq 1$, $i = \overline{1,n}$, то $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Если же среди чисел $k_1, \ldots, k_n$ есть отрицательные – например,

$$k_1 < 0, \ \ldots, \ k_s < 0, \ k_{s+1} \geq 0, \ \ldots, \ k_n \geq 0,$$

то из (44.5) следует, что

$$p_{s+1}^{k_{s+1}} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} = p_1^{|k_1|} \cdot \ldots \cdot p_s^{|k_s|},$$

что противоречит единственности разложения натурального числа на простые множители.

Таким образом, равенство (44.3) с целыми, а следовательно, и с рациональными коэффициентами возможно тогда и только тогда, когда все эти коэффициенты нулевые. ■

Два линейных пространства V_1 и V_2 над общим полем P называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для любых векторов $x, y \in V_1$ и любого числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Обозначение: $V_1 \cong V_2$. Само отображение φ называется *изоморфизмом линейных пространств*.

Пример 44.6. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3 векторов на прямой, на плоскости и в пространстве изоморфны арифметическим пространствам $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно. Действительно, поставим в соответствие каждому вектору $x \in V_n$ набор его координат в каком-либо базисе e, т.е. арифметический вектор $x_e \in \mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3$. Это соответствие взаимно однозначно и сохраняет законы композиции, так как координаты вектора обладают свойством линейности.

Пример 44.7. $V_2 \cong C_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$.

Пример 44.8. $P^{m\times n} \cong P^{mn}$, и в частности $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$.

Теорема 44.4. *Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех линейных пространств над полем P.*

Теорема 44.5. *В изоморфных пространствах*

а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;

б) образ (и прообраз) нулевого вектора есть нулевой вектор;

в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;

г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Теорема 44.6 (**критерий изоморфизма**). *Два конечномерных линейных пространства над общим полем изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Следствие. *Любое n-мерное вещественное пространство изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$, а любое n-мерное комплексное пространство – арифметическому пространству $\mathbb{C}^n$.*

ЗАДАЧИ

44.1. Доказать, что в линейном пространстве над полем P для выполнения равенства $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$, где $\alpha, \beta \in P$, x, y – векторы пространства, необходимо и достаточно, чтобы либо $\alpha = \beta$, либо $x = y$.

44.2. Не пользуясь коммутативностью сложения векторов, доказать, что правые противоположный и нулевой элементы будут одновременно левыми.

44.3. Доказать, что коммутативность сложения векторов вытекает из остальных аксиом линейного пространства.

44.4. На множестве $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел введена операция сложения по правилу:

если $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$, то $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Ввести операцию умножения пары (a_1, a_2) на действительное число α так, чтобы:

а) были выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы

$$1 \cdot a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^2;$$

б) были выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b, \quad \forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

44.5. На множестве $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел введены следующие операции:

если $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$, то $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$;

для любого комплексного числа $\alpha = \lambda + i\mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$\alpha(a_1, a_2) = (\lambda a_1 + \mu a_2, -\mu a_1 + \lambda a_2).$$

Доказать, что множество $\mathbb{R}^2$ с так введенными операциями является комплексным линейным пространством.

44.6. На множестве $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар действительных чисел введена операция сложения по правилу:

если $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$, то $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Ввести операцию умножения пары (a_1, a_2) на комплексное число α так, чтобы были выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

44.7. В комплексном линейном пространстве V определена новая операция умножения на число по правилу $\alpha \circ x = \overline{\alpha} x$, $\forall \in \mathbb{C}$. Доказать, что V является комплексным линейным пространством относительно старой операции сложения векторов и новой операции умножения на число.

44.8. Найти ошибку в следующем "доказательстве" того, что аксиома $1 \cdot a = a$ $\forall a \in V$ вытекает из других аксиом линейного пространства: "Пусть $a = \alpha b$, тогда $1 \cdot a = 1(\alpha b) = (1 \cdot \alpha)b = \alpha b = a$".

44.9. На множестве $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел определены следующие операции:

а) "сложение" $x \oplus y = xy$ (т.е. обычное умножение x и y);

б) "умножение на действительное число" $\alpha \odot x = x^\alpha$ (т.е. возведение x в степень α).

Показать, что множество $\mathbb{R}_+$ относительно указанных операций образует вещественное линейное пространство.

44.10. Пусть V – множество всех функций, заданных и принимающих положительные значения на отрезке $[a,b]$. Определим сложение двух функций и умножение функции на число равенствами:

$$f \oplus g = fg, \quad \alpha \odot f = f^{\alpha}, \qquad f,g \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

а) Проверить, что относительно указанных операций V является вещественным линейным пространством.

б) Доказать, что пространство V изоморфно пространству V_1 всех действительных функций, заданных на отрезке $[a,b]$, относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

44.11. Пусть P – поле, F – его подполе.

а) Доказать, что P является линейным пространством над полем F.

б) Найти базис и размерность поля $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.

в) Пусть $m_1, \ldots, m_n$ – различные натуральные числа, каждое из которых не делится на квадрат простого числа. Доказать, что числа $1, \sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_n}$ линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

г) Пусть $r_1, \ldots, r_n$ – различные рациональные числа из интервала $(0,1)$. Доказать, что числа $2^{r_1}, \ldots, 2^{r_n}$ линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.

44.12. Пусть p – простое число и $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ – множество, в котором операции сложения и умножения вводится по правилам (см. пример 44.3):

$$x \oplus y = (x+y) \bmod p, \; x \odot y = (xy) \bmod p.$$

а) Показать, что $\mathbb{Z}_p$ образует поле, и следовательно, является линейным пространством над самим собой.

б) Ввести структуру линейного пространства на множестве $\mathbb{Z}_p^n$ всевозможных арифметических векторов, в которых каждая компонента равна одному из чисел множества $\mathbb{Z}_p$.

в) Найти общее число векторов в линейном пространстве $\mathbb{Z}_p^n$ и его размерность.

44.13. Привести примеры линейных пространств, состоящих из n векторов, если: а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=3$; г) $n=4$.

44.14. Показать, что если линейное пространство V содержит конечное число векторов, бо́льшее одного, то его основное поле конечно.

44.15. Существует ли линейное пространство, состоящее из

шести векторов?

44.16. Пусть V – линейное пространство всех подмножеств конечного множества M из n элементов над полем $\mathbb{Z}_2$ (см. пример 44.4). Доказать, что если ни одно из подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ этого множества не содержится в объединении остальных, то эти подможества составляют в V линейно независимую систему.

44.17. Доказать, что пространство V всех подмножеств множества M из n элементов (см. пример 44.4) и арифметическое пространство $\mathbb{Z}_2^n$ изоморфны как линейные пространства над полем $\mathbb{Z}_2$. Указать какой-либо изоморфизм между ними.

44.18. Два вектора a и b линейного пространства V над полем P называются *коллинеарными*, если существует такое число $\alpha \in P$, что либо $a = \alpha b$, либо $b = \alpha a$. Выяснить, являются ли коллинеарными следующие пары векторов комплексных арифметических пространств:

а) $(1, 1+i, 2, 2-3i), \;\; (i, 1-i, 2+i, -1)$;

б) $(1, i, 2-i, 3+i), \;\; (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

Будут ли они коллинеарны как векторы соответствующих вещественных арифметических пространств?

44.19. Пусть в пространстве V над полем P задан некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда каждому вектору $x \in V$ можно поставить в соответствие строку его координат в этом базисе:

$$x \mapsto x_e = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Доказать, что:

а) линейная зависимость (линейная независимость) системы векторов $x, y, \ldots, z$ равносильна линейной зависимости (соответственно линейной независимости) системы строк $x_e, y_e, \ldots, z_e$, рассматриваемых как элементы соответствующего арифметического пространства P^n;

б) ранг системы векторов $x, y, \ldots, z$ равен рангу системы строк $x_e, y_e, \ldots, z_e$;

в) если вектор a линейно выражается через систему $x, y, \ldots, z$, т.е. $a = \lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$, то это же верно и для строк $a_e, x_e, y_e, \ldots, z_e$, причем $a_e = \lambda x_e + \mu y_e + \ldots + \nu z_e$.

44.20. Выяснить, являются ли следующие системы матриц линейно зависимыми:

а) $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \;\; \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \;\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Зависит ли ответ от того, каким является пространство – вещественным или комплексным?

44.21. Выяснить, являются ли следующие системы многочленов линейно зависимыми:

а) $p(it)$, $p(-it)$, $p(t)$, $p(-t)$, где $p(t) = t^3 + t^2 + t + 1$;

б) $t - i$, $t + i$, $(t - i)^2$, $(t + i)^2$.

Зависит ли ответ от того, каким является пространство – вещественным или комплексным?

44.22. Доказать, что если какой-либо вектор линейного пространства единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, то эта система векторов линейно независима.

44.23. Доказать, что если каждый вектор линейно независимой системы $x_1, \ldots, x_n$ линейно выражается через векторы $y_1, \ldots, y_m$, то $n \leq m$.

Найти ранг следующих систем векторов и выяснить, зависит ли ответ от того, какому пространству – вещественному или комплексному – принадлежат эти векторы:

44.24. $x_1 = (1, 2, 3)$,
$x_2 = (6, 5, 4)$,
$x_3 = (7, 8, 9)$,
$x_4 = (12, 11, 10)$.

44.25. $x_1 = (1, 4, 7, 10)$,
$x_2 = (2, 5, 8, 11)$,
$x_3 = (3, 6, 9, 12)$.

44.26. $x_1 = (1, -1, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 1, -1, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, -1)$,
$x_4 = (0, 0, 0, -1)$,
$x_5 = (7, -3, -4, 5)$.

44.27. $x_1 = (1, -1, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 1, -1, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, -1)$,
$x_4 = (1, 0, 0, -1)$.

44.28. $x_1 = (1, 10, 0, 0)$,
$x_2 = (0, 1, 10, 0)$,
$x_3 = (0, 0, 1, 10)$,
$x_4 = (10^{-3}, 0, 0, 1)$.

44.29. $x_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$,
$x_2 = (1, i, -1, -i, 1)$,
$x_3 = (1, -1, 1, -1, 1)$,
$x_4 = (1, -i, -1, i, 1)$.

44.30. $x_1 = (3 - i, 1 - 2i, -7 + 5i, 4 + 3i)$,
$x_2 = (1 + 3i, 1 + i, -6 - 7i, 4i)$,
$x_3 = (0, 1, 1, -3)$.

44.31. $p_1(t) = t^4 - 1$, $p_2(t) = t^2 - 1$, $p_3(t) = t^2 + 1$, $p_4(t) = t + 1$, $p_5(t) = t - 1$.

44.32. $p_1(t) = (t + 1)^2$, $p_2(t) = (t - 1)^2$, $p_3(t) = (t + 1)^3$, $p_4(t) = (t - 1)^3$, $p_5(t) = (t + 1)^4$, $p_6(t) = (t - 1)^4$.

44.33. $p_1(t) = (t - 1)^4$, $p_2(t) = (t - 1)^3(t + 1)$, $p_3(t) = (t - 1)^2(t + 1)^2$, $p_4(t) = (t - 1)(t + 1)^3$, $p_5(t) = (t + 1)^4$.

44.34. $p_1(t) = t + i$, $p_2(t) = t - i$, $p_3(t) = t + 1$, $p_4(t) = t - 1$.

44.35. A, A^2, A^3, A^4, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

44.36. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 2-i & 0 & 1-i \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ 0 & 1+i & 2+i \end{bmatrix}$,
$A_3 = \begin{bmatrix} 1+i & -2 & -1 \\ 1+2i & -1-i & -1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 1-i & 2i & i \\ 2-i & -1+i & i \end{bmatrix}$.

44.37. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} i & -1+i \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2-i & 3+i \\ 1+2i & 1-3i \end{bmatrix}$.

44.38. Существует ли система векторов из $\mathbb{C}^n$, которые коллинеарны как элементы комплексного пространства, а как элементы вещественного пространства имеют ранг, больший двух?

44.39. Известно, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ имеет ранг r как элементы комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Доказать, что ранг этой системы в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ не превосходит $2r$.

Для каждой из следующих систем векторов найти ранг и какую-нибудь базу:

44.40. $x_1 = (1, -4, 3, 2)$,
$x_2 = (3, -7, 5, 3)$,
$x_3 = (3, -2, 1, 0)$,
$x_4 = (-4, 1, 0, 1)$.

44.41. $x_1 = (0, 2, -1)$,
$x_2 = (3, 7, 1)$,
$x_3 = (2, 0, 3)$,
$x_4 = (5, 1, 8)$.

44.42. $p_1(t) = 3t^2 + 2t + 1$,
$p_2(t) = 4t^2 + 3t + 2$,
$p_3(t) = 3t^2 + 2t + 3$,
$p_4(t) = t^2 + t + 1$,
$p_5(t) = 4t^2 + 3t + 4$.

44.43. $p_1(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$,
$p_2(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$,
$p_3(t) = 3t^3 + 4t^2 + 5t + 6$,
$p_4(t) = 4t^3 + 5t^2 + 6t + 7$.

44.44. A, A^T, AA^T, A^2, A^3, A^4, где $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

44.45. A, B, B^T, AB, AB^T, BA, $B^T A$, BB^T, $B^T B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

44.46. В системе $x_1, \ldots, x_m$ первые r векторов образуют базу, а x_l – ненулевой вектор, не входящий в эту базу. Доказать, что среди векторов базы найдется вектор x_j, $1 \leq j \leq r$, такой, что при замене его в подсистеме $x_1, \ldots, x_r$ вектором x_l получится новая база заданной системы $x_1, \ldots, x_m$. Будет ли такой вектор x_l единственным?

44.47. Что можно сказать о системе векторов ранга r, если она имеет: а) единственную базу; б) ровно две базы; в) ровно три базы? Две базы, отличающиеся лишь порядком векторов, считаются одинаковыми.

Найти все базы следующих систем векторов:

44.48. $x_1 = (4, -2, 12, 8)$,
$x_2 = (-6, 12, 9, -3)$,
$x_3 = (-10, 5, -30, -20)$,
$x_4 = (-14, 28, 21, -7)$.

44.49. $x_1 = (1, 2, 3, 0, -1)$,
$x_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$,
$x_3 = (1, 3, 4, 1, -1)$.

44.50. Указать все базы системы векторов
$x_1 = (1+i, \ 1-i, 2+3i)$, $x_2 = (i, \ 1, \ 2)$,
$x_3 = (1-i, -1-i, 3-2i)$, $x_4 = (4, -4i, 10+2i)$,
рассматриваемых как: а) элементы комплексного пространства; б) элементы вещественного пространства.

44.51. Даны две системы векторов:
$x_1 = (1, 1, 1)$, $y_1 = (1, 2, 3)$,
$x_2 = (1, 0, -1)$, $y_2 = (0, 1, 2)$,
$x_3 = (1, 3, 5)$, $y_3 = (3, 4, 5)$,
$y_4 = (4, 6, 8)$.

Определить, будет ли система y_1, y_2, y_3, y_4 линейно выражаться через систему x_1, x_2, x_3.

44.52. Известно, что в системе векторов $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ векторы $y_1, \ldots, y_n$ линейно выражаются через векторы $x_1, \ldots, x_m$. Показать, что система $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ эквивалентна системе $x_1, \ldots, x_m$.

44.53. Доказать, что в каждой системе векторов $x_1, \ldots, x_m$, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, можно выбрать эквивалентную ей линейно независимую подсистему.

44.54. Даны векторы:
$a_1 = (0,1,0,2,0)$, $a_2 = (7,4,1,8,3)$, $a_3 = (0,3,0,4,0)$,
$a_4 = (1,9,5,7,1)$, $a_5 = (0,1,0,5,0)$.

Можно ли подобрать числа c_{ij}, $i, j = \overline{1,5}$, так, чтобы векторы
$$b_i = c_{i1}a_1 + c_{i2}a_2 + c_{i3}a_3 + c_{i4}a_4 + c_{i5}a_5, \quad i = \overline{1,5},$$
были линейно независимы?

44.55. Доказать, что вектор b тогда и только тогда линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, когда ранг последней системы векторов не меняется от добавления к ней вектора b.

44.56. Доказать, что если две системы векторов имеют одинаковый ранг и одна из этих систем линейно выражается через другую, то эти системы эквивалентны.

44.57. Доказать, что если пересечение двух систем векторов $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ непусто, то
$$\operatorname{rg}(A \cap B) + \operatorname{rg}(A \cup B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

44.58. Доказать, что для любых двух систем векторов $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ справедливо равенство
$$\operatorname{rg}(A \cup B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B,$$
причем равенство в этом соотношении выполнено тогда и только тогда, когда ни один вектор одной системы не выражается линейно через векторы другой системы.

44.59. Доказать, что в n-мерном линейном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.

44.60. Доказать, что любой ненулевой вектор пространства можно включить в некоторый базис этого пространства.

44.61. Доказать, что в конечномерном пространстве существует базис, не содержащий ни одного вектора из заданной системы векторов $a_1, \ldots, a_k$.

44.62. В пространстве $\mathbb{R}^5$ найти три различных базиса, имеющих общие векторы $e_1 = (1,0,0,1,1)$, $e_2 = (0,1,1,0,0)$. Верно ли, что существует лишь конечное число таких базисов, в которых системы добавляемых векторов попарно не эквивалентны?

44.63. Систему многочленов $t^5 + t^4$, $t^5 - 3t^3$, $t^5 + 2t^2$, $t^5 - t$ дополнить до базиса пространства M_5.

44.64. Систему матриц $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ дополнить до базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

44.65. Систему матриц $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ дополнить до базиса пространства $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Можно ли выбрать все добавляемые матрицы кососимметрическими?

Показать, что векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис арифметического пространства и найти координаты вектора x в этом базисе:

44.66. $e_1 = (2, 2, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (-1, 2, 2)$;
$x = (1, 1, 1)$.

44.67. $e_1 = (1, 5, 3)$, $e_2 = (2, 7, 3)$, $e_3 = (3, 9, 4)$;
$x = (2 - 2i, 7 - 4i, 4 - i)$.

44.68. $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$,
$e_4 = (1, 3, -1, 0)$; $x = (7, 14, -1, 2)$.

44.69. $e_1 = (1, 2, 1, 1)$, $e_2 = (2, 3, 1, 0)$, $e_3 = (3, 1, 1, -2)$,
$e_4 = (-4, 4, -1, 6)$; $x = (7, 8, 7, 2)$.

44.70. Построить какой-либо базис в вещественном пространстве $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ и найти координаты в этом базисе вектора $(1 + i, 1 - 2i)$.

44.71. Арифметические векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Доказать, что:

а) векторы $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ образуют базис в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$;

б) векторы $e_1, \dots, e_n, \alpha e_1, \dots, \alpha e_n$ образуют базис в вещественном пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда комплексное число α не является вещественным.

44.72. Найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в каждом из следующих базисов пространства M_5:

а) $1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ t^4,\ t^5$;

б) $1,\ t - i,\ t^2 + i,\ t^3 - 1,\ t^4 + i,\ t^5 + i$;

в) $1 + t^3,\ t + t^3,\ t^2 + t^3,\ t^3,\ t^4 + t^3,\ t^5 + t^3$.

44.73. Доказать, что многочлены $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше 5, и найти координаты многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

44.74. Показать, что последовательности

$$e_1 = (2, 3, 5, 8, 13, \dots),\ e_2 = (1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

образуют базис пространства всех последовательностей вещественных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, удовлетворяющих условию $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k \geq 3$. Разложить по этому базису последовательность $x = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

44.75. Доказать, что система матриц

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

образует базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Построить другой базис этого пространства так, чтобы ни одна из его матриц не выражалась линейно через какие-либо две матрицы базиса E_1, E_2, E_3, E_4.

44.76. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

44.77. Найти координаты матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix}$ в каждом из следующих базисов пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$:

а) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & 1 + i \\ 1 & i \end{bmatrix}$.

44.78. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},\quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$
$$E_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

образуют базис пространства симметрических матриц порядка 3, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

44.79. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$e_1 = (1 - i, 3 + 2i), \quad e_1' = (1, 9 + 3i),$$
$$e_2 = (-1 + 2i, 3 - i), \quad e_2' = (-1 + 3i, 9)$$

является базисом пространства $\mathbb{C}^2$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты (x_1, x_2) во втором базисе.

44.80. Доказать, что каждая из двух систем векторов

$$e_1 = (1, 0, i), \quad e_1' = (1, 0, -i),$$
$$e_2 = (0, i, 1), \quad e_2' = (0, -i, 1),$$
$$e_3 = (i, 1, 0), \quad e_3' = (-i, 1, 0)$$

является базисом пространства $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты (x_1, x_2, x_3) во втором базисе.

44.81. Показать, что многочлены $1, t - c, (t - c)^2, \ldots, (t - c)^n$ образуют базис в пространстве M_n, и найти координаты многочлена

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

в этом базисе.

44.82. Найти матрицу перехода от естественного базиса пространства M_n к базису $1, t - c, (t - c)^2, \ldots, (t - c)^n$.

44.83. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

является базисом пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты матрицы размера 3×2 в первом базисе, если известны ее координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ во втором базисе.

44.84. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

является базисом в пространстве кососимметрических матриц порядка 3, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты кососимметрической матрицы порядка 3 в первом базисе, если известны ее координаты (x_1, x_2, x_3) во втором базисе.

44.85. Доказать, что каждая из двух систем многочленов

$$t - t^2,\ t^3,\ 1 + 5t + t^3,\ (1 + t)^3$$

и

$$(1 + t)^3,\ (1 - t)^3,\ t - t^2 + t^3,\ 1 + t + t^2 + t^3$$

является базисом пространства M_3. Найти координаты многочлена степени не выше 3 в первом базисе, если известны его координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) во втором базисе.

44.86. Доказать, что каждая из двух систем многочленов

$$(1 + t^2)^2,\ (1 - t^2)^2,\ 1$$

и

$$1 + t^2 + t^4,\ 1 - t^2 + t^4,\ t^4$$

является базисом в пространстве четных многочленов степени не выше 4, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты четного многочлена степени не выше 4 в первом базисе, если известны координаты (x_1, x_2, x_3) во втором базисе.

44.87. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;

б) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

44.88. Матрица S является матрицей перехода от первого базиса $e_1, \ldots, e_n$ ко второму базису $f_1, \ldots, f_n$ n-мерного пространства V, а матрица Q – матрицей перехода от третьего базиса $g_1, \ldots, g_n$ ко второму базису $f_1, \ldots, f_n$. Найти матрицу перехода:

а) от второго базиса к первому;

б) от первого базиса к третьему.

44.89. Как связаны между собой базисы $f_1, \ldots, f_n$ и $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, если матрица перехода от базиса e к f:

а) диагональная;
б) скалярная;
в) верхняя треугольная;
г) нижняя треугольная?

44.90. В n-мерном линейном пространстве заданы векторы $e_1, \dots, e_m$, причем $m \geq n+2$. Доказать, что существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = \theta$ и $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$.

44.91. Доказать, что система векторов линейного пространства является базисом тогда и только тогда, когда она образует минимальную порождающую систему векторов пространства.

44.92. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ – два базиса линейного пространства V и $1 \leq k < n$. Доказать, что из векторов второго базиса можно выбрать такие k векторов, что после обмена их с векторами $e_1, \dots, e_k$ из первого базиса получатся снова два базиса пространства V.

44.93. Векторы $x_1, \dots, x_k \in V$ линейно независимы, а базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V таков, что он остается базисом после замены вектора e_i на вектор x_i при любом $i = \overline{1,k}$. Верно ли, что векторы $x_1, \dots, x_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ тоже образуют базис пространства V?

44.94. Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем P, состоящим из q элементов. Найти:

а) число векторов в пространстве V;
б) число базисов пространства V;
в) число невырожденных матриц n-го порядка над полем P.

§45. Линейное подпространство

Непустое подмножество L пространства V называется *линейным подпространством пространства* V, если оно само является линейным пространством относительно законов композиции, действующих в V. Другое определение линейного подпространства, эквивалентное этому, устанавливается теоремой 18.1, которая имеет место и в общем случае.

Как указывалось в §22, множество всех решений однородной системы уравнений

$$Ax = 0 \tag{45.1}$$

с n неизвестными образует линейное подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. В общем случае, когда $A \in P^{m \times n}$, множество всех решений системы (45.1) образует подпространство L линейного пространства P^n, причем его размерность также равна $n - \operatorname{rg} A$.

О таком подпространстве говорят, что оно задано однородной системой (45.1), и записывают это в виде

$$L : Ax = 0 .$$

Другой способ задания линейного подпространства связан с понятием линейной оболочки.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ – система векторов линейного пространства V над полем P. *Линейной оболочкой системы векторов* $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Говорят также, что линейная оболочка *натянута на векторы* $a_1, a_2, \dots, a_k$. Обозначение: $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$. Итак,

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) = \left\{ a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \,\middle|\, \alpha_i \in P,\ i = \overline{1,k} \right\}.$$

Из определения следует, что каждое конечномерное пространство является линейной оболочкой векторов своего базиса.

Теорема 45.1. *Если $a_1, \dots, a_k$ – векторы линейного пространства V, то $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ является линейным подпространством пространства V.*

Теорема 45.2. *Две системы векторов линейного пространства эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.*

Следствие 1. *Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой своей базы.*

Следствие 2. *Размерность линейной оболочки системы векторов равна рангу этой системы:*

$$\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) = \operatorname{rg}(a_1, \dots, a_k) .$$

Пример 45.1. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, натянутой на векторы $a_1 = (1,2,3,1,0)$, $a_2 = (1,1,2,4,1)$, $a_3 = (3,4,7,9,2)$, $a_4 = (1,0,1,7,2)$.

Решение. Составим из векторов a_1, a_2, a_3, a_4 матрицу, расположив их компоненты по-строчно и указав в конце каждой строки наименование соответствующего вектора:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} . \tag{45.2}$$

Отметим, что любое элементарное преобразование строк этой матрицы приводит к новому набору строк, которые остаются в исходной линейной оболочке L. Приведем матрицу (45.2) элементарными преобразованиями строк к верхней ступенчатой форме:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - 3a_1 \\ a_4 - a_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - 2a_2 - a_1 \\ a_4 - 2a_2 + a_1 \end{matrix} .$$

Из последней матрицы следует, что:

– векторы a_3, a_4 являются линейными комбинациями векторов a_1 и a_2: $a_3 = a_1 + 2a_2$, $a_4 = -a_1 + 2a_2$,

– векторы a_1, $a_2 - a_1$, а следовательно, и векторы a_1, a_2 линейно независимы.

Таким образом, $\dim L = 2$ и векторы a_1, a_2 образуют базу системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4, и поэтому являются базисом линейной оболочки L.

Отметим, что в качестве базиса L может быть выбрана не только база рассматриваемой системы векторов, но и, например, ненулевые строки полученной верхней ступенчатой формы, т.е. векторы $a_1 = (1,2,3,1,0)$, $a_2 - a_1 = (0,-1,-1,3,1)$. ■

Пример 45.2. Составить однородную систему алгебраических уравнений, множество решений которой совпадает с линейной оболочкой L, рассмотренной в предыдущем примере.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежит линейной оболочке $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ тогда и только тогда, когда найдутся постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 + \alpha_5 a_5 = x. \tag{45.3}$$

Равенство (45.3) относительно α_j, $j = \overline{1,5}$, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с расширенной матрицей

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & x_2 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & x_3 \\ 1 & 4 & 9 & 7 & x_4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & x_5 \end{array}\right], \tag{45.4}$$

а существование коэффициентов α_j, $j = \overline{1,5}$, в этом соотношении равносильно совместности системы с расширенной матрицей (45.4).

Исследуем совместность этой системы методом Гаусса:

$$B \to \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & x_5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & x_3 - 3x_1 \\ 0 & 3 & 6 & 6 & x_4 - x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & x_2 - 2x_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 - 2x_1 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - 3x_1 + x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 - 3x_5 \end{array}\right].$$

Таким образом, для совместности системы, и следовательно, для того, чтобы вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежал линейной оболочке $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, необходимо и достаточно, чтобы вектор x был решением системы

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + \ x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_3 + \ x_5 = 0, \\ -x_1 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \quad ■$$

Теорема 45.3 (о монотонности размерности). *Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пространства. Подпространство той же размерности, что и все пространство, с ним совпадает.*

Суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$ называется множество

$$\sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + \ldots + x_k \,|\, x_i \in L_i\,,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Представление $x = x_1 + \ldots + x_k$ вектора x называется его *разложением по подпространствам* $L_1, \ldots, L_k$.

Пересечением подпространств $L_1, \ldots, L_k$ называется множество

$$L_1 \cap \ldots \cap L_k = \{x \in V \,|\, x_i \in L_i\,,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Теорема 45.4. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства V являются его линейными подпространствами.*

Теорема 45.5. *Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств.*

Следствие. Размерность суммы линейных подпространств равна рангу совокупности базисов слагаемых подпространств:

$$\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t).,$$

где $e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_s, \ldots, g_1, \ldots, g_t$ – базисы подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$.

Теорема 45.6. *Для любых двух линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V имеет место соотношение*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2\,.$$

Пример 45.3. Найти размерность и какой-либо базис суммы подпространств L_1 и L_2, натянутых на системы векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,1,1,1), \\ a_2 &= (1,1,-1,-1), \\ a_3 &= (1,-1,1,-1) \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} b_1 &= (1,-1,-1,1), \\ b_2 &= (3,-3,-1,1), \\ b_3 &= (3,-1,1,1) \end{aligned}$$

соответственно.

Решение. В силу теоремы 45.5

$$L_1 + L_2 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3).$$

Найдем базис этой линейной оболочки методом, описанным в примере 45.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_1 \\ b_1 - a_1 \\ b_2 - 3a_1 \\ b_3 - 3a_1 \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_3 - a_1 \\ a_2 - a_1 \\ b_1 - a_3 \\ b_2 - 3a_1 \\ b_3 - a_1 - 2a_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_3 - a_1 \\ b_1 - a_3 \\ a_2 - a_1 + a_3 - b_1 \\ b_2 - 2b_1 - a_3 \\ b_3 - b_1 - a_1 - a_3 \end{matrix}.$$

Следовательно, $\dim(L_1 + L_2) = 4$ и базис суммы $L_1 + L_2$ образуют, например, векторы

$$(1,1,1,1),\ (0,-2,0,-2),\ (0,0,-2,2),\ (0,0,0,-4)$$

или векторы a_1, a_2, a_3, b_1 исходных систем. ■

Пример 45.4. Найти размерность и какой-либо базис пересечения подпространств L_1 и L_2 из предыдущего примера.

Решение. 1-й способ. Опишем каждое из подпространств L_1 и L_2 однородной системой линейных алгебраических уравнений (см. пример 45.2):

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & x_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & -2 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & -2 & -2 & x_4 - x_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_3 - x_2 + x_1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & 3 & x_1 \\ -1 & -3 & -1 & x_2 \\ -1 & -1 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 2 & 4 & x_3 + x_1 \\ 0 & -2 & -2 & x_4 - x_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 3 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & 4 & x_3 + x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_2 - x_1 \end{array}\right].$$

Таким образом,

$$L_1 : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; \qquad L_2 : -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит пересечению $L_1 \cap L_2$ тогда и только тогда, когда его компоненты удовлетворяют обеим системам, описывающим подпространства L_1 и L_2:

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{45.5}$$

Тем самым, базисом пересечения $L_1 \cap L_2$ является фундаментальная система решений однородной системы (45.5). Построим ее методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, векторы $e_1 = (0, 1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1, 0)$ образуют базис пересечения и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

2-й способ. Вектор x принадлежит пересечению $L_1 \cap L_2$ тогда и только тогда, когда он представим в виде линейной комбинации как векторов a_1, a_2, a_3, так и векторов b_1, b_2, b_3, т.е. найдутся постоянные α_j, β_j, $j = \overline{1,3}$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3. \tag{45.6}$$

Правое равенство в (45.6) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_j, β_j, $j = \overline{1,3}$. Найдем ее фундаментальную систему решений:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Фундаментальная система такой однородной системы уравнений содержит два решения:

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
1	0	1	−1	0	1
0	0	1	−2	1	0

Из равенства (45.6) получим, что набору $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ (а также
набору $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$) соответствует вектор $e_1 = (2, 0, 2, 0)$, а набо-
ру $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ ($\beta_1 = -2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$) – вектор $e_2 = (1, -1, 1, -1)$.
Эти векторы линейно независимы и, как следует из определения фундамен-
тальной системы решений системы (45.6), через них линейно выражаются
все векторы x, представимые в виде (45.6). Следовательно, e_1, e_2 – базис
$L_1 \cap L_2$ и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

Заметим, что для построения e_1 и e_2 достаточно определить только на-
бор значений $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (или только $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$). ■

Сумма подпространств линейного пространства называется *прямой суммой*, если разложение каждого вектора в ней по слагаемым подпространствам единственно. Обозначение: $L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Теорема 45.7 (критерии прямой суммы). *Для подпространств $L_1, \ldots, L_k$ конечномерного линейного пространства V следующие утверждения равносильны:*

1) *сумма подпространств $L_1, \ldots, L_k$ – прямая;*
2) *совокупность базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ линейно независима;*
3) *совокупность базисов подпространств $L_1, \ldots, L_k$ образует базис суммы $\sum_{i=1}^{k} L_i$;*
4) $\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i$;
5) *существует вектор $a \in \sum_{i=1}^{k} L_i$, для которого разложение по подпространствам $L_1, \ldots, L_k$ единственно;*
6) *произвольная система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_k$, взятых по одному из каждого подпространства L_i, $i = \overline{1,k}$, линейно независима;*
7) *$L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ (для $k = 2$).*

Теорема 45.8. *Линейное пространство V является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда, когда:*
1) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$;
2) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Если пространство V является прямой суммой L_1 и L_2, то в разложении произвольного вектора $x \in V$ по этим подпространствам: $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, вектор x_1 называется *проекцией x на L_1 параллельно L_2*, а вектор x_2, соответственно, – *проекцией x на L_2 параллельно L_1*.

Пример 45.5. Даны многочлены

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^3 + 2t + 4, \\ f_2(t) &= 3t^3 + t^2 - 1, \\ f_3(t) &= 5t^3 + t^2 + 4t + 7 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} g_1(t) &= t^3 + t^2 + 2t, \\ g_2(t) &= 2t^3 + t^2 + t + 3, \\ g_3(t) &= t^3 + 2t^2 + 5t - 3. \end{aligned}$$

Показать, что подпространства $L_1 = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$ и $L_2 = \mathcal{L}(g_1, g_2, g_3)$ в прямой сумме образуют все пространство M_3, и найти проекцию многочлена $p(t) = 6t^3 + 2t^2 + 6t + 7$ на L_1 параллельно L_2.

Решение. В силу изоморфизма линейных пространств M_3 и $\mathbb{R}^4$ решим ту же задачу для линейных подпространств L_1 и L_2, натянутых на арифметические векторы

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 2, 4), \\ a_2 &= (3, 1, 0, -1), \\ a_3 &= (5, 1, 4, 7) \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} b_1 &= (1, 1, 2, 0), \\ b_2 &= (2, 1, 1, 3), \\ b_3 &= (1, 2, 5, -3) \end{aligned}$$

соответственно, и вектора $x = (6, 2, 6, 7)$.

В силу теоремы 45.7 достаточно показать, что
$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) = 4.$$

Имеем
$$L_1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dim L_1 = 2,$$
$$L_2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dim L_2 = 2.$$

Для нахождения $\dim(L_1 + L_2)$ воспользуемся алгоритмом, описанным в примере 45.3:
$$L_1 + L_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Тем самым, $\dim(L_1 + L_2) = 4$ и $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^4$.

Найдем теперь проекцию вектора $x = (6, 2, 6, 7)$ на L_1 параллельно L_2. Для этого разложим вектор x по базису a_1, a_2, b_1, b_2 пространства $\mathbb{R}^4$:
$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2. \tag{45.7}$$

Из этого разложения следует, что искомая проекция – это вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

Решим систему (45.7) методом Гаусса:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -13 & -4 & -5 & -17 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 9 \end{array}\right] \to$$
$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \beta_2 = 0, \\ \beta_1 = 1, \\ \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 = 2. \end{array}$$

Таким образом, проекцией x на L_1 параллельно L_2 является вектор
$$2a_1 + a_2 = (5, 1, 4, 7),$$
а следовательно, проекцией многочлена $p(t)$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, заданным в условии задачи, является многочлен $5t^3 + t^2 + 4t + 7$.

Замечание. Можно отказаться от вычисления $\dim(L_1 + L_2)$, а сразу искать разложение вектора x по совокупности базисов a_1, a_2 и b_1, b_2 подпространств L_1 и L_2, решая систему (45.7). Эта система имеет решение при любой правой части (следовательно, $\mathbb{R}^4 = L_1 + L_2$), она имеет единственное решение (как крамеровская система), и следовательно каждый вектор $x \in \mathbb{R}^4$ имеет единственное разложение по подпространствам L_1 и L_2, т.е. $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$. ∎

Пусть L – линейное подпространство пространства V. Подпространство $L^б$ называется *дополнительным подпространством* к L, если $L \oplus L^б = V$.

Теорема 45.9. *Для любого подпространства L линейного пространства V существует дополнительное подпространство.*

Пример 45.6. Найти какие-либо два различных дополнительных подпространства к подпространству $L_1 = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$ из предыдущего примера.

Решение. Воспользуемся изоморфизмом линейных пространств M_3 и $\mathbb{R}^4$ и тем, что, как было показано в предыдущем примере, L_1 является линейной оболочкой своего базиса из векторов
$$a_1 = (1, 0, 2, 4), \ a_2 - 3a_1 = (0, 1, -6, -13).$$

Дополним эти два вектора до базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$, для чего допишем к матрице, составленной из компонент векторов a_1 и $a_2 - 3a_1$, строки так, чтобы в результате получилась невырожденная матрица. Это можно сделать, например, построив следующую верхнюю треугольную матрицу:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{45.8}$$

Отсюда следует, что векторы $b_1 = (0, 0, 1, 0)$ и $b_2 = (0, 0, 0, 1)$ обладают требуемым свойством, и подпространство $\mathcal{L}(b_1, b_2)$ – дополнительное к L_1.

Для построения другого дополнительного подпространства перейдем от матрицы (45.8) к новой невырожденной матрице, прибавив к ее третьей строке первую:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -13 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Строки матрицы останутся линейно независимыми и, следовательно, будут базисом пространства $\mathbb{R}^4$. Таким образом, линейная оболочка $\mathcal{L}(b_3, b_4)$, натянутая на векторы $b_3 = (1, 0, 3, 4)$, $b_4 = (0, 0, 0, 1)$, образует, очевидно, другое дополнительное подпространство к L_1. ∎

ЗАДАЧИ

45.1. Доказать, что в изоморфных пространствах образ и прообраз линейного подпространства являются линейными подпространствами, изоморфными исходному.

Доказать, что следующие множества арифметических векторов из P^n образуют линейные подпространства, и найти их базис и размерность.

45.2. Все векторы, у которых первая и последняя компоненты равны между собой.

45.3. Все векторы, у которых компоненты с четными номерами равны нулю.

45.4. Все векторы, у которых компоненты с четными номерами равны между собой.

45.5. Все векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$, где α, β произвольны.

45.6. Доказать, что все симметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства матриц $P^{n\times n}$. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства.

45.7. Доказать, что все кососимметрические матрицы образуют линейное подпространство пространства матриц $P^{n\times n}$. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства.

45.8. Доказать, что все матрицы, перестановочные с данной матрицей $A \in P^{n\times n}$, образуют линейное подпространство пространства матриц $P^{n\times n}$. Найти размерность и какой-либо базис этого подпространства в случае, когда $P = \mathbb{C}$ и $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

45.9. Доказать, что если линейное подпространство L пространства многочленов M_n для любого $k = \overline{0,p}$ содержит хотя бы один многочлен степени k и не содержит многочленов степени $k > p$, то оно совпадает с подпространством M_p всех многочленов степени не выше p.

Доказать, что следующие множества многочленов из M_n образуют вещественные линейные подпространства, и найти их базис и размерность.

45.10. Все четные многочлены.

45.11. Все нечетные многочлены.

45.12. Все многочлены, имеющие корень $a \in \mathbb{R}$.

45.13. Все многочлены, имеющие корень $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

45.14. Все многочлены, имеющие своими корнями не равные между собой числа $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

45.15. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных с коэффициентами из произвольного поля P называется *однородным многочленом*, если можно указать такое натуральное число m, что

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall t \in P.$$

Показать, что все однородные многочлены степени k от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из произвольного поля вместе с нулевым многочленом при обычных операциях над многочленами образуют линейное пространство, и найти его размерность.

45.16. Найти размерность и какой-либо базис комплексного арифметического подпространства, заданного системой линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} (1+i)x_1 + (1+3i)x_2 = 0, \\ (1-2i)x_1 + (1+2i)x_2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1-i)x_1 + (2+i)x_2 = 0, \\ (6-4i)x_1 + (9+7i)x_2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1-i)x_1 + (-3+2i)x_2 + (2-i)x_3 = 0, \\ (-4+6i)x_1 + (4-3i)x_2 - 3ix_3 = 0, \\ (-9+i)x_1 + (5-i)x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 + (2+i)x_3 = 0, \\ (1-3i)x_1 - (2+4i)x_2 + (5-5i)x_3 = 0, \\ 2ix_1 + (2+2i)x_2 + (-2+4i)x_3 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + (1+2i)x_3 - (1-i)x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - (1+3i)x_3 + (2-i)x_4 = 0, \\ ix_1 + (1+i)x_2 + x_3 + 2ix_4 = 0, \\ 2ix_1 + 2ix_3 - (2-2i)x_4 = 0, \\ (2-i)x_2 - (1+2i)x_3 + (2-i)x_4 = 0. \end{cases}$

Найти размерность и какой-либо базис линейных оболочек, натянутых на следующие системы векторов соответствующих линейных пространств.

45.17. $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$.

45.18. $a_1 = (1,1,1,1,0)$, $a_2 = (-1,-1,1,1,1)$, $a_3 = (2,2,0,0,-1)$, $a_4 = (1,1,5,5,2)$, $a_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

45.19. $f_1(t) = t^6 + t^4$, $f_2(t) = t^6 + 3t^4 - t$, $f_3(t) = t^6 - 2t^4 + t$, $f_4(t) = t^6 - 4t^4 + 2t$.

45.20. $c_1 = (-3+2i, -i)$, $c_2 = (3+i, 7-6i)$.

45.21. $c_1 = (1, -2, i)$, $c_2 = (2-i, -4+2i, 1+2i)$, $c_3 = (3i, -6i, -3)$.

45.22. $c_1 = (0, 3+i, 4-i, -3)$, $c_2 = (1,1,1,1-i)$, $c_3 = (1, 7+6i, 9-2i, -5-i)$.

45.23. $c_1 = (1,1,1,1)$, $c_2 = (1,1,1,1-i)$, $c_3 = (1,2,1,3)$, $c_4 = (0,0,0,1)$, $c_5 = (2,3,2,4-i)$.

45.24. $A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

45.25. Линейное подпространство L натянуто на систему векторов $x_1, \ldots, x_k$. Доказать, что размерность L равна рангу системы $x_1, \ldots, x_k$, а базисом может служить любая база этой системы.

45.26. Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем P, состоящим из q элементов. Найти количество k-мерных подпространств пространства V.

Найти системы линейных алгебраических уравнений, описывающих линейные оболочки, натянутые на следующие системы векторов.

45.27. $a_1 = (1,-1,1,0)$, $a_2 = (1,1,0,1)$, $a_3 = (2,0,1,1)$.

45.28. $a_1 = (1,-1,1,-1,1)$, $a_2 = (1,1,0,0,3)$, $a_3 = (3,1,1,-1,7)$, $a_4 = (0,2,-1,1,2)$.

45.29. $c_1 = (1+i,3)$, $c_2 = (3-i,3-6i)$.

45.30. $c_1 = (1,1,1,1-i)$.

45.31. $c_1 = (0,3+i,4-i,-3)$, $c_2 = (1,7+2i,9-2i,-5-i)$, $c_3 = (1,4+i,5-i,-2-i)$, $c_4 = (1,1,1,1-i)$.

45.32. Пусть L – m-мерное линейное подпространство n-мерного пространства V. Доказать, что можно найти такой базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства V, в котором первые m векторов $e_1,\ldots,e_m$ принадлежат подпространству L.

45.33. Доказать, что каково бы ни было m-мерное подпространство L n-мерного пространства V, где $m < n$, найдется базис V, в котором: а) не содержится ни одного вектора из L; б) содержится ровно k векторов из L, $k < m$.

45.34. Можно ли составить базис пространства M_5 из многочленов пятой степени? Можно ли, наоборот, найти базис этого пространства, в котором бы не содержалось ни одного многочлена пятой степени?

45.35. Доказать, что линейная оболочка системы векторов $x_1,\ldots,x_k$ является пересечением всех подпространств, содержащих векторы $x_1,\ldots,x_k$, и в этом смысле является наименьшим подпространством, содержащим эти векторы.

45.36. Пусть V – n-мерное линейное пространство. Если e – какой-либо базис пространства V, то для каждого вектора $a \in V$ обозначим через a_e строку из его координат в базисе e. Доказать, что две линейно независимые системы $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $b_1,b_2,\ldots,b_k$ $(k \le n)$ пространства V эквивалентны тогда и только тогда, когда в любом базисе e соответствующие миноры k-го порядка матриц A_e и B_e, составленные из строк $(a_1)_e,(a_2)_e,\ldots,(a_k)_e$ и $(b_1)_e,(b_2)_e,\ldots,(b_k)_e$, пропорциональны.

45.37. Доказать, что для любого $p \in \mathbb{N}$
$$\dim(L_1+\ldots+L_p) \le \dim L_1 + \ldots + \dim L_p.$$

45.38. Пусть L_1 – линейная оболочка векторов $a_1,\ldots,a_k$, L_2 – линейная оболочка векторов $b_1,\ldots,b_l$. Доказать, что базисом суммы L_1+L_2 может служить любая база системы $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_l$. В частности, базис L_1+L_2 можно получить дополнением как базиса L_1, так и базиса L_2.

Найти размерность и какой-либо базис суммы подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1,\ldots,a_k)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1,\ldots,b_l)$ для каждой из следующих систем векторов соответствующих линейных пространств.

45.39. $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,1,2)$, $a_3 = (-2,0,1,1)$; $b_1 = (-1,3,2,-1)$, $b_2 = (1,1,0,-1)$.

45.40. $a_1 = (2,-5,3,4)$, $a_2 = (1,2,0,-7)$, $a_3 = (3,-6,2,5)$; $b_1 = (2,0,-4,6)$, $b_2 = (1,1,1,1)$, $b_3 = (3,3,1,5)$.

45.41. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

45.42. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;
$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

45.43. Доказать, что сумма L_1+L_2 двух линейных подпространств равна пересечению всех линейных подпространств, содержащих как L_1, так и L_2.

45.44. Доказать, что для любого $p \in \mathbb{N}$
$$\dim(L_1+\ldots+L_p) \ge \max(\dim L_1,\ldots,\dim L_p),$$
причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда одно из подпространств L_j содержит все остальные подпространства.

45.45. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем. Доказать, что объединение конечного множества подпространств в V является подпространством тогда и только тогда, когда одно из подпространств содержит все остальные.

45.46. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем P и $V_1,\ldots,V_k$ – его подпространства, причем $V_1 \cup \ldots \cup V_k = V$. Доказать, что $V = V_j$ для некоторого $j = 1,\ldots,k$.

45.47. Пусть V – линейное пространство над полем P, V_1 и

V_2 – его подпространства, причем $V_1 \cup V_2 = V$. Доказать, что либо $V = V_1$, либо $V = V_2$.

45.48. Привести пример такого пространства V над конечным полем, что $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где все V_1, V_2, V_3 являются подпространствами, отличными от V и от нулевого подпространства.

Найти размерность и какой-либо базис пересечения двух подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_l)$ для каждой из следующих систем векторов.

45.49. $a_1 = (2,1,0)$, $a_2 = (1,2,3)$, $a_3 = (-5,-2,1)$;
$b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (-1,3,0)$, $b_3 = (2,0,3)$.

45.50. $a_1 = (1,2,1,1)$, $a_2 = (2,3,1,0)$, $a_3 = (3,1,1,-2)$;
$b_1 = (0,4,1,3)$, $b_2 = (1,0,-2,-6)$, $b_3 = (1,0,3,5)$.

45.51. $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$, $a_3 = (0,0,1,1)$;
$b_1 = (1,0,1,0)$, $b_2 = (0,2,1,1)$, $b_3 = (1,2,1,2)$.

Найти размерности и какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_l)$, натянутых на следующие системы комплексных арифметических векторов; рассмотреть два случая: когда основным полем является поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и когда – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

45.52. $a_1 = (1,2,3)$, $a_2 = (1,-2,i)$, $a_3 = (2,0,3+i)$;
$b_1 = (1,0,3i)$, $b_2 = (1,4,3+2i)$, $b_3 = (-1,4,3-4i)$.

45.53. $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,2,1,3-i)$, $a_3 = (2,3,2,4-i)$,
$a_4 = (1,1,1,1-i)$; $b_1 = (0,1,0,3-i)$, $b_2 = (0,2,0,5-2i)$,
$b_3 = (0,2+i,0,6+i)$, $b_4 = (1,4+i,5-i,-2-i)$.

Найти размерность и какой-либо базис пересечения двух подпространств L_1 и L_2, если первое задано однородной системой уравнений, а второе – как линейная оболочка системы векторов a_1, a_2, a_3.

45.54. $\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ $\quad a_1 = (2,3,-1)$, $a_2 = (1,2,2)$, $a_3 = (1,1,-3)$.

45.55. $\{-5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0;$ $\quad a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,-1)$, $a_3 = (1,3,0,-4)$.

45.56. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$ $\quad a_1 = (-1,6,4,7,-2)$, $a_2 = (-2,3,0,5,-2)$, $a_3 = (-3,6,5,6,-5)$.

45.57. Найти размерности и какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, если первое задано однородной системой уравнений, а второе – как линейная оболочка системы комплексных арифметических векторов a_1, a_2, a_3 (рассмотреть два случая: когда основным полем является поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел и когда – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел):

$$\begin{cases} 3x_1 + (1-2i)x_2 + ix_3 = 0, \\ (3+6i)x_1 + 5x_2 - (2-i)x_3 = 0; \end{cases} \quad a_1 = (1,-2,i),\ a_2 = (2,1+i,-i),\ a_3 = (0,5+i,-3i).$$

Найти какие-либо базисы суммы и пересечения двух подпространств L_1 и L_2, заданных однородными системами уравнений.

45.58. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

45.59. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

45.60. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 - x_4 = 0, \\ -3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

45.61. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств пространства $\mathbb{R}^{3\times 3}$, натянутых на системы матриц

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

45.62. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств пространства M_3, натянутых на системы многочленов $1 + 2t + t^3$, $1 + t + t^2$, $t - t^2 + t^3$ и $1 + t^2$, $1 + 3t + t^3$, $3t - t^2 + t^3$ соответственно.

45.63. Доказать, что если размерность суммы двух подпространств на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение – с другим.

45.64. Доказать, что если размерность суммы двух подпространств больше размерности всего пространства, то пересечение этих подпространств содержит ненулевой вектор.

45.65. Матрицы A_1 и A_2 имеют одинаковые размеры. Пространства V_1, V_2 порождены их строками, а пространства W_1, W_2 – их столбцами. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\operatorname{rg}(A_1 + A_2) = \operatorname{rg} A_1 + \operatorname{rg} A_2$;

б) $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$;

в) $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$.

45.66. Доказать, что

а) $(L \cap L_1) + (L \cap L_2) \subset L \cap (L_1 + L_2)$;

б) $L + (L_1 \cap L_2) \subset (L + L_1) \cap (L + L_2)$.

Привести примеры подпространств L, L_1, L_2, для которых в этих соотношениях включения являются строгими.

45.67. Доказать, что

а) если $L_1 \subset L$, то $(L \cap L_1) + (L \cap L_2) = L \cap (L_1 + L_2)$;

б) если $L \subset L_1$, то $L + (L_1 \cap L_2) = (L + L_1) \cap (L + L_2)$.

45.68. Для вектора $x = (1, 0, 1)$ найти два различных разложения по подпространствам L_1 и L_2, рассмотренным в задаче 45.49.

45.69. Пусть V – линейное пространство над бесконечным полем. Доказать, что если его вектор x имеет два различных разложения по подпространствам $L_1, \ldots, L_k$, то он имеет бесконечно много таких разложений.

45.70. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n$ арифметических векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть прямая сумма подпространства L_1, описываемого уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 0$, и подпространства L_2, описываемого системой уравнений $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Найти проекции единичных векторов $e_1, \ldots, e_n$ естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

45.71. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^{n \times n}$ есть прямая сумма подпространств L_1 – симметрических и L_2 – кососимметрических матриц. Найти проекции A_1 и A_2 матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

45.72. Показать, что линейные подпространства L_1 и L_2, натянутые на системы векторов $a_1 = (2, 3, 11, 5)$, $a_2 = (1, 1, 5, 2)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$ и $b_1 = (2, 1, 3, 2)$, $b_2 = (1, 1, 3, 4)$, $b_3 = (5, 2, 6, 2)$ соответственно, дают в прямой сумме все пространство $\mathbb{R}^4$ и найти разложение вектора $x = (2, 0, 0, 3)$ по этим подпространствам.

45.73. Доказать, что пространство M_n является прямой суммой подпространства всех четных и подпространства всех нечетных многочленов степени не выше n.

45.74. Доказать, что пространство M_3 является прямой суммой следующих подпространств L_1 и L_2, и найти проекцию многочлена $p(t) = t^3 + 1$ на L_1 параллельно L_2:

а) $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(1) = f'(1) = 0\}$,
$L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f'(0) = 0\}$;

б) $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f(1)\}$,
$L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(2t) = 2f(t) \, \forall t \in \mathbb{R}\}$;

в) $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(-1) = f(0) = f(1) = 0\}$,
$L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f'(1) = 0\}$.

45.75. В пространстве $\mathbb{C}^2$ подпространство L_1 натянуто на вектор $(i, 2)$, а подпространство L_2 – на вектор $(1 + i, 3)$. Найти проекцию вектора a на L_1 параллельно L_2, если:

а) $a = (-1, 2i)$; б) $a = (3 - i, 3 - 6i)$; в) $a = (10 + 15i, -15i)$.

45.76. Доказать, что для того, чтобы сумма более чем двух подпространств $L_1 + L_2 + \ldots + L_p$ была прямой, необходимо, чтобы выполнялось условие $L_i \cap L_j = \{\theta\}$ для всех $i \neq j$. Является ли это условие достаточным?

45.77. Для подпространства L, натянутого на векторы $a_1 = (1, 3, 0, -1)$, $a_2 = (2, 5, 1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 1, 3)$, найти два различных дополнительных подпространства.

45.78. В пространстве M_n найти два различных дополнительных подпространства для подпространства L многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$.

45.79. В пространстве $\mathbb{R}^{3\times 3}$ найти два различных дополнительных подпространства для подпространства L кососимметрических матриц.

45.80. Пространство V разложено в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_p$. Доказать, что:

а) если вектор a имеет разложение $a = a_1 + \ldots + a_p$, $a_j \in L_j$, то разложение вектора λa по подпространствам $L_1, \ldots, L_p$ имеет вид

$$\lambda a = \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_p;$$

б) если вектор b имеет разложение $b = b_1 + \ldots + b_p$, $b_j \in L_j$, то разложение вектора $a + b$ по подпространствам $L_1, \ldots, L_p$ имеет вид

$$a + b = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_p + b_p).$$

45.81. Пусть P – поле из k элементов, U – подпространство в пространстве V размерности n над полем P, размерности m. Найти число всех дополнительных к U подпространств.

45.82. Доказать, что подпространства $L_1, \ldots, L_p$ имеют общее дополнительное подпространство в том и только том случае, когда их размерности равны.

45.83. Известно, что функционал $d(L)$ на множестве всех подпространств линейного пространства V обладает следующими свойствами:

а) если подпространства L_1 и L_2 имеют нулевое пересечение, то

$$d(L_1 + L_2) = d(L_1) + d(L_2),$$

б) если $\dim L = 1$, то $d(L) = 1$.

Доказать, что $d(L) = \dim L$ для всех подпространств L.

§46. Линейное аффинное многообразие

Приведенные в §18 определение и элементарные свойства линейного многообразия (применительно к вещественным линейным пространствам) сохраняются и в линейном пространстве над произвольным полем. Воспроизведем известные факты и дополним их рядом новых.

Из определения линейного аффинного многообразия вытекают следующие факты.

1°. *Вектор сдвига x_0 принадлежит линейному многообразию.*

2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству.*

Теорема 46.1. *Два линейных аффинных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2 = L$ и*

$x_1 - x_2 \in L$.

Следствие 1. *Вектором сдвига может быть любой вектор линейного многообразия.*

Следствие 2. *Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства.*

Размерностью линейного аффинного многообразия называется размерность его направляющего подпространства. Линейное многообразие размерности 1 называется *прямой в линейном пространстве*, размерности 2 – *плоскостью*, размерности $(n-1)$, где $n = \dim V$, – *гиперплоскостью*.

Очевидно, что прямая в линейном пространстве определяется уравнением

$$x = x_0 + ta,\ t \in P,$$

где x_0 – вектор сдвига и a – базис направляющего подпространства, а плоскость – уравнением

$$x = x_0 + up_1 + vp_2,\ u, v \in P,$$

где x_0 – вектор сдвига и p_1, p_2 – базис направляющего подпространства.

Теорема 46.2. *Множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений с n неизвестными и с коэффициентами из произвольного поля P является линейным аффинным многообразием в арифметическом пространстве P^n, полученным сдвигом подпространства решений приведенной однородной системы на частное решение неоднородной системы.*

Отметим, что вытекающее отсюда утверждение о размерности линейного многообразия решений неоднородной системы остается в силе и для случая произвольного поля.

Пример 46.1. Линейное многообразие H арифметических векторов пространства $\mathbb{Z}_2^5$ описывается системой

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 = 1, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} = 1, \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} + x_5 = 0. \end{cases}$$

Найти его размерность и показать, что общее количество векторов в H конечно.

Решение. Применим метод Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&1\\ 1&1&0&0&1&0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Вектор сдвига многообразия H – это частное решение последней системы: например, вектор $a = (0, 0, 1, 0, 0)$, а направляющее подпространство L – это множество решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \qquad (46.1)$$

Ее фундаментальную систему образуют векторы

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1

Таким образом, общее решение системы (46.1) задается соотношением

$$x = c_1(1,1,0,1,0) + c_2(1,0,0,0,1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

Отсюда следует, что $\dim L = 2$ и, так как каждый коэффициент c_i в этом соотношении принимает только два значения, то L содержит 4 вектора.

Тем самым, $\dim H = 2$ и общее количество векторов в многообразии $H = a + L$ конечно и равно 4. ■

Пример 46.2. Доказать, что множество

$$H = \{f(t) \in M_4 \mid f(1) = 1, f'(0) + 2f(0) = 2\}$$

образует линейное многообразие в пространстве M_4. Найти его размерность.

Решение. Опишем множество H системой линейных соотношений, которым удовлетворяют коэффициенты многочлена $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 \in H$:

$$\begin{matrix} f(1) = 1 & \iff & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \\ f'(0) + 2f(0) = 2 & \iff & 2a_0 + a_1 = 2. \end{matrix}$$

Решим аналогичную задачу для арифметических векторов $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ из пространства $\mathbb{R}^5$, изоморфного пространству M_4.

Множество решений неоднородной системы

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \\ 2a_0 + a_1 = 2 \end{cases} \tag{46.2}$$

образует линейное многообразие с направляющим подпространством, описываемым соответствующей (46.2) приведенной однородной системой, и вектором сдвига, являющимся частным решением системы (46.2). Таким образом, направляющее подпространство – это множество решений системы

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ 2a_0 + a_1 = 0, \end{cases}$$

размерность которого равна $5 - 2 = 3$, а вектор сдвига – это, например, вектор

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.$$

Это означает, что исходное множество H образует линейное аффинное многообразие с вектором сдвига $f_0(t) = 1$ и $\dim H = 3$. ■

Пример 46.3. Описать линейное многообразие $H = a + L$ системой уравнений, если $a = (2, 0, 0, 1, 1)$, а направляющее подпространство L натянуто на векторы $a_1 = (1, 1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (0, 2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (2, 4, 1, 5, 2)$.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежит линейному многообразию $H = a + L$ тогда и только тогда, когда вектор $x - a$ принадлежит линейной оболочке $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$. Как было показано в примере 45.2, это

равносильно совместности следующей системы относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + + 2\alpha_3 = x_1 - 2, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = x_2, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = x_4 - 1, \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 = x_5 - 1. \end{cases} \tag{46.3}$$

Совместность этой системы исследуем методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 2 & x_1 - 2 \\ 1 & 2 & 4 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & 5 & x_4 - 1 \\ 1 & 0 & 2 & x_5 - 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 2 & x_1 - 2 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 - x_1 + 2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 - 2x_1 + 3 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 + 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 2 & x_1 - 2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_3 + x_2 - x_1 + 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_4 + x_2 + 3x_1 - 4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 + 1 \end{array}\right].$$

Таким образом, для совместности системы (46.3), и следовательно, для того, чтобы вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принадлежал линейному многообразию H необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_5 = 1. \end{cases} \quad ■$$

Пример 46.4. Описать линейное многообразие $H = a + L$ системой уравнений, если $a = (1, 1, 1, 1, 1)$, а направляющее подпространство L задано однородной системой

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_3 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из теории систем линейных алгебраических уравнений следует, что данная однородная система является приведенной для искомой системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = b_1, \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = b_2, \\ -x_1 + x_3 + 2x_5 = b_3. \end{cases}$$

Константы b_1, b_2, b_3 в правых частях надо подобрать так, чтобы вектор сдвига $a = (1, 1, 1, 1, 1)$ был одним из решений системы. Тривиальной подстановкой получим: $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 2$. ■

Линейные аффинные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ в линейном пространстве V называются *параллельными*, если либо $L_1 \subset L_2$, либо $L_2 \subset L_1$.

Теорема 46.3. *Если два линейных аффинных многообразия с непустым пересечением параллельны, то одно из них содержит другое.*

Следствие. *Если линейные многообразия параллельны, то либо они не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.*

Теорема 46.4. *Непустое пересечение линейных аффинных многообразий $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ является линейным многообразием с направляющим подпространством $L_1 \cap L_2$.*

Теорема 46.5. *Всякое k-мерное линейное аффинное многообразие в n-мерном пространстве можно задать в виде пересечения $n - k$ гиперплоскостей.*

Теорема 46.6. *Пересечение линейного аффинного многообразия $H = x_0 + L$ с любым подпространством, дополнительным к L, состоит ровно из одного вектора.*

ЗАДАЧИ

46.1. Что представляет собой линейное многообразие размерности 0?

46.2. Что представляет собой линейное многообразие размерности n в n-мерном пространстве V?

46.3. Доказать, что линейное многообразие $H = a + L$ является подпространством тогда и только тогда, когда его вектор сдвига a принадлежит направляющему подпространству.

46.4. Доказать, что для того, чтобы линейное многообразие $H = a + L$ было подпространством, необходимо, чтобы сумма любых двух его векторов принадлежала направляющему подпространству L.

46.5. Пусть V – линейное пространство над полем P характеристики, большей двух. Доказать, что для того, чтобы линейное многообразие $H = a + L$ в V было подпространством, достаточно, чтобы сумма каких-либо двух его векторов принадлежала направляющему подпространству L. Верен ли этот результат, если характеристика поля P равна двум?

46.6. Пусть линейное многообразие $H = a + L$ не является подпространством. Может ли объединение линейного многообразия H и его направляющего подпространства L являться подпространством?

Найти вектор сдвига и направляющее подпространство для линейного многообразия, описанного системой.

46.7. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 = 0,\\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=3,\\ 2x_1+x_2-3x_3+3x_4=-1,\\ x_2-x_3+x_4=-1.\end{cases}$ **46.8.** $\begin{cases} x_1-x_3-3x_4=1,\\ 2x_1+x_2-7x_4=4,\\ x_1-x_2-3x_3-2x_4=-1,\\ x_2+2x_3-x_4=2.\end{cases}$

Найти вектор сдвига и направляющее подпространство для линейного многообразия в пространстве комплексных арифметических векторов, если это многообразие описано неоднородной системой; рассмотреть два случая: когда основное поле – поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и когда – поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

46.9. $\begin{cases} (1-i)x_1+(1+i)x_2-x_3=i,\\ 2x_1+2ix_2-(1+i)x_3=-1+i,\\ (3-i)x_1+(1+3i)x_2-(2+i)x_3=-1+2i.\end{cases}$

46.10. $\begin{cases} x_1-ix_2+x_3+x_4=2-i,\\ ix_1+ix_2-x_3=-2+i,\\ x_1-x_2-ix_3-x_4=-2+i.\end{cases}$

Найти вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия, описанного следующими системами, в зависимости от значения λ (считать, что основное поле – $\mathbb{C}$).

46.11. $\begin{cases} \lambda x_1+ix_2-2x_3=-2\lambda,\\ -x_1-ix_2-2\lambda x_3=2\lambda.\end{cases}$

46.12. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=\lambda,\\ x_1+x_2+2x_3=\lambda-i,\\ -x_1+x_2-8x_3+\lambda x_4=3i-2.\end{cases}$

46.13. Доказать, что в изоморфных линейных пространствах образ (прообраз) линейного многообразия $H = x_0 + L$ является линейным многообразием, вектором сдвига которого служит образ (прообраз) вектора x_0, а направляющим подпространством – образ (прообраз) подпространства L.

46.14. Доказать, что в пространстве многочленов M_n следующие множества многочленов $f(t)$ являются линейными многообразиями, и найти их размерности:

а) $f(t_1) = c$, где $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

б) $f'(t_1) = c$, где $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

в) $\alpha_0 f(t_1) + \alpha_1 f'(t_1) = c$, где $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$ и $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

г) $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i f(t_i) = c$, где $k < n$ и $\alpha_0^2 + \ldots + \alpha_k^2 \neq 0$, $t_1, c \in \mathbb{R}$ произвольны;

д) $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f(t_i) = c$, где $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 \neq 0$, $c, t_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$ произвольны;

е) $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{a_i}^{b_i} f(t)\,dt = c$, где $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 \neq 0$ и $c, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$ таковы, что $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k$.

46.15. Доказать, что в пространстве квадратных матриц

$\mathbb{R}^{n\times n}$ соответствующего порядка n следующие множества матриц X являются линейными многообразиями, и найти их размерности:

а) $\operatorname{tr} X = c$, где $c \in \mathbb{R}$;

б) $AX = B$, где матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ таковы, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A \mid B]$;

в) $XA = B$, где матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ таковы, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A^T \mid B^T]$;

г) $AXB = C$, где матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ таковы, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[A \mid C]$ и $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}[B^T \mid C^T]$;

д) $[X, A] = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$;

е) $[X, A] = B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

46.16. Доказать, что в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$

а) все стохастические матрицы;

б) все дважды стохастические матрицы

образуют линейное многообразие, и найти его размерность.

Построить системы линейных уравнений, описывающие линейные многообразия $H = a + L$ со следующими векторами сдвига a и направляющими подпространствами L, натянутыми на указанные системы векторов.

46.17. $e_1 = (0, 1, 3, -4)$, $e_2 = (2, -1, 0, 2)$, $e_3 = (2, 1, 6, -6)$, $a = (1, -2, -1, 0)$

46.18. $e_1 = (1, -1, 2, 1)$, $e_2 = (0, -1, 1, 1+i)$, $e_3 = (-3, 1, -2, i)$, $a = (1, 0, 1, 0)$

46.19. $e_1 = (1, 1, 2, 2)$, $e_2 = (0, 3, 1, -1)$, $e_3 = (2, 0, 1, 0)$, $a = (1, 2, 1, -1)$

46.20. $e_1 = (1, i, 2, 1)$, $e_2 = (i, 0, 1, 2i)$, $e_3 = (2i, -1, 1 + 2i, 3i)$, $a = (1, 3i, 7, -1)$

Построить системы линейных уравнений, описывающие линейные многообразия $H = a + L$ со следующими векторами сдвига a и направляющими подпространствами L, заданными однородными системами.

46.21. $a = (1, 0, -2, -1)$, $L: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

46.22. $a = (1, -2, -2)$, $L: \begin{cases} x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 = 0, \\ 2ix_1 - x_2 + ix_3 = 0, \\ 3ix_1 - 2x_2 + (1+2i)x_3 = 0. \end{cases}$

46.23. Что можно сказать о матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если известно, что для любого $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ система $Ax = b$ описывает линейное многообразие размерности 1? размерности 2?

46.24. Доказать, что в линейном многообразии размерности k, не являющемся подпространством, можно найти линейно независимую систему, состоящую из $k+1$ векторов.

46.25. Доказать, что в линейном многообразии размерности k всякая система, состоящая из $k+2$ векторов, линейно зависима.

46.26. Доказать, что для любых $k+1$ линейно независимых векторов существует, причем единственное, линейное многообразие размерности k, содержащее эти векторы.

46.27. Доказать, что линейное многообразие размерности k, содержащее линейно независимые векторы $x_0, x_1, \ldots, x_k$, может быть описано как множество всех линейных комбинаций $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, коэффициенты которых удовлетворяют условию $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.

46.28. Описать все линейные многообразия n-мерного линейного пространства V, содержащие линейно независимые векторы $x_0, x_1, \ldots, x_k$, где $k \leq n-1$.

46.29. Пусть V – n-мерное пространство над полем P, состоящим из q элементов. Найти число k-мерных линейных многообразий пространства V.

46.30. Пусть H – произвольное линейное многообразие в линейном пространстве V. Доказать, что бинарное отношение, определенное правилом:

$$x \sim y \iff x \in H, y \in H$$

является отношением эквивалентности на множестве всех векторов пространства V.

46.31. *Суммой* $H_1 + H_2$ *линейных многообразий* $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ называется множество всех векторов вида $z_1 + z_2$, где $z_1 \in H_1$, $z_2 \in H_2$. Доказать, что сумма линейных многообразий H_1 и H_2 также является многообразием. Найти его направляющее подпространство.

46.32. *Произведением* λH *линейного многообразия* $H = a + L$ *на число* называется множество всех векторов вида λz, где $z \in H$. Доказать, что произведение многообразия H на число λ также является многообразием. Найти его направляющее подпространство.

46.33. В линейном пространстве V фиксировано подпространство L. Будет множество M всех линейных многообразий пространства V, полученных сдвигом подпространства L, линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, определенных в предыдущих двух задачах?

46.34. Показать, что если умножение многообразия $H = a + L$ на число λ ввести по правилу $\lambda H = \lambda a + L$, то множество M из предыдущей задачи будет линейным пространством. (Полученное пространство M называется *фактор-пространством пространства V по подпространству L*.)

46.35. Пусть в условиях предыдущей задачи L — k-мерное подпространство n-мерного пространства V. Какова в таком случае размерность фактор-пространства M?

46.36. В пространстве $\mathbb{R}^5$ дана плоскость $x = x_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2$, где $x_0 = (2, 3, -1, 1, 1)$, $a_1 = (3, -1, 1, -1, 1,)$, $a_2 = (-1, 1, 1, 1, -1)$. Установить, принадлежат ли ей векторы $u = (1, 6, 4, 4, -2)$ и $v = (1, 6, 5, 4, -2)$.

46.37. Доказать, что если прямая имеет два общих вектора с плоскостью, то она содержится в этой плоскости.

46.38. Определить взаимное расположение многообразия $H = x_0 + L$, где $x_0 = (1, 0, 0, 1)$, а L натянуто на векторы $y_1 = (5, 2, -3, 1)$, $y_2 = (4, 1, -1, 0)$, $y_3 = (-1, 2, -5, 3)$, и прямой $x = x_0 + tq$, если:

а) $x_0 = (3, 1, -4, 1)$, $q = (-1, 1, 2, 1)$;

б) $x_0 = (3, 0, -4, 1)$, $q = (-1, 1, 2, 1)$;

в) $x_0 = (-2, 0, -1, 2)$, $q = (1, 1, -2, 1)$.

46.39. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$ линейного пространства V размерности $n > 1$ лежали в одной плоскости.

46.40. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$ линейного пространства V имели один общий вектор, но не совпадали.

Доказать, что прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$ пересекаются, и найти их пересечение. Указать плоскость, в которой лежат эти прямые.

46.41. $x_1 = (9, 3, 6, 15, -3)$, $q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)$,
$x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)$.

46.42. $x_1 = (2, 1, 1, 3, -3)$, $q_1 = (2, 3, 1, 1, -1)$,
$x_2 = (1, 1, 2, 1, 2)$, $q_2 = (1, 2, 1, 0, 1)$.

46.43. $x_1 = (3, 1, 2, 1, 3)$, $q_1 = (1, 0, 1, 1, 2)$,
$x_2 = (2, 2, -1, -1, -2)$, $q_2 = (2, 1, 0, 1, 1)$.

46.44. Выяснить, при каком значении параметра λ прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$, где $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $q_1 = (2, 3, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 1, \lambda)$, $q_2 = (3, 2, 0, 0)$, принадлежат линейному многообразию наименьшей размерности.

46.45. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы существовала единственная прямая, пересекающая две данные прямые $x = x_1 + tq_1$, $x = x_2 + tq_2$ и содержащая заданный вектор c.

Найти прямую, содержащую вектор c и пересекающую прямые $x = x_1 + tq_1$, $x = x_2 + tq_2$. Найти пересечения искомой прямой с обеими заданными прямыми.

46.46. $c = (8, 9, -11, -15)$, $x_1 = (1, 0, -2, 1)$, $q_1 = (1, 2, -1, -5)$,
$x_2 = (0, 1, 1, -1)$, $q_2 = (2, 3, -2, -4)$.

46.47. $c = (4, 5, 2, 7)$, $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $q_1 = (1, 2, 1, 0)$,
$x_2 = (2, 2, 3, 1)$, $q_2 = (1, 0, 1, 3)$.

46.48. Доказать, что любые две прямые линейного пространства V размерности $n \geq 3$ содержатся в некотором трехмерном линейном многообразии пространства V.

46.49. Доказать, что прямые $x = x_1 + tq_1$ и $x = x_2 + tq_2$, где $x_1 = (8, 2, 5, 15, -3)$, $q_1 = (7, -4, 11, 13, -5)$, $x_2 = (-7, 2, -6, -5, 3)$, $q_2 = (2, 9, -10, -6, 4)$, не пересекаются. Построить линейное многообразие размерности 3, содержащее эти прямые.

46.50. Доказать, что любые две плоскости линейного пространства V, $\dim V = n \geq 3$, содержатся в некотором линейном многообразии размерности не выше 5.

Определить взаимное расположение плоскостей $x_0 + t_1 p_1 + t_2 p_2$ и $y_0 + t_1 q_1 + t_2 q_2$.

46.51.

$x_0 = (3, 1, 2, 0, 1)$, $p_1 = (2, -6, 3, 1, -6)$, $p_2 = (0, 5, -2, -1, 6)$,
$y_0 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $q_1 = (-1, 1, -1, 0, 1)$, $q_2 = (-1, 3, -1, -1, 2)$.

46.52.

$x_0 = (7, -4, 0, 3, 2)$, $p_1 = (-1, 1, 1, 1, 1)$, $p_2 = (1, -1, 1, 1, 1)$,
$y_0 = (6, -5, -1, 2, 3)$, $q_1 = (1, 1, -1, 1, 1)$, $q_2 = (1, 1, 1, -1, 1)$.

46.53. $x_0 = (2, -3, 1, 5, 0)$, $p_1 = (3, -2, 1, 0, 1)$, $p_2 = (-1, 5, -2, 0, 3)$, $y_0 = (0, -1, 0, 4, 1)$, $q_1 = (1, 2, 4, 0, -2)$, $q_2 = (6, 3, 4, 0, 3)$.

46.54. $x_0 = (-3, -2, 1, -1, 2)$, $p_1 = (1, -1, 1, 1, 3)$, $p_2 = (-1, 2, 1, 2, -2)$, $y_0 = (-1, 0, 3, 3, 8)$, $q_1 = (1, 1, -3, -3, 1)$, $q_2 = (0, 1, 2, 3, 1)$.

46.55. Описать все случаи взаимного расположения двух плоскостей $x = x_0 + t_1p_1 + t_2p_2$ и $x = y_0 + t_1q_1 + t_2q_2$ в n-мерном пространстве и указать необходимые и достаточные условия для каждого из этих случаев.

46.56. Доказать, что два линейных многообразия пространства V размерностей k и l соответственно содержатся в некотором линейном многообразии размерности не выше $k + l + 1$.

46.57. Пусть H_1 и H_2 – два линейных многообразия размерностей k_1 и k_2 n-мерного пространства V имеют общий вектор, причем $k_1 + k_2 > n$. Доказать, что их пересечение есть линейное многообразие размерности не меньше $k + l - n$. Сформулировать утверждения, которые вытекают отсюда для трехмерного и четырехмерного пространств.

46.58. Найти уравнение линейного многообразия минимальной размерности, содержащего векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 4, 1, 3)$, $a_3 = (4, 8, 0, 3)$, $a_4 = (3, 5, 0, 1)$, и найти пересечение этого многообразия с прямой $x = x_0 + qt$, где

а) $x_0 = (0, 0, 1, 3)$, $q = (0, 0, 1, 0)$;

б) $x_0 = (0, 0, 1, 3)$, $q = (1, 3, 0, 2)$.

46.59. Доказать, что в линейном пространстве V над полем характеристики 2 объединение любого линейного многообразия $H = a + L$ и его направляющего подпространства L является линейным подпространством.

46.60. Доказать, что два линейных многообразия $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ пересекаются тогда и только тогда, когда $a_1 - a_2 \in L_1 + L_2$.

46.61. Пусть $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ – два непересекающихся линейных многообразия. Доказать, что минимальная размерность линейного многообразия, содержащего H_1 и параллельного H_2, равна

$$\dim H_1 + \dim H_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

46.62. Пусть $H_1 = a_1 + L_1$ и $H_2 = a_2 + L_2$ – две непересекающиеся прямые в линейном пространстве V над полем P и пусть λ – фиксированный элемент из P, отличный от нуля и единицы. Выяснить, что представляет собой множество всех векторов вида $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$, где a_1 и a_2 пробегают соответственно H_1 и H_2.

46.63. Пусть V – линейное пространство над полем P характеристики, не равной 2. Доказать, что H является линейном многообразием в пространстве V тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя различными векторами $a, b \in H$ в H содержится прямая, содержащая a и b. Верно ли это утверждение, если характеристика поля P равна 2?

46.64. Доказать, что если прямая $x = x_0 + tq$ и гиперплоскость $a + L$ не пересекаются, то $q \in L$.

46.65. Доказать, что если гиперплоскости $a_1 + L_1$ и $a_2 + L_2$ не пересекаются, то $L_1 = L_2$.

46.66. Доказать, что если пересечение гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$ n-мерного пространства непусто, то оно есть линейное многообразие, размерность которого не меньше $n - k$.

46.67. Доказать, что всякое линейное многообразие размерности k в n-мерном пространстве можно задать как пересечение $n - k$ гиперплоскостей.

46.68. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – любые вектора линейного пространства V над полем P. Доказать, что все векторы вида

$$x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k,$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in P$ удовлетворяют условию $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, образуют линейное многообразие H, размерности равной рангу системы векторов $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$.

Показать, что H есть многообразие наименьшей размерности, содержащее все векторы $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

Глава XIII. Евклидовы и унитарные пространства

§47. Скалярное произведение. Матрица Грама

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пространство (т.е. $P = \mathbb{C}$ или $P = \mathbb{R}$). Отображение

$$(\cdot,\cdot): \quad V \times V \to P$$

называется *скалярным произведением*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам: для любых $x, y, z \in V$ и любого $\alpha \in P$

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$;
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$;
3) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$;
4) $(x,x) \geq 0$ для любого $x \in V$,
$(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

Число (x,y) называется *скалярным произведением векторов* x и y, аксиомы 1–4 называются *аксиомами скалярного произведения*.

Замечание. В вещественном случае черта комплексного сопряжения в первой аксиоме может быть опущена.

Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством*, а комплексное – *унитарным*. Обозначение: E и U соответственно.

Пример 47.1. Скалярное произведение геометрических векторов, введенное в §24 на основании метрики, имеющейся на прямой, на плоскости и в пространстве, удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения (теорема 24.2) и превращает пространства V_n, $n = 1, 2, 3$, в евклидовы пространства. Аксиоматическое определение скалярного произведения говорит о том, что это не единственный способ введения скалярного произведения.

Пример 47.2. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ может быть введено по правилу

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{47.1}$$

или, что то же самое,

$$(x,y) = X^T Y, \tag{47.2}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. Такой способ введения скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ будем называть стандартным.

Пример 47.3. В арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ может быть введено по правилу

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{47.3}$$

или, что то же самое,

$$(x,y) = X^T \overline{Y}, \tag{47.4}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n})^T$. Такой способ введения скалярного произведения в $\mathbb{C}^n$ будем называть стандартным.

Пример 47.4. В вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ скалярное произведение векторов $x = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$ и $y = (\alpha'_1 + i\beta'_1, \ldots, \alpha'_n + i\beta'_n)$ может быть введено по правилу

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \alpha'_i + \beta_i \beta'_i). \tag{47.5}$$

Пример 47.5. В пространстве матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($\mathbb{C}^{m \times n}$) скалярное произведение матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ может быть введено по правилу

$$(A,B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \tag{47.6}$$

или, что то же самое,

$$(A,B) = \operatorname{tr}(B^T A),$$

если $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, и

$$(A,B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b_{ij}}, \tag{47.7}$$

или, что то же самое,

$$(A,B) = \operatorname{tr}(B^H A),$$

если $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Эти способы введения скалярного произведения в пространствах $\mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbb{C}^{m \times n}$ будем называть стандартными.

Пример 47.6. В пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение многочленов $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ и $q(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$ может быть введено одним из следующих правил:

$$(p,q) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \tag{47.8}$$

или

$$(p,q) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) q(t)\, dt, \tag{47.9}$$

где $t_1 < t_2$ – произвольные фиксированные числа. Скалярное произведение, введенное в M_n по правилу (47.8), будем называть стандартным.

Пример 47.7. В комплексном линейном пространстве многочленов степени не выше n скалярное произведение многочленов может быть введено по правилу

$$(p,q) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{b_i}. \tag{47.10}$$

Скалярное произведение, введенное в комплексном пространстве M_n по этому правилу, будем называть стандартным.

Пример 47.8. В функциональном пространстве $C[0,1]$ скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ может быть задано равенством:

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx\,.$$

Теорема 47.1. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами:*

1) $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$, $\forall x,y,z \in E\ (U)$;

2) $(x, \alpha x) = \overline{\alpha}(x,y)$, $\forall x,y \in E\ (U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$);

3) $(\theta, x) = (x, \theta) = 0$, $\forall x \in E\ (U)$;

4) $(x,y) = 0$ для любого вектора $y \in E\ (U)$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

5) любое подпространство L евклидова (унитарного) пространства является евклидовым (соответственно унитарным) пространством.

Теорема 47.2. *Для любых векторов $x, y \in E\ (U)$ имеет место неравенство*

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$$

или, в другой форме,

$$\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix} \ge 0\,.$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Буняковского.*

Теорема 47.3. *Неравенство Коши–Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.*

Длиной вектора x в евклидовом и унитарном пространстве называется число

$$|x| = \sqrt{(x,x)}.$$

Вектор x называется *нормированным,* если его длина равна единице: $|x| = 1$.

Из аксиом скалярного произведения следует, что

1) любой вектор x евклидова (и унитарного) пространства имеет длину, при этом $|x| \ge 0$, $\forall x \in E\ (U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\ (U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$).

С помощью длин векторов неравенство Коши–Буняковского может быть переписано в виде

$$|(x,y)| \le |x| \cdot |y|$$

Теорема 47.4. *В евклидовом (унитарном) пространстве для любых векторов x, y имеют место неравенства*

$$\big||x| - |y|\big| \le |x+y| \le |x| + |y|\,. \tag{47.11}$$

Неравенства (47.11) называются *неравенствами треугольника в евклидовом (унитарном) пространстве.*

Матрицей Грама системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ евклидова (унитарного) пространства называется матрица

$$G(a_1, \ldots, a_k) = \begin{bmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \ldots & (a_1,a_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \ldots & (a_k,a_k) \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы Грама называется *определителем Грама.*

Теорема 47.5. *Система векторов $a_1, \ldots, a_k$ евклидова (унитарного) пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда*

$$\det G(a_1, \ldots, a_k) = 0\,.$$

Теорема 47.6. *Матрица Грама системы векторов евклидова (унитарного) пространства эрмитова.*

Теорема 47.7. *Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пространстве положителен.*

Если $G(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (g_{ij})$ – матрица Грама базиса e пространства V, то скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ и $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ связано с их координатами соотношением

$$(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j = x_e^T G y_e, \tag{47.12}$$

если V – евклидово пространство, и

$$(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i \overline{y_j} = x_e^T G \overline{y_e}, \tag{47.13}$$

если V – унитарное пространство.

Евклидовы пространства E_1 и E_2 называются *изоморфными,* если существует биективное отображение $\varphi : E_1 \to E_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение, т.е. если:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\quad \forall x, y \in E_1$;

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$, $\quad \forall x \in E_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x,y)$, $\quad \forall x, y \in E_1$.

Само отображение φ при этом называется *изоморфизмом евклидовых пространств* или *изометрией.*

Точно так же определяется изоморфизм унитарных пространств U_1 и U_2 (с очевидным отличием в свойстве 2: $\alpha \in \mathbb{C}$). Из определения следует, что изоморфные евклидовы (унитарные) пространства изоморфны как линейные пространства.

Теорема 47.8. *Два евклидовых (унитарных) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

ЗАДАЧИ

47.1. Доказать, что в евклидовом (и в унитарном) пространстве для любого вектора x выполнено соотношение

$$(\theta, x) = 0.$$

47.2. Доказать, что в любом конечномерном вещественном или комплексном линейном пространстве можно определить скалярное произведение.

47.3. Пусть V – евклидово пространство со скалярным произведением (x,y). Показать, что если положить

$$\langle x, y \rangle = \lambda(x,y),$$

где λ – фиксированное положительное число, то для $\langle x, y\rangle$ также выполнены все аксиомы скалярного произведения. Какой геометрический смысл имеет переход от (x, y) к $\langle x, y\rangle$ в пространстве V_3 геометрических векторов?

47.4. Доказать, что если $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$ – два различных скалярных произведения в одном и том же линейном пространстве V, то скалярным произведением в V будет и величина

а) $(x, y) = (x, y)_1 + (x, y)_2$;

б) $(x, y) = \lambda(x, y)_1 + \mu(x, y)_2$,

где λ и μ – произвольные положительные числа.

47.5. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного вещественного линейного пространства V. Определить, можно ли скалярное произведение в V определить формулой:

а) $(x, y) = x_2 y_1$; б) $(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$;

в) $(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$;

г) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$; д) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$;

е) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}9 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$; ж) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$.

47.6. Доказать, что в двумерном вещественном линейном пространстве V равенство

$$(x, y) = x_e^T A\, y_e, \quad A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

где x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в некотором базисе e, задает скалярное произведение в V тогда и только тогда, когда

$$A^T = A, \quad a_{11} > 0, \quad \det A > 0.$$

47.7. Доказать, что в n-мерном вещественном линейном пространстве V равенство

$$(x, y) = x_e^T A\, y_e, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

где x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в некотором базисе e, задает скалярное произведение в V, если

$$A^T = A, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

47.8. Пусть x_1, x_2 и y_1, y_2 – координаты векторов x и y в некотором базисе двумерного комплексного линейного пространства V. Определить, можно ли скалярное произведение в V определить формулой:

а) $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$; б) $(x, y) = x_1 \overline{y_2}$;

в) $(x, y) = i x_1 \overline{y_2} + i x_2 \overline{y_1}$; г) $(x, y) = i x_1 \overline{y_2} - i x_2 \overline{y_1}$;

д) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}0 & 3+i\\ 3-i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{bmatrix}$;

е) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{bmatrix}$; ж) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{bmatrix}$;

з) $(x, y) = [x_1\ x_2]\begin{bmatrix}5 & i\\ -i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\end{bmatrix}$;

и) $(x, y) = x_1 \overline{y_1} + i x_1 \overline{y_2} - i x_2 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$.

47.9. Пусть x_e и y_e – координатные столбцы векторов x и y в некотором базисе e двумерного комплексного линейного пространства V. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы равенство

$$(x, y) = x_e^T A\, \overline{y_e}, \quad A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

задавало скалярное произведение в V.

47.10. Выяснить, можно ли скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц порядка $n \geq 2$ ввести по формуле:

а) $(X, Y) = \operatorname{tr} XY$; б) $(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$;

в) $(X, Y) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$; г) $(X, Y) = \det XY$;

д) $(X, Y) = \operatorname{tr} X^T D Y$, где D – диагональная матрица порядка n с положительными элементами на главной диагонали.

47.11. Выяснить, какие из следующих правил определяют скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{C}^{m\times n}$:

а) $(X, Y) = \operatorname{tr}(\overline{XY^T})$; б) $(X, Y) = \operatorname{tr}(XY^H)$;

в) $(X, Y) = \operatorname{tr}(\overline{X}Y^T)$.

47.12. Установить, какие из следующих правил определяют скалярное произведение в пространстве многочленов M_n с вещественными коэффициентами:

$$1) \quad (p, q) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(a) q^{(k)}(a), \tag{47.14}$$

где точка $a \in \mathbb{R}$ произвольна;

$$2)\quad (p,q) = \sum_{k=1}^{m} p(k)q(k). \qquad (47.15)$$

47.13. В вещественном n-мерном пространстве V скалярное произведение (x,y) задано как функция координат $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ векторов x и y в некотором базисе e пространства. Вычислить матрицы Грама базиса e и базиса, составленного из векторов $f_1,\ldots,f_n$. Найти выражение для скалярного произведения (x,y) через координаты векторов x и y в базисе f:

1) $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$;
 а) $(f_1)_e = (1,2)^T$, $(f_2)_e = (2,1)^T$;
 б) $(f_1)_e = (1,1)^T$, $(f_2)_e = (1,-1)^T$;

2) $(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;
 а) $(f_1)_e = (1,-1)^T$, $(f_2)_e = (1,1)^T$;
 б) $(f_1)_e = (1,-1)^T$, $(f_2)_e = (1,0)^T$;

3) $(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$;
 а) $(f_1)_e = (1,0)^T$, $(f_2)_e = (1,-1)^T$;
 б) $(f_1)_e = (1/2,1/2)^T$, $(f_2)_e = (-1/2,1/2)^T$;

4) $(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$;
 а) $(f_1)_e = (1,0,0)^T$, $(f_2)_e = (1,-1,0)^T$, $(f_3)_e = (0,1,1)^T$;
 б) $(f_1)_e = (1,0,0)^T$, $(f_2)_e = (-1,2,0)^T$, $(f_3)_e = (-1,2,2)^T$.

47.14. В комплексном n-мерном пространстве V скалярное произведение (x,y) задано как функция координат $x_1,\ldots,x_n$ и $y_1,\ldots,y_n$ векторов x и y в некотором базисе e пространства. Вычислить матрицы Грама базиса e и базиса, составленного из векторов $f_1,\ldots,f_n$. Найти выражение для скалярного произведения (x,y) через координаты векторов x и y в базисе f:

1) $(x,y) = 2x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$;
 а) $(f_1)_e = (1,0)^T$, $(f_2)_e = (1,-1)^T$;
 б) $(f_1)_e = (1,0)^T$, $(f_2)_e = (-1,1+i)^T$;

2) $(x,y) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + (2+i)x_2\overline{y_3} + (2-i)x_3\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3}$;
 а) $(f_1)_e = (1,1,0)^T$, $(f_2)_e = (-1,1,0)^T$, $(f_3)_e = (0,0,1)^T$;
 б) $(f_1)_e = (1,0,0)^T$, $(f_2)_e = (-i,1,0)^T$, $(f_3)_e = (1+2i,-2+i,1)^T$.

47.15. Вычислить матрицу Грама G базиса $1,t,\ldots,t^n$ в евклидовом пространстве M_n многочленов со скалярным произведением, заданным:

а) равенством (47.8);
б) равенством (47.9), в котором $t_1=0$, $t_2=1$;
в) равенством (47.9), в котором $t_1=-1$, $t_2=1$;
г) равенством (47.14) (отдельно рассмотреть случай $a=0$);
д) равенством (47.15), в котором $m>n$.

47.16. Пусть G и G' – матрицы Грама базисов e и e' евклидова (унитарного) пространства, связанных матрицей перехода S: $e' = eS$. Доказать, что:
 1) в евклидовом пространстве $G' = S^TGS$;
 2) в унитарном пространстве $G' = S^TG\overline{S}$.

Как связаны между собой определители матриц G и G'?

47.17. Доказать положительность определителя матрицы $A=(a_{ij})$ порядка n с элементами:
 а) $a_{ij}=2/(i+j-1)$, если $i+j$ четно, и $a_{ij}=0$ иначе;
 б) $a_{ij}=1/(i+j-1)$ для всех $i,j=\overline{1,n}$.

47.18. Векторы x и y евклидова пространства заданы в базисе e координатными столбцами x_e и y_e соответственно, и известна матрица Грама $G(f)$ базиса f. Вычислить матрицу Грама $G(e)$ базиса e и скалярное произведение векторов x и y, если:

1) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - 2e_2$,
$$G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ x_e = [1\ 0]^T,\ y_e = [0\ -1]^T;$$

2) $f_1 = 2e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$,
$$G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ x_e = [1\ 2]^T,\ y_e = [0\ 1]^T;$$

3) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$,
$$G(f) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ x_e = [1\ 1]^T,\ y_e = [1\ 3]^T;$$

4) $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_2 + e_3$,
$$G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ x_e = [1\ 2\ 1]^T,\ y_e = [1\ 1\ -1]^T;$$

5) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_2 + e_3$,
$$G(f) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix},\ x_e = [1\ -2\ 1]^T,\ y_e = [1\ 1\ 1]^T.$$

47.19. Векторы x и y унитарного пространства заданы в базисе e координатными столбцами x_e и y_e соответственно, и известна матрица Грама $G(f)$ базиса f. Вычислить матрицу Грама $G(e)$ базиса e и скалярное произведение векторов x и y, если:

1) $f_1 = e_1 + ie_2$, $f_2 = -3ie_1 + 4e_2$,

$$G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{bmatrix}, \; x_e = [1\ i]^T, \; y_e = [1+i\ 2]^T;$$

2) $f_1 = e_1$, $f_2 = -ie_1 + 2e_2 + ie_3$, $f_3 = -ie_2 + e_3$,

$$G(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3i & -1 \\ -3i & 22 & 10i \\ -1 & -10i & 5 \end{bmatrix}, \; x_e = [0\ 1\ 0]^T, \; y_e = [1\ -2i\ 1]^T.$$

47.20. Пусть a – фиксированный вектор евклидова пространства V, α – заданное вещественное число. Будет ли множество всех векторов x, для которых $(x, a) = \alpha$, линейным подпространством пространства V?

47.21. Доказать, что всякое подпространство евклидова пространства V само является евклидовым пространством в смысле скалярного произведения, заданного в V.

47.22. Линейное пространство V разлагается в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_p$. На каждом из подпространств L_i определено скалярное произведение $(x, y)_i$, $\forall x, y \in L_i$. Доказать, что можно ввести скалярное произведение во всем пространстве V, положив

$$(x, y) = (x_1, y_1)_1 + \ldots + (x_p, y_p)_p,$$

если векторы x и y имеют разложения по подпространствам соответственно: $x = x_1 + \ldots + x_p$ и $y = y_1 + \ldots + y_p$.

47.23. На подпространстве L линейного пространства V введено скалярное произведение (x, y). Доказать, что можно определить скалярное произведение во всем V так, что для векторов x и y из L оно будет совпадать с первоначально заданным скалярным произведением (x, y).

47.24. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, доказать следующие неравенства:

а) $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right);$$

б) $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2/\lambda_i\right).$$

Здесь числа $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, произвольны, а числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$,

$i = \overline{1,n}$, произвольны и положительны.

47.25. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского для унитарного пространства, доказать неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta|_i^2\right),$$

где числа $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$, произвольны.

47.26. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, доказать неравенство

$$\left(\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right)^2 \le \int_a^b f^2(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt,$$

где $f(t)$, $g(t)$ – произвольные непрерывные на $[a, b]$ функции.

47.27. Доказать, что неравенство

$$[\operatorname{tr}(A^T B)]^2 \le \operatorname{tr}(A^T A) \operatorname{tr}(B^T B)$$

выполнено для любых матриц A и B одинакового размера.

47.28. Доказать, что для любых квадратных матриц A и B одинакового порядка выполнено неравенство:

а) $[\operatorname{tr}(AB)]^2 \le \operatorname{tr}(A^T A) \operatorname{tr}(B^T B)$;

б) $\operatorname{tr}(A^T A) \ge \dfrac{1}{n} (\operatorname{tr} A)^2$.

47.29. Пусть в определении скалярного произведение четвертая аксиома заменена на более слабое требование: $(x, x) \ge 0$ для любого $x \in V$. Доказать, что в пространстве V с таким "скалярным произведением":

а) выполняется неравенство Коши–Буняковского;

б) выполняется неравенство треугольника;

в) множество M векторов x, для которых $(x, x) = 0$, образует подпространство;

г) для любого $x \in M$ и любого вектора $y \in V$ скалярное произведение равно нулю;

д) если N – произвольное дополнительное к M подпространство, и $x = x_M + x_N$, $y = y_M + y_N$ – разложения векторов x и y по подпространствам M и N, то знак равенства в неравенстве Коши–Буняковского для векторов x и y имеет место тогда и только тогда, когда x_N и y_N линейно независимы.

47.30. Сохранится ли неравенство Коши–Буняковского в случае, если в определении скалярного произведения отказаться от четвертой аксиомы?

47.31. Найти длину вектора:

1) $a = (5, 4, 3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением;

2) $a = (1, -2, 3, 4)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением;

3) $a = (1, 1)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;

4) $a = (1, -1, 2)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением $(x, y) = x\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} y^T$;

5) $a = (1, i)$ в пространстве $\mathbb{C}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = x\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \overline{y}^T$;

6) $a = (1+i, 1, -i)$ в пространстве $\mathbb{C}^3$ со скалярным произведением $(x, y) = x\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 2+i \\ 0 & 2-i & 6 \end{bmatrix} \overline{y}^T$.

47.32. Доказать, что для любых векторов x и y выполнено равенство

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Какой смысл имеет это соотношение в пространстве V_3 геометрических векторов?

47.33. Показать, что для любого вектора x конечномерного евклидова (унитарного) пространства V выполнено соотношение

$$|x| = \sup_{y \in V, y \neq \theta} \frac{|(x, y)|}{|y|}.$$

§48. Ортогональные векторы

Два вектора $x, y \in E\ (U)$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Система векторов $x_1, \ldots, x_k \in E\ (U)$ называется *ортогональной*, если

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Система векторов $x_1, \ldots, x_k \in E\ (U)$ называется *ортонормированной системой*, если

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 48.1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Следствие 1. Ортонормированная система векторов линейно независима.

Следствие 2. В n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве любая ортонормированная система из n векторов образует базис. Этот базис называется *ортонормированным базисом*.

Пример 48.1. Известно, что скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ задано стандартным образом. Дополнить векторы $e_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^4$.

Решение. Найдем какой-либо ненулевой вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ортогональный векторам e_1 и e_2:

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0, \\ (x, e_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \phantom{x_1 - {}} 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является, например, вектор $x = (0, 1, 1, 0)$. После нормировки получим вектор $e_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Найдем теперь новый ненулевой вектор x так, чтобы он был ортогонален векторам e_1, e_2 и e_3:

$$\begin{cases} (x, e_1) = 0, \\ (x, e_2) = 0, \\ (x, e_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} = 0, \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 0 \\ \phantom{x_1 - x_2 + {}} 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = (-1, 1, -1, 3)$. Положим $e_4 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$. Тогда система векторов e_1, e_2, e_3, e_4 ортонормирована и, так как $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, она образует ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^4$. ∎

Теорема 48.2. *В евклидовом (унитарном) пространстве координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ вычисляются по правилу*

$$x_i = (x, e_i), \quad i = \overline{1, n},$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис.

Теорема 48.3. *В евклидовом (унитарном) пространстве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис.

В евклидовом пространстве черта комплексного сопряжения в последнем равенстве может быть опущена: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема 48.4. *В конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве существует ортонормированный базис.*

Процесс ортогонализации позволяет построить из произвольной линейно независимой системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ ортогональную систему ненулевых векторов $g_1, \ldots, g_m$ и состоит в следующем. Полагаем $g_1 = f_1$. Последующие векторы $g_1, \ldots, g_m$ находятся из рекуррентных формул

$$g_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} g_j.$$

Коэффициенты α_{kj} однозначно определяются условием ортогональности вектора g_k векторам $g_1, \ldots, g_{k-1}$:

$$\alpha_{kj} = \frac{(f_k, g_j)}{(g_j, g_j)}.$$

Нормируя векторы $g_1, \ldots, g_m$, приходим к ортонормированному базису подпространства $\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_m)$.

Пример 48.2. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением построить ортонормированный базис линейного подпространства L, натянутого на векторы $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 0, 1, -1)$, $a_3 = (4, 2, 3, 1)$.

Решение. Векторы a_1, a_2, a_3, как нетрудно проверить, линейно независимы. Для построения ортонормированного базиса подпространства L применим процесс ортогонализации к системе векторов a_1, a_2, a_3.

1) Положим $f_1 = a_1$ и возьмем $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$.

2) Построим вектор f_2 так, чтобы он линейно выражался через векторы a_1, a_2 и был ортогонален вектору a_1. Согласно описанному выше алгоритму этого можно добиться, определив f_2 равенством

$$f_2 = a_2 - \frac{(a_2, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1.$$

Отсюда $f_2 = (2, 0, 1, -1) - (1, 1, 0, 0) = (1, -1, 1, -1)$.

Так как $(f_2, f_2) = 4$, то возьмем $e_2 = \frac{1}{2} f_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3) Построим вектор f_3 так, чтобы он линейно выражался через векторы a_1, a_2, a_3 или, что то же самое, через векторы f_1, f_2, a_3 и был ортогонален векторам a_1, f_2. Этого можно добиться, определив f_3 равенством

$$f_3 = a_3 - \frac{(a_3, a_1)}{(a_1, a_1)} f_1 - \frac{(a_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2.$$

Отсюда $f_3 = (4, 2, 3, 1) - 3(1, 1, 0, 0) - (1, -1, 1, -1) = (0, 0, 2, 2)$.

Так как $(f_3, f_3) = 8$, то возьмем $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} f_3 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Тем самым, система e_1, e_2, e_3 ортонормирована, принадлежит подпространству L и, следовательно, образует ортонормированный базис L. ■

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется *унитарной*, если

$$UU^H = U^H U = I.$$

Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *ортогональной*, если

$$QQ^T = Q^T Q = I.$$

Теорема 48.5. *Матрица ортогональна (унитарна) тогда и только тогда, когда она является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису евклидова (унитарного) пространства.*

Две системы векторов $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ в унитарном (евклидовом) пространстве называются *биортогональными*, если

$$(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 48.6. *Каждая система из пары биортогональных систем векторов линейно независима.*

Биортогональные системы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$, образующие базисы пространства V, называют *биортогональной парой базисов*.

Теорема 48.7. *Для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ унитарного (евклидова) пространства существует, и притом единственный, биортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$.*

Пример 48.3. Построить базис пространства M_2, биортогональный базису

$$e_1(t) = 1 + 2t + t^2,\ e_2(t) = 1 - t,\ e_3(t) = 2 + 2t + t^2,$$

если известно, что скалярное произведение в пространстве M_2 задано сооотношением (47.8).

Решение. Так как пространство M_2 со скалярным произведением (47.8) изоморфно пространству $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением (47.1), то решим аналогичную задачу для базиса $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0)$, $e_3 = (2, 2, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Пусть система векторов f_1, f_2, f_3 биортогональна к системе e_1, e_2, e_3. Тогда

$$\begin{cases} (e_1, f_1) = 1, \\ (e_2, f_1) = 0, \\ (e_3, f_1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (e_1, f_2) = 0, \\ (e_2, f_2) = 1, \\ (e_3, f_2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (e_1, f_3) = 0, \\ (e_2, f_3) = 0, \\ (e_3, f_3) = 1, \end{cases}$$

и следовательно, нужно решить три системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Так как матрица коэффициентов одинакова у всех этих трех систем, то решим их одновременно, составив следующую расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Отсюда $f_1 = (-1, -1, 4)$, $f_2 = (0, -1, 2)$, $f_3 = (1, 1, -3)$.

Таким образом, искомый биортогональный базис образуют многочлены $f_1(t) = -1 - t + 4t^2$, $f_2(t) = -t + 2t^2$, $f_3(t) = 1 + t - 3t^2$. ■

ЗАДАЧИ

48.1. Доказать, что в евклидовом пространстве E:

1) вектор f ортогонален всем векторам из E тогда и только тогда, когда вектор f нулевой;

2) векторы f и g удовлетворяют соотношению $(f,x)=(g,x)$ для любого вектора $x\in E$ тогда и только тогда, когда $f=g$.

Верны ли эти утверждения в унитарном пространстве?

48.2. Доказать, что если $x_1,\dots,x_k$ – ортогональная система векторов, то для любых чисел λ_i, $i=\overline{1,k}$, система векторов $\lambda_1x_1,\dots,\lambda_kx_k$ также будет ортогональна.

48.3. Пусть вектор x евклидова или унитарного пространства ортогонален каждому из векторов $f_1,\dots,f_k$. Доказать, что x ортогонален и любому вектору из линейной оболочки векторов $f_1,\dots,f_k$.

48.4. Доказать, что если в евклидовом пространстве для любого числа α выполнено неравенство $|x+\alpha y|\geq|x|$, то векторы x и y ортогональны.

48.5. Доказать, что в евклидовом пространстве выполнено тождество

$$2(x,y)=|x+y|^2-|x-y|^2.$$

48.6. Доказать, что в унитарном пространстве выполнено тождество

$$4(x,y)=|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2.$$

48.7. Последовательность векторов $\{a_k\}$ n-мерного евклидова (унитарного) пространства называется *сходящейся* к вектору a, если $\lim\limits_{k\to\infty}|a_k-a|=0$. Доказать, что

1) если последовательность векторов $\{f_k\}$ сходится к вектору f, то числовая последовательность $\{|f_k|\}$ сходится к $|f|$;

2) если последовательности векторов $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ сходятся соответственно к векторам f и g, то

$$\lim_{k\to\infty}(f_k,g_k)=(f,g).$$

48.8. Верно ли, что произвольная система попарно ортогональных векторов линейно независима?

48.9. Пусть $f_1,\dots,f_m$ и $g_1,\dots,g_m$ – две линейно независимые ортогональные системы векторов евклидова или унитарного пространства, которые обладают следующим свойством: при любом $k=\overline{1,m}$ линейная оболочка $\mathcal{L}(f_1,\dots,f_k)$ совпадает с линейной

оболочкой $\mathcal{L}(g_1,\dots,g_k)$. Доказать, что $g_k=\gamma_kf_k$, $k=\overline{1,m}$, при некоторых отличных от нуля коэффициентах γ_k.

48.10. Доказать, что если система арифметического пространства $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}x_1&=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13},\dots,\alpha_{1n}),\\x_2&=(0,\ \alpha_{22},\alpha_{23},\dots,\alpha_{2n}),\\x_3&=(0,\ 0,\ \alpha_{33},\dots,\alpha_{3n}),\\&\dots\dots\dots\dots\dots\\x_n&=(0,\ 0,\ 0,\ \dots,\alpha_{nn})\end{aligned}$$

образует ортогональный базис этого пространства, то: а) $\alpha_{ii}\neq 0$, $i=\overline{1,n}$; б) $\alpha_{ij}=0$, если $i\neq j$.

48.11. Доказать, что естественный базис арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$) со стандартным скалярным произведением является ортонормированным базисом.

48.12. Пусть относительно стандартного скалярного произведения арифметического пространства вектор-столбцы u_1,u_2,u_3 образуют ортонормированный базис $\mathbb{R}^3$, а вектор-столбцы v_1,v_2 – ортонормированный базис $\mathbb{R}^2$. Показать, что если $A=u_1v_1^T+u_2v_2^T$, то $A^TA=I$.

48.13. Известно, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n>1$) имеется ортогональный базис $e_1,\dots,e_n$ такой, что все компоненты каждого из векторов e_i равны 1 или -1. Доказать, что n равно 2 или кратно 4.

48.14. Построить какой-либо ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$) со стандартным скалярным произведением.

48.15. Построить какой-либо ортонормированный базис евклидова пространства M_n со скалярным произведением, определяемым:

1) равенством (47.8);

2) равенством (47.13);

3) равенством (47.14) при $m=n+1$.

48.16. Доказать, что координаты x_i произвольного вектора x n-мерного евклидова (унитарного) пространства в ортогональном базисе $e_1,\dots,e_n$ можно вычислить по формуле

$$x_i=(x,e_i)/(e_i,e_i),\quad i=\overline{1,n}.$$

Вывести отсюда равенство $|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{|(x,e_i)|^2}{(e_i,e_i)}$.

48.17. Доказать, что в евклидовом (унитарном) пространстве длина вектора x, заданного своими координатами $x_1, \dots, x_n$ в базисе e, вычисляется по правилу

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

тогда и только тогда, когда e – ортонормированный базис пространства.

48.18. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства. Найти выражение для скалярного произведения произвольных векторов x и y через их координаты:

а) в базисе $\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – ненулевые числа;

б) в базисе $e_1 + e_2, e_2, e_3, \dots, e_n$.

48.19. Пусть V – вещественное или комплексное линейное пространство и $e_1, \dots, e_n$ – некоторый базис в нем. Доказать, что в V можно ввести скалярное произведение так, чтобы этот базис был ортонормированным относительно введенного скалярного произведения.

48.20. В пространстве M_n многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами произвольным образом введено скалярное произведение. Доказать, что в полученном евклидовом пространстве:

а) существует ортогональный базис, содержащий по одному многочлену каждой степени $k = \overline{0, n}$;

б) если $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$ и $g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t)$ – два ортогональных базиса, обладающих указанным свойством, то (при соответствующей нумерации) многочлены, входящие в эти базисы, различаются лишь скалярным множителем: $g_i(t) = \alpha_i f_i(t)$, $i = \overline{0, n}$.

48.21. В пространстве M_n ввести скалярное произведение так, чтобы базис

$$1,\ t,\ \frac{t^2}{2!},\ \dots,\ \frac{t^n}{n!}$$

стал ортонормированным.

48.22. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к указанной системе векторов вещественного арифметического пространства с соответствующим скалярным произведением:

1) $(2, 2, 1), (-2, 2, 3)$, скалярное произведение стандартное;

2) $(1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1)$, скалярное произведение стандартное;

3) $(1, -1, 2)$, скалярное произведение стандартное;

4) $(1, 1)$, скалярное произведение задано равенством $(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$;

5) $(1, 2, 0), (2, 0, -1)$, скалярное произведение задано равенством $(x, y) = 4x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 3x_3 y_3$.

48.23. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к указанной системе векторов комплексного арифметического пространства с соответсвующим скалярным произведением:

1) $(1 + i, 1 - i)$, скалярное произведение стандартное;

2) $(-1, 1 + i, 0), (0, 1, i)$, скалярное произведение стандартное;

3) $(1, i, 0), (i, 1, 0)$, скалярное произведение задано равенством $(x, y) = x_1 \overline{y_1} + 5x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3} + i x_2 \overline{y_3} - i x_3 \overline{y_2}$.

48.24. Доказать, что процесс ортогонализации, примененный к линейно независимой системе векторов $f_1, \dots, f_k$, приводит к ортогональной системе ненулевых векторов $g_1, \dots, g_k$.

48.25. Применить процесс ортогонализации к линейно независимой системе векторов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $f_1 = (1, -3, 1)$, $f_2 = (4, -5, 3)$;

2) $f_1 = (1, 0, -1, 2)$, $f_2 = (2, 1, -1, 3)$;

3) $f_1 = (2, 0, -1)$, $f_2 = (5, -1, 0)$, $f_3 = (1, 7, -3)$;

4) $f_1 = (1, 2, 2)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, -4)$;

5) $f_1 = (2, 1, -2)$, $f_2 = (4, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, 0)$;

6) $f_1 = (1, 1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 2, 0, -1)$, $f_3 = (0, 0, 1, 0)$.

48.26. Пусть в результате применения процесса ортогонализации к системе векторов $f_1, \dots, f_k$ получается система $g_1, \dots, g_k$. Доказать, что:

1) если система векторов $f_1, \dots, f_k$ линейно зависима, а ее подсистема $f_1, \dots, f_{k-1}$ линейно независима, то векторы $g_1 \dots, g_{k-1}$ ненулевые, а $g_k = \theta$;

2) если векторы $g_1, \dots, g_{k-1}$ в получаемой системе ненулевые, а $g_k = \theta$, то в исходной системе векторы $f_1, \dots, f_{k-1}$ линейно независимы, а вектор f_k через них линейно выражается.

48.27. Показать, что тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ ортогональна относительно скалярного произведения (47.9) с $t_1 = -\pi$ и $t_2 = \pi$.

48.28. В пространстве многочленов M_3 со скалярным произведением (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов 1, t, t^2, t^3.

48.29. Доказать, что в пространстве многочленов M_n со скалярным произведением (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, многочлены Лежандра

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k, \quad k = \overline{1,n},$$

образуют ортогональный базис.

48.30. Доказать, что:

а) любой ненулевой вектор можно включить в некоторый ортогональный базис евклидова пространства;

б) любую ортогональную систему ненулевых векторов можно дополнить до ортогонального базиса пространства.

48.31. Дополнить следующие системы векторов до ортогональных базисов пространства $\mathbb{R}^4$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом):

1) $a_1 = (1, -2, 1, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 1)$;
2) $a_1 = (1, -1, 1, -3)$, $a_2 = (-4, 1, 5, 0)$;
3) $a_1 = (1, 1, 1, 2)$, $a_2 = (1, 0, 1, -1)$;
4) $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)$.

48.32. Дополнить следующие системы векторов до ортогональных базисов пространства $\mathbb{C}^3$ (скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$ введено стандартным образом):

1) $a_1 = (1, 1-i, 2)$, $a_2 = (2, -5+3i, 3+i)$;
2) $a_1 = (-i, 2, -4+i)$, $a_2 = (4-i, -1, i)$.

48.33. Дополнить следующие системы векторов до ортонормированных базисов соответствующего арифметического пространства (скалярное произведение считается введенным стандартным образом):

1) $a_1 = \left(-\frac{11}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{3}\right)$, $a_2 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{14}{15}, -\frac{1}{3}\right)$;

2) $a_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3) $a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$;

4) $a_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

48.34. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

1) $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (1, 8, -2, -16)$, $a_3 = (12, 5, -14, 5)$, $a_4 = (3, 11, 4, -7)$;
2) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $a_3 = (0, 3, 3, 7)$, $a_4 = (3, -3, -3, -9)$.

48.35. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

1) $a_1 = (2, 1, -i)$, $a_2 = (3+i, 0, -2)$, $a_3 = (0, 6-i, 1)$;
2) $a_1 = (0, 1-i, 2)$, $a_2 = (1, 2, 2-i)$, $a_3 = (i, 2, 5+2i)$.

48.36. Найти размерность подпространства, образованного всеми векторами x, для которых $(a, x) = 0$, где a – некоторый фиксированный ненулевой вектор рассматриваемого n-мерного евклидового пространства.

48.37. Подпространство L арифметического пространства со стандартным скалярным произведением описано системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис L, если:

1) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$;

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 14x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 - 7x_5 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

48.38. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – линейно независимая система векторов евклидова (унитарного) пространства, $g_1, \ldots, g_k$ – система, полученная из нее процессом ортогонализации. Доказать, что

$$\det G(f_1, \ldots, f_k) = \det G(g_1, \ldots, g_k) = |g_1|^2 \ldots |g_k|^2.$$

48.39. Пусть $G = G(e_1, \ldots, e_n)$ – матрица Грама базиса $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства E. Найти матрицу перехода к биортогональному базису $f_1, \ldots, f_n$ и его матрицу Грама.

48.40. Пусть S – матрица перехода от базиса e к базису e'. Найти матрицу перехода от базиса f, биортогонального для базиса e, к базису f', биортогонального к f:

а) в евклидовом пространстве;

б) в унитарном пространстве.

48.41. Доказать, что определитель Грама любой системы векторов не превосходит произведения квадратов длин векторов системы, причем равенство имеет место только в случае, когда либо векторы попарно ортогональны, либо один из них нулевой.

48.42. Доказать, что в евклидовом (унитарном) пространстве каждая из двух биортогональных систем векторов $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ линейно независима.

48.43. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – биортогональная пара базисов в евклидовом (унитарном) пространстве E (U). Доказать, что координаты произвольного вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$ вычисляются по формулам

$$x_i = (x, f_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

48.44. Пусть x_e и y_f – координатные столбцы векторов x и y соответственно в базисах e и f евклидова пространства E. Доказать, что равенство

$$(x, y) = x_e^T y_f$$

выполнено тогда и только тогда, когда базисы e и f образуют биортогональную пару. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение в унитарном пространстве U.

48.45. Пусть E – n-мерное евклидово (унитарное) пространство. Доказать, что для всякой линейно независимой системы векторов $e_1, \ldots, e_k$, $k < n$, существует биортогональная система. Как отличаются друг от друга системы векторов, каждая из которых образует с системой $e_1, \ldots, e_k$ биортогональную пару?

48.46. Пусть E – конечномерное евклидово (унитарное) пространство. Доказать, что система векторов $e_1, \ldots, e_k$ имеет единственную биортогональную систему тогда и только тогда, когда векторы $e_1, \ldots, e_k$ образуют базис пространства E.

48.47. Пусть e и f – биортогональная пара базисов в евклидовом (унитарном) пространстве E (U), x_e и x_f – координатные столбцы произвольного вектора x в базисах e и f соответствен-

но, а $G(e)$ и $G(f)$ – матрицы Грама этих базисов. Доказать, что:

1) $f = eG^T(f)$; 2) $x_f = G^T(e)x_e$.

Найти биортогональные базисы для следующих базисов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

48.48. $e_1 = (1, 3)$, $e_2 = (1, 5)$.

48.49. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 3)$.

48.50. $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$, $e_3 = (1, 4, 9)$.

48.51. $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0)$, $e_3 = (-2, -5, 1)$.

48.52. $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 2, 0)$, $e_3 = (0, 0, 3, 1)$, $e_4 = (0, 0, 2, 1)$.

48.53. $e_1 = (-2, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -2, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, -2, 1)$, $e_4 = (1, 1, 1, -2)$.

48.54. $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 0)$.

48.55. Найти биортогональный базис для базиса $e_1 = (1, 0, i)$, $e_2 = (1, i, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1 + i)$ пространства $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением.

48.56. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением построить систему векторов, биортогональную указанной системе векторов и принадлежащую их линейной оболочке:

а) $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 0)$;

б) $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, -1, 0)$, $e_3 = (0, 0, -1, 1)$.

48.57. Пусть в пространстве многочленов M_3 скалярное произведение задано формулой (47.9), в котором $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

1) Построить систему векторов, биортогональную системе 1, t, t^2 и принадлежащую линейной оболочке этих векторов.

2) Построить базис M_3, биортогональный базису $1, t, t^2, t^3$.

§49. Ортогональные подпространства

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства E (U). Вектор x называется *ортогональным к подпространству* L, если он ортогонален любому вектору $y \in L$. Обозначение: $x \perp L$.

Очевидно, что $x \perp \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ тогда и только тогда, когда $x \perp a_i$, $i = \overline{1, k}$. Совокупность всех векторов $x \in E$ (U), ортогональных подпространству L, называется *ортогональным дополнением* к L. Обозначение: $L^{\perp}$.

Теорема 49.1. *Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.*

Пример 49.1. Найти ортогональное дополнение к линейному подпространству L, натянутому на векторы $a_1 = (1, 4, -2, 1)$, $a_2 = (2, 5, -1, -2)$, $a_3 = (1, -2, 4, -7)$, $a_4 = (1, 7, -5, 5)$. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом.

Решение. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит ортогональному дополнению к подпространству $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ в том и только том случае, когда он ортогонален каждому вектору a_i, $i = \overline{1, 4}$:

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0, \\ (x, a_2) = 0, \\ (x, a_3) = 0, \\ (x, a_4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Опишем множество решений этой системы, построив ее фундаментальную систему решений:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_1 = (13, -4, 0, 3), \quad e_2 = (-2, 1, 1, 0).$$

Построенная фундаментальная система решений e_1, e_2 образует базис пространства решений системы, и следовательно, является базисом ортогонального дополнения $L^\perp$. Таким образом, $L^\perp = \mathcal{L}(e_1, e_2)$. ■

Пример 49.2. Найти ортогональное дополнение к подпространству L, заданному системой

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом.

Решение. Обозначим через a_1, a_2, a_3, a_4 векторы, компоненты которых являются коэффициентами заданной системы уравнений: $a_1 = (1, 4, -2, 1)$, $a_2 = (2, 5, -1, -2)$, $a_3 = (1, -2, 4, -7)$, $a_4 = (1, 7, -5, 5)$. Из правила (47.1), задающего скалярное произведение, следует, что вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит подпространству L тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (x, a_1) = 0, \\ (x, a_2) = 0, \\ (x, a_3) = 0, \\ (x, a_4) = 0, \end{cases} \iff x \perp \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Это означает, что $L^\perp = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и для построения базиса ортогонального дополнения достаточно найти базис указанной линейной оболочки:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \\ 1 & 7 & -5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \end{array} \to \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ 3a_1 - 2a_2 + a_3 \\ -3a_1 + a_2 + a_4 \end{array} \end{array}$$

Отсюда следует, что базис $L^\perp$ образуют векторы

$$e_1 = (1, 4, -2, 1), \; e_2 = (0, -3, 3, -4). \; ■$$

Теорема 49.2. *Если L – линейное подпространство $E(U)$, то*

$$L \oplus L^\perp = E\,(U).$$

Следствие. Если L – линейное подпространство $E\,(U)$, то для любого вектора $f \in E\,(U)$ существует, и притом единственное, разложение

$$f = g + h, \tag{49.1}$$

где $g \in L$, $h \perp L$.

Вектор g в разложении (49.1) называется *ортогональной проекцией вектора f на подпространство L*, а вектор h – *ортогональной составляющей вектора f*.

Задачу разложения (49.1) вектора на ортогональную проекцию и ортогональную составляющую называют *задачей о перпендикуляре*. Ортогональную составляющую h в разложении (49.1) называют также *перпендикуляром, опущенным из вектора f на подпространство L*, а сам вектор f – *наклонной к подпространству L*.

Подпространства L_1 и L_2 евклидова (унитарного) пространства называются *ортогональными*, если любой вектор каждого из них ортогонален другому подпространству. Сумма конечного числа попарно ортогональных подпространств называется *ортогональной суммой*.

Пример 49.3. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $f = (5, 8, -4, -1)$ на подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (1, 4, -2, 1)$, $a_2 = (2, 5, -1, -2)$. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартным образом.

Решение. Заметим, что векторы a_1, a_2 образуют базис L. В силу определения ортогональной проекции требуется построить разложение $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^\perp$, или, что то же самое, найти такие числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и такой вектор $h \in L^\perp$, что

$$f = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + h.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на векторы a_1 и a_2. Так как $(h, a_1) = (h, a_2) = 0$, то получим

$$\begin{cases} (f, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1), \\ (f, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 22\alpha_1 + 22\alpha_2 = 44, \\ 22\alpha_1 + 34\alpha_2 = 56 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 1.$$

Таким образом, вектор $g = a_1 + a_2 = (3, 9, -3, -1)$ – ортогональная проекция вектора f на подпространство L, а вектор $h = f - g = (2, -1, -1, 0)$ – его ортогональная составляющая.

Замечание. Отметим, что в этом решении сначала найдена проекция $g = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, а потом перпендикуляр $h = f - g$. Очевидно, что можно было бы сначала искать перпендикуляр $h = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, предварительно построив базис b_1, b_2 подпространства $L^\perp$. В данной задаче базис L уже дан (это векторы a_1, a_2), – этим оправдано то, что поиск ортогональной проекции и перпендикуляра начат с проекции.

Вообще говоря, построение базиса как L, так и $L^\perp$, не столь затруднительно. Более трудоемко составление и решение системы с матрицей Грама базисных векторов. Поэтому при выборе вектора, с которого надо начинать разложение вектора f, желательно учитывать размерности этих подпространств: если $\dim L < \dim L^{\perp}$, то лучше начинать разложение с проекции g, а если $\dim L > \dim L^{\perp}$, то с h. ■

Пример 49.4. Найти ортогональную проекцию матрицы $F = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ на подпространство L всех квадратных матриц второго порядка с нулевым следом. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ введено стандартным образом.

Решение. В силу изометрии евклидовых пространств $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $\mathbb{R}^4$ со стандартными скалярными произведениями поставленная задача эквивалентна следующей задаче:

найти ортогональную проекцию вектора $f = (5, 3, 4, 3)$ на подпространство L: $x_1 + x_4 = 0$.

Как следует из решения примера 49.2, ортогональное дополнение $L^{\perp}$ является линейной оболочкой, натянутой на вектор $a_1 = (1, 0, 0, 1)$. Поэтому (см. замечание к примеру 49.3) разложение $f = g + h$, $g \in L$, $h \in L^{\perp}$, будем искать в виде

$$f = g + \alpha_1 a_1,\ g \in L,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор a_1. Так как $(g, a_1) = 0$, то получим

$$(f, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \iff 2\alpha_1 = 8 \iff \alpha_1 = 4.$$

Таким образом, вектор $h = 4a_1 = (4, 0, 0, 4)$ – ортогональная составляющая вектора f, а вектор $g = f - h = (1, 3, 4, -1)$ – ортогональная проекция вектора f на подпространство L.

Итак, ортогональной проекцией матрицы F на указанное подпространство является матрица $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. ■

Пример 49.5. Найти ортогональную проекцию многочлена $f(t) = 2 + 4t + 2t^2$ на подпространство L многочленов степени не выше 4, имеющих корни $t = -1$, $t = 0$ и $t = 1$. Скалярное произведение в пространстве M_4 введено стандартным образом.

Решение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$ имеем корни $t = -1$, $t = 0$ и $t = 1$ в том и только том случае, если

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0. \end{cases}$$

Поэтому в силу изометрии пространств M_4 и $\mathbb{R}^5$ со стандартными скалярными произведениями поставленная задача эквивалентна следующей задаче:

найти ортогональную проекцию вектора $f = (2, 4, 2, 0, 0)$ на подпространство L, заданное системой

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Исследуем пространство решений последней системы:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0. \end{array}\right] \qquad (49.2)$$

Отсюда $\dim L = 2$ и $\dim L^{\perp} = 3$. Так как $\dim L < \dim L^{\perp}$ (см. замечание к примеру 49.3), то будем искать разложение $f = g + h$, $g \in L$, $h \in L^{\perp}$, в виде

$$f = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + h,\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, h \in L^{\perp}, \qquad (49.3)$$

где e_1, e_2 – какой-либо базис пространства L. Построив фундаментальную систему решений системы (49.2), получим

$$e_1 = (0, 0, -1, 0, 1),\ e_2 = (0, -1, 0, 1, 0).$$

Из (49.3) следует:

$$\begin{cases} (f, e_1) = \alpha_1(e_1, e_1) + \alpha_2(e_2, e_1), \\ (f, e_2) = \alpha_1(e_1, e_2) + \alpha_2(e_2, e_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha_1 = -2, \\ 2\alpha_2 = -4 \end{cases} \iff \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -2.$$

Таким образом, вектор $g = -e_1 - 2e_2 = (0, 2, 1, -2, -1)$ является ортогональной проекцией вектора f на подпространство L.

Итак, ортогональная проекция многочлена $f(t)$ на указанное подпространств L – это многочлен $g(t) = 2t + t^2 - 2t^3 - t^4$. ■

ЗАДАЧИ

49.1. Доказать, что ортогональная сумма подпространств является прямой суммой.

49.2. Доказать, что если сумма размерностей подпространств в ортогональной сумме $L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$ равна размерности всего пространства E, то $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$.

49.3. Доказать, что сумма L подпространств $L_1, \ldots, L_p$ является их ортогональной суммой тогда и только тогда, когда совокупность ортогональных базисов этих подпространств дает ортогональный базис L.

49.4. Пусть $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$. Доказать, что эта сумма будет ортогональной тогда и только тогда, когда для скалярного произведения любых векторов x и y из E, имеющих по подпространствам $L_1, \ldots, L_p$ разложения $x = x_1 + \ldots + x_p$ и $y = y_1 + \ldots + y_p$ соответственно, справедливо равенство

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_p, y_p).$$

49.5. Линейное пространство V разложено в прямую сумму подпространств: $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_p$. Доказать, что скалярное произведение в V можно определить таким образом, чтобы подпространства L_i в этом разложении были все попарно ортогональны.

49.6. Доказать, что если A и B – матрицы одного размера и $B^T A = O$, то $\operatorname{rg}(A + B) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

49.7. Доказать, что ортогональное дополнение в евклидовом (унитарном) пространстве E обладает следующими свойствами:

а) $(L^\perp)^\perp = L$;
б) если $L_1 \subset L_2$, то $L_2^\perp \subset L_1^\perp$;
в) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;
г) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;
д) $E^\perp = \{\theta\}$, $\{\theta\}^\perp = E$.

49.8. Пусть A и B – матрицы размера $m \times n$ и $k \times n$ соответственно, причем если $Ax = 0$ для некоторого столбца x, то и $Bx = 0$. Доказать, что $B = CA$, где C – матрица размера $k \times m$.

49.9. Подпространства L_1 и L_2 дают в прямой сумме все евклидово (унитарное) пространство E. Доказать, что этим же свойством обладают и их ортогональные дополнения, т.е.

$$E = L_1^\perp \oplus L_2^\perp.$$

49.10. Пусть L и L_1 – линейные подпространства евклидова (унитарного) пространства E, причем $L_1 \subset L$. Обозначим через $L_1^\perp$ ортогональное дополнение подпространства L_1 в E, через $\widetilde{L_1}^\perp$ – ортогональное дополнение L_1 в L. Показать, что $\widetilde{L_1}^\perp = L_1^\perp \cap L$.

49.11. Пусть L_1 и L_2 – линейные подпространства евклидова (унитарного) пространства, причем $\dim L_1 < \dim L_2$. Доказать, что в L_2 найдется ненулевой вектор, ортогональный всем векторам из L_1.

49.12. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

а) $a_1 = (1,0,2,1)$, $a_2 = (2,1,2,3)$, $a_3 = (0,1,-2,1)$;
б) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (-1,1,-1,1)$, $a_3 = (2,0,2,0)$;
в) $a_1 = (1,3,0,2)$, $a_2 = (3,7,-1,2)$, $a_3 = (2,4,-1,0)$.

49.13. В пространстве комплексных арифметических векторов найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов $a_1 = (0, 1+2i, -i)$, $a_2 = (1, -1, 2-i)$ в двух случаях:

а) когда пространство комплексное со стандартным скалярным произведением;

б) когда пространство вещественное, а скалярное произведение задано равенством (47.5).

49.14. В арифметических пространствах $\mathbb{R}^4$ (для пунктов а) и б)) и $\mathbb{C}^3$ (для пункта в)) со стандартными скалярными произведениями найти системы уравнений, задающие ортогональные

дополнения к подпространствам, описанным каждой из следующих системой уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 11x_3 \quad 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 0, \\ -ix_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$

49.15. Доказать, что системы линейных уравнений, задающие линейное подпространство L в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением и его ортогональное дополнение $L^\perp$, связаны следующим образом: коэффициенты системы, задающей одно из этих подпространств, являются координатами векторов, порождающих другое подпространство.

49.16. Найти системы линейных уравнений, описывающие подпространство L, заданное в задаче 49.12(в), и его ортогональное дополнение $L^\perp$.

49.17. В пространстве многочленов M_n скалярное произведение введено стандартным образом. Найти ортогональное дополнение подпространства:

а) многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$;
б) многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$;
в) многочленов, удовлетворяющих условию $f(-1) = f(1)$;
г) всех четных многочленов пространства M_n.

49.18. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональное дополнение к подпространству:

а) матриц с нулевым следом;
б) симметрических матриц;
в) кососимметрических матриц;
г) верхних треугольных матриц.

49.19. Квадратная матрица A порядка n такова, что для любой матрицы X порядка n с нулевым следом $\operatorname{tr} AX = 0$. Доказать, что A – скалярная матрица.

49.20. Квадратная матрица A порядка n такова, что для любой симметрической матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выполнено соотношение $\operatorname{tr} AX = 0$.

1. Доказать, что A кососимметрична.

2. Что можно сказать о квадратной матрице A, если соотношение $\operatorname{tr} AX = 0$ выполнено для любой кососимметрической матрицы X порядка n?

49.21. Ненулевая квадратная матрица A порядка n такова, что для любой стохастической матрицы X порядка n выполнено соотношение $\operatorname{tr} AX = \operatorname{tr} A$. Доказать, что ранг матрицы A равен единице.

49.22. Квадратная матрица A порядка n такова, что для любой дважды стохастической матрицы X порядка n выполнено соотношение $\operatorname{tr} AX = \operatorname{tr} A$. Доказать, что ранг матрицы A не превосходит двух.

49.23. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов евклидова пространства E, заданных в некотором ортонормированном базисе E координатными столбцами:

а) $(10, 1, -7)^T$; б) $(1, 1, 1)^T$, $(1, -4, -1)^T$;

в) $(1, -5, 2, -9)^T$; г) $(1, 1, -5, 1)^T$, $(2, -7, 2, 1)^T$;

д) $(-1, 3, 0, 1)^T$, $(4, 2, 1, 1)^T$, $(3, 5, 1, 2)^T$.

49.24. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки следующих систем векторов:

а) $a_1 = (1, 2, 1)$; б) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$;

в) $a_1 = (1, 3, -1, 1)$, $a_2 = (2, 5, -2, 3)$;

г) $a_1 = (1, 2, -1, -3)$, $a_2 = (2, 1, 1, -9)$, $a_3 = (1, 4, -3, -1)$;

д) $a_1 = (-1, 0, 1, 2, 1)$, $a_2 = (2, -3, 1, -1, 4)$, $a_3 = (-1, -1, 2, 3, 3)$.

49.25. Найти базис ортогонального дополнения подпространства векторов, координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют системе линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

49.26. Найти систему линейных уравнений, описывающую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0$;

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

49.27. Пусть $Ax = b$ – вещественная система m линейных уравнений с n неизвестными, $a'_1, \ldots, a'_m$ – строки, $a_1, \ldots, a_n$ – столбцы матрицы A. Будем рассматривать решение x системы и строки матрицы A как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, а столбец правых частей b и столбцы матрицы A как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ скалярные произведения введены стандартным образом. Обозначим через L и M линейные оболочки соответственно векторов $a'_1, \ldots, a'_m$ и $a_1, \ldots, a_n$. Показать, что:

1) множество всех решений однородной системы уравнений $Ax = 0$ совпадает с $L^\perp$;

2) множество всех решений сопряженной однородной системы уравнений $A^T y = 0$ есть $M^\perp$;

3) система уравнений $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда $b \in M$;

4) опираясь на предыдущие пункты, доказать *теорему Фредгольма*: система уравнений $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда столбец b ортогонален любому решению y сопряженной однородной системы;

5) доказать *альтернативу Фредгольма*: либо система уравнений $Ax = b$ разрешима при любой правой части b, либо сопряженная однородная система имеет нетривиальное решение.

49.28. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – биортогональные базисы евклидова (унитарного) пространства и $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $k < n$. Доказать, что $L_k^{\perp} = \mathcal{L}(f_{k+1}, \ldots, f_n)$.

49.29. Доказать, что в любых двух подпространствах евклидова (унитарного) пространства можно выбрать ортонормированные базисы $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_l$ так, чтобы $(e_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(e_i, f_i) \geq 0$ для всех i.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, натянутое на векторы a_1, a_2, a_3.

49.30. $a_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a_2 = (1, 4, 3, 2)$, $a_3 = (2, 2, -2, -2)$, $f = (14, -3, -6, -7)$.

49.31. $a_1 = (1, 3, 3, 5)$, $a_2 = (1, 3, -5, -3)$, $a_3 = (1, -5, 3, -3)$, $f = (2, -5, 3, 4)$.

49.32. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$, $f = (4, -1, -3, 4)$.

49.33. $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$, $f = (5, 2, -2, 2)$.

49.34. В пространстве $\mathbb{C}^3$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора $f = (0, -1+i, -1+6i)$ на подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (-i, 2+i, 0)$, $a_2 = (2, -3-i, i)$.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, заданное однородной системой уравнений.

49.35. $f = (-3, 0, -5, 9)$, $L: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

49.36. $f = (7, -4, -1, 2)$, $L: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

49.37. $f = (8, -2, 8, 3)$, $L: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

49.38. $f = (2, 3, -1, -2)$, $L: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

В пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию g и перпендикуляр h, опущенный из вектора f на подпространство L, заданное однородной системой уравнений.

49.39. $f = (0, -7i, 7+7i)$, $L: x_1 + ix_2 - (2-i)x_3 = 0$.

49.40. $f = (4, -4, 4i)$, $L: x_1 + (1+i)x_2 - ix_3 = 0$.

49.41. $f = (3-i, 1+2i, 2, -i)$, $L: \begin{cases} (2+i)x_1 + x_2 + 2x_3 + ix_4 = 0, \\ 5x_1 - 2ix_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

В пространстве M_4 со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию и перпендикуляр, опущенный из многочлена $f(t)$ на подпространство L.

49.42. $f(t) = 5t + 6t^2 + 8t^3 + t^4$, $L: \{g'(1) = 0\}$;

49.43. $f(t) = 3 + 3t + 5t^2 + 3t^3 - t^4$, $L: \{g(-1) = g(1) = g(2)\}$;

49.44. $f(t) = 2 + 4t^2 - 7t^4$, $L: \{2g(-1) - g'(-1) = 0$, $g(0) = 0, 2g(1) + g'(1) = 0\}$.

49.45. Найти ортогональную проекцию $g(t)$ многочлена $1 + t + t^2 + t^3$ на линейное подпространство M_1 многочленов степени не выше первой, если скалярное произведение в M_3 задано:

а) стандартным образом равенством (47.8);

б) равенством (47.9), в котором $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

в) равенством (47.14), в котором $a = 1$;

г) равенством (47.15), в котором $m = 4$.

49.46. Доказать, что если в процессе ортогонализации система векторов $a_1, \ldots, a_n$ переходит в систему $b_1, \ldots, b_n$, то вектор b_k есть перпендикуляр, опущенный из вектора a_k на линейную оболочку системы $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$.

49.47. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ – ортогональный базис линейного подпространства L евклидова (унитарного) пространства E, f – произвольный вектор из E, а g – его ортогональная проекция на L. Доказать, что:

1) $g = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|(f, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} \leq |f|^2$ (неравенство Бесселя);

3) равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|(f, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} = |f|^2$ справедливо для всех векторов f из L тогда и только тогда, когда $L = E$.

49.48. Доказать, что если для системы ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|(f, a_k)|^2}{(a_k, a_k)} = |f|^2$ выполнено для всех векторов $f \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$, то система $a_1, \ldots, a_m$ ортогональна.

49.49. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства E и $G = G(a_1, \ldots, a_m)$ – ее матрица Грама. Обозначим через $G^{-1} = (\gamma_{ik})$ обратную к G матрицу. Тогда для всех векторов $f \in E$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{m} \gamma_{ik}(f, a_i)(a_k, f) \le (f, f).$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$.

49.50. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства E и $G = G(a_1, \ldots, a_m)$ – ее матрица Грама. Обозначим через $G^{-1} = (\gamma_{ik})$ обратную к G матрицу. Тогда система векторов $a_1, \ldots, a_m$ образует базис E тогда и только тогда, когда $f \in E$ выполнено равенство

$$\sum_{i,k=1}^{m} \gamma_{ik}(f, a_i)(a_k, f) = (f, f).$$

49.51. Доказать следующие свойства определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ евклидова (унитарного) пространства:

1) $\det G(f_1, \ldots, f_m) \le |f_1|^2 \cdot \ldots \cdot |f_m|^2$;

2) равенство $\det G(f_1, \ldots, f_m) = |f_1|^2 \cdot \ldots \cdot |f_m|^2$ справедливо тогда и только тогда, когда либо векторы $f_1, \ldots, f_m$ образуют ортогональную систему, либо хотя бы один из этих векторов нулевой.

49.52. Используя предыдущую задачу, доказать для определителя матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ следующие утверждения:

1) $|\det A|^2 \le \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)$ (неравенство Адамара);

2) равенство $|\det A|^2 = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)$ справедливо тогда и только тогда, когда либо $A^H A$ является диагональной матрицей, либо один из столбцов матрицы A нулевой.

49.53. Пусть L – линейное подпространство евклидова пространства E, $f_1, \ldots, f_m$ – базис в L и $G = G(f_1, \ldots, f_m)$ – его матрица Грама. Пусть для произвольного вектора $f \in L$ вектор g является его ортогональной проекцией на L, h – ортогональной составляющей. Доказать, что:

1) $|h|^2 = \dfrac{\det G(f_1, \ldots, f_m, f)}{\det G}$;

2) $|g|^2 = -\dfrac{1}{\det G} \det \begin{bmatrix} G & c^T \\ c & 0 \end{bmatrix}$, где c – строка из скалярных произведений $(f, f_1), \ldots, (f, f_m)$.

49.54. Пусть L_1 и L_2 – линейные подпространства евклидова (унитарного) пространства E такие, что $L_1 \subset L_2$, и пусть g_1 и g_2 – ортогональные проекции вектора $f \in E$ на L_1 и L_2, а h_1 и h_2 – перпендикуляры, опущенные из вектора f на L_1 и L_2 соответственно. Доказать, что $|g_1| \le |g_2|$, $|h_1| \ge |h_2|$.

49.55. Доказать следующие свойства определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l$ евклидова (унитарного) пространства:

1) для любых $k, l > 0$ выполнено неравенство

$$\det G(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) \le \det G(f_1, \ldots, f_k) \det G(g_1, \ldots, g_l);$$

2) равенство

$$\det G(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) = \det G(f_1, \ldots, f_k) \det G(g_1, \ldots, g_l)$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо линейные оболочки систем векторов $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_l$ ортогональны, либо одна из этих систем линейно зависима.

§50. Метрические задачи

Множество M называется *метрическим пространством*, если задано отображение

$$\rho : M \times M \to \mathbb{R},$$

которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что:

1) $\rho(x, y) \ge 0, \quad \forall x, y \in M,$
$\rho(x, y) = 0 \iff x = y;$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in M;$

3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \forall x, y, z \in M.$

Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между x и y*; отображение ρ – *метрикой*, аксиомы 1–3 – *аксиомами метрики (расстояния)*.

Расстоянием между множествами X и Y в метрическом пространстве называется число

$$\rho(X,Y)=\inf_{x\in X,\, y\in Y}\rho(x,y).$$

Теорема 50.1. *В евклидовом (унитарном) пространстве V правило*

$$\rho(x,y)=|x-y| \tag{50.1}$$

задает метрику.

В дальнейшем, говоря об евклидовом (унитарном) пространстве как о метрическом, будем иметь в виду именно эту метрику.

Теорема 50.2 (о кратчайшем расстоянии). *Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пространстве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L или, в других терминах:*

1) *расстояние между вектором f и подпространством L равно расстоянию между вектором f и его ортогональной проекцией на L;*

2) *среди всех векторов подпространства L ближе всего к вектору f расположена его ортогональная проекция на L.*

Пример 50.1. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора $f=(7,-3,1,-1)$ до линейного подпространства L, натянутого на векторы

$$a_1=(1,1,1,1),\ a_2=(2,-1,3,2),\ a_3=(1,0,-1,1).$$

Решение. Так как

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&-1&3&2\\1&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}a_1\\a_2\\a_3\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-2\\0&0&7&0\end{bmatrix}\begin{matrix}a_1\\a_1-a_3\\a_1+a_2-3a_3\end{matrix}$$

то $\dim L=3$ и векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис L. Следовательно, $\dim L^\perp=1$ и будем искать разложение $f=g+h$ вектора f на ортогональную проекцию g и перпендикуляр h в виде

$$f=g+\alpha e_1, \tag{50.2}$$

где e_1 – базис ортогонального дополнения $L^\perp$. Как следует из примера 49.1, вектор e_1 является фундаментальной системой решений системы с расширенной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\2&-1&3&2&0\\1&0&-1&1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&-2&0\\0&0&7&0&0\end{array}\right].$$

Отсюда $e_1=(-3,2,0,1)$.

Из равенства (50.2) получим

$$(f,e_1)=\alpha(e_1,e_1)\iff\alpha=-2.$$

Поэтому $h=-2e_1=(6,-4,0,-2)$ и $\rho(f,L)=|h|=4\sqrt{14}$. ■

Пример 50.2. В пространстве многочленов M_3 со стандартным скалярным произведением найти расстояние от многочлена $f(t)=4+t+3t^3$ до линейного подпространства L всех четных многочленов, обращающихся в нуль при $t=1$.

Решение. Многочлен $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ принадлежит подпространству L тогда и только тогда, когда $a_1=a_3=0$, $a_0+a_1+a_2+a_3=$

0. Тем самым, L – одномерное подпространство, натянутое на многочлен $e_1(t)=1-t^2$. Разложение $f(t)=g(t)+h(t)$ многочлена на ортогональную проекцию $g(t)$ и перпендикуляр $h(t)$ будем искать в виде

$$f(t)=\alpha_1e_1(t)+h(t).$$

Отсюда $(f,e_1)=\alpha_1(e_1,e_1)\iff\alpha_1=2$. Поэтому $h(t)=f(t)-2e_1(t)=2+t+2t^2+3t^3$, и следовательно, $\rho(f,L)=|h|=3\sqrt{2}$. ■

Упорядоченная тройка векторов x, y, $x-y$ произвольного евклидова (унитарного) пространства называется *треугольником, натянутым на векторы* x и y.

Точно также упорядоченная пара векторов x, y произвольного евклидова (унитарного) пространства называется *параллелограммом, натянутым на векторы* x и y *с диагоналями* $x+y$ и $x-y$.

Упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов $x_1,\ldots,x_n$ n-мерного евклидова (унитарного) пространства называется *n-мерным параллелепипедом, натянутым на векторы* $x_1,\ldots,x_n$. В частности, параллелограмм, натянутый на пару линейно независимых векторов, является двумерным параллелепипедом.

Объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1,\ldots,x_n$ евклидова пространства, определяется по индукции:

1) $V(x_1)=|x_1|$;

2) $V(x_1,\ldots,x_n)=V(x_1,\ldots,x_{n-1})\cdot|h_n|$, где h_n – ортогональная составляющая вектора x_n относительно подпространства, натянутого на векторы $x_1,\ldots,x_{n-1}$.

В евклидовом пространстве *углом* между ненулевыми векторами x и y называется угол φ, $0\le\varphi\le\pi$, для которого

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}.$$

В евклидовом пространстве *углом между ненулевым вектором* x *и ненулевым подпространством* L называется точная нижняя грань значений угла, который образует вектор x с ненулевыми векторами из L.

Углом между ненулевыми линейными подпространствами L_1 и L_2 евклидова пространства, не имеющими общих ненулевых векторов, называется точная нижняя грань значений угла между ненулевыми векторами $x_1\in L_1$ и $x_2\in L_2$. Если $L_1\cap L_2=D\ne\{\theta\}$ и $D\ne L_1$, $D\ne L_2$, то углом между L_1 и L_2 называется угол между ортогональными дополнениями $D_1^\perp$ и $D_2^\perp$ подпространства D в подпространствах L_1 и L_2 соответственно. Если одно из подпространств L_1 и L_2 содержится в другом, то угол между ними считается равным нулю.

Пример 50.3. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами $L_1=\mathcal{L}(a_1,a_2)$, где $a_1=(1,1,-1,1)$, $a_2=(2,2,-2,2)$, и L_2, описанным системой $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_2=0.\end{cases}$

Решение. Заметим, что $\dim L_1=1$, $\dim L_2=2$ и $L_1\cap L_2=\{\theta\}$. Так как косинусы углов, которые образуют векторы из L_1 с подпространством L_2 отличаются только знаком (см. задачу 50.14, пункт 3), то точная нижняя грань этих углов совпадает с углом между вектором a_1 и подпространством L_2, который, в свою очередь, равен углу между вектором a_1 и проекцией a_1 на подпространство L_2 (см. задачу 50.14, пункт 1). Найдем эту проекцию.

Имеем: $a_1=g+h$, $g\in L_2$, $h\in L_2^\perp$ или $a_1=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+h$, где $e_1=(1,0,-1,0)$, $e_2=(0,0,0,1)$ – базис L_2. Умножая почленно обе части последнего равенства на e_1 и на e_2, получим систему уравнений относительно α_1, α_2: $2\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$. Отсюда следует, что $g = e_1 + e_2 = (1, 0, -1, 1)$.

Следовательно, если φ – угол между a_1 и g (т.е. искомый угол), то $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$ и $\varphi = \pi/6$. ■

Пример 50.4. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2)$, где $a_1 = (1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (0, 0, -1, 1)$, и L_2, описанным системой $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Решение. Заметим, что $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 2$, $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Путь решения, описанный в примере 50.3, не может быть применен в данной задаче, так как $\dim L_1 > 1$, $\dim L_2 > 1$. Будем исходить из определения угла между подпространствами с нулевым пересечением. Обозначим через $\varphi(x, y)$, $\varphi(x, L)$ и $\varphi(L_1, L_2)$ угол между векторами x, y, угол между вектором x и подпространством L и угол между подпространствами L_1 и L_2 соответственно.

Пусть x – произвольный вектор из L_1, g – его ортогональная проекция на L_2, g_1 – ортогональная проекция g на L_1. Имеем

$$\varphi(L_1, L_2) = \inf_{x \in L_1, y \in L_2} \varphi(x, y) = \inf_{x \in L_1} \left(\inf_{y \in L_2} \varphi(x, y) \right) = \inf_{x \in L_1} \varphi(x, g) = \\ = \varphi(g, L_1) = \varphi(g, g_1).$$

Таким образом,

$$\varphi(L_1, L_2) = \varphi(g, g_1), \tag{50.3}$$

где g – ортогональная проекция произвольного ненулевого вектора $x \in L_1$ на L_2, а g_1 – ортогональная проекция вектора g на L_1.

Возьмем $x = a_1$. Как следует из примера 50.3, $g = (1, 0, -1, 1)$. Разложение $g = g_1 + h$, где $g_1 \in L_1$, $h \perp L_1$, находим в виде

$$g = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + h,$$

где коэффициенты α_1, α_2 являются решением системы $\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2, \end{cases}$

т.е. $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/2$ и $g = \dfrac{1}{2}(1, 1, -2, 2)$.

Следовательно, если φ – искомый угол, то согласно (50.3) $\cos\varphi = \sqrt{30}/6$ и $\varphi = \arccos(\sqrt{30}/6)$. ■

Пример 50.5. В пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3)$, где $a_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $b_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $b_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$, $b_3 = a_3$.

Решение. Заметим, что $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 3$, $L = L_1 \cap L_2 = \mathcal{L}(a_3)$, $\dim L = 1$. Согласно определению $\varphi(L_1, L_2) = \varphi(\widetilde{L_1}, \widetilde{L_2})$, где $\widetilde{L_1}$ – ортогональное дополнение L до L_1, $\widetilde{L_2}$ – ортогональное дополнение L до L_2. Имеем: $\widetilde{L_1} = \mathcal{L}(a_1, a_2)$,$\widetilde{L_2} = \mathcal{L}(b_1, b_2)$, при этом $\dim \widetilde{L_1} = \dim \widetilde{L_2} = 2$, $\widetilde{L_1} \cap \widetilde{L_2} = \{\theta\}$. Этот случай рассмотрен в примере 50.4. Впрочем можно не прибегать к вычислениям, описанным в этом примере, так как $\widetilde{L_1} \perp \widetilde{L_2}$, и потому искомый угол $\varphi = \pi/2$. ■

ЗАДАЧИ

50.1. Найти угол между векторами a и b в пространстве:

1) $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, если:
а) $a = (2, -3, 1)$, $b = (4, -6, 2)$; б) $a = (1, -1, 2)$, $b = (1, 0, 1)$;
в) $a = (1, 0, -1)$, $b = (-1, 2, 2)$;

2) $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, если:
а) $a = (1, -1, 1, -1)$, $b = (-1, 1, -1, 1)$;
б) $a = (-1, 2, 3, -4)$, $b = (5, 0, -2, 1)$;
в) $a = (1, 2, 2, 1)$, $b = (1, 1, 1, 2)$;

3) $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, если:
а) $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$; б) $a = (1, 0)$, $b = (-1, 1)$;

4) $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением $(x, y) = x \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} y^T$, если:
а) $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$; б) $a = (-1, 0, 0)$, $b = (-1, 2, 2)$.

50.2. Как изменится угол между ненулевыми векторами x и y, если:
а) умножить вектор x на положительное число;
б) умножить вектор x на отрицательное число;
в) умножить оба вектора x и y на отрицательные числа?

50.3. Доказать, что треугольники, натянутые соответственно на векторы x, y и αx, αy, где α – произвольное ненулевое число, имеют одинаковые углы.

50.4. В треугольнике, натянутом на векторы:
а) $x = (2, -1, 3, -2)$ и $y = (3, 1, 5, 1)$;
б) $x = (4, 0, 2, 0, 4)$ и $y = (3, 3, 3, 3, 0)$
в арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением, найти длины сторон. Определить углы между сторонами треугольника – векторами x, y, $x - y$. Какие из этих углов естественно считать внутренними углами треугольника, а какие – внешними?

50.5. Доказать, что в евклидовом пространстве:
1) сумма внутренних углов любого треугольника равна π;
2) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон;
3) квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус

угла между ними (теорема косинусов);

4) стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных внутренних углов (теорема синусов).

50.6. Пусть $f_1, \dots, f_k$ – система попарно ортогональных векторов евклидова или унитарного пространства. Доказать, что $|f_1 + \dots + f_k|^2 = |f_1|^2 + \dots + |f_k|^2$ (обобщение теоремы Пифагора).

50.7. Доказать, что в евклидовом пространстве верна теорема, обратная теореме Пифагора: если $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$, то векторы f_1 и f_2 ортогональны. Справедливо ли это утверждение в унитарном пространстве?

50.8. Доказать, что векторы x и y унитарного пространства ортогональны тогда и только тогда, когда равенство $|\alpha x + \beta y|^2 = |\alpha x|^2 + |\beta y|^2$ выполнено для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

50.9. 1. Доказать, что в евклидовом пространстве равенство $|x + y| = |x - y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y ортогональны. Каков геометрический смысл этого утверждения?

2. Показать, что в унитарном пространстве утверждение предыдущего пункта уже неверно. Для каких векторов x и y имеет место равенство $|x + y| = |x - y|$?

50.10. В n-мерном евклидовом пространстве E заданы векторы $e_1, \dots, e_{n+1}$, попарно образующие тупые углы. Доказать, что любые n из этих векторов образуют базис E.

50.11. Доказать, что в n-мерном евклидовом пространстве $n + 2$ вектора не могут попарно образовывать тупые углы.

50.12. Доказать, что в n-мерном евклидовом пространстве $n+1$ вектор не могут попарно образовывать углы, все равные $\pi/3$.

50.13. Может ли угол между вектором и линейным подпространством быть больше, чем $\pi/2$?

50.14. Пусть f – ненулевой вектор евклидова пространства E, L – линейное подпространство E, φ – угол между f и L, g – ортогональная проекция вектора f на L. Доказать, что:

1) если $g = \theta$, то $\varphi = \pi/2$;

2) если $g \neq \theta$, то угол φ равен углу между векторами f и g;

3) если $g \neq \theta$, то для всякого вектора $y \in L$, образующего угол φ с вектором f, имеет место равенство $y = \alpha g$, где $\alpha > 0$.

50.15. Доказать, что в евклидовом пространстве углы, которые вектор f образует с произвольным подпространством L и

его ортогональным дополнением $L^\perp$, в сумме равны $\pi/2$.

50.16. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства, x – произвольный нормированный вектор. Доказать, что координаты вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$ равны косинусам углов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые x образует с базисными векторами. Вывести отсюда соотношение:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

50.17. Евклидово пространство E разложено в ортогональную сумму подпространств $L_1, \dots, L_p$. Доказать, что для углов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, которые произвольный вектор f образует с подпространствами $L_1, \dots, L_p$, справедливо соотношение

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \dots + \cos^2 \alpha_p = 1.$$

50.18. Подпространство L есть ортогональная сумма подпространств L_1 и L_2. Вектор f ортогонален подпространству L_1. Доказать, что угол между f и L равен углу между f и L_2.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между вектором f и линейным подпространством L, натянутым на векторы a_1, a_2, a_3.

50.19. $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (-1, -8, 2, 16)$, $a_3 = (3, -2, -6, 4)$, $f = (-3, 15, 1, -5)$.

50.20. $a_1 = (2, -1, 2, 1)$, $a_2 = (-1, 2, -2, 1)$, $a_3 = (-1, 1, -1, 0)$, $f = (3, 1, \sqrt{2}, -2)$.

50.21. $a_1 = (3, 4, -4, -1)$, $a_2 = (0, 1, -1, 2)$, $a_3 = (3, 5, -5, 1)$, $f = (2, 2, 1, 1)$.

50.22. $a_1 = (5, 3, 4, -3)$, $a_2 = (1, 1, 4, 5)$, $a_3 = (2, -1, 1, 2)$, $f = (1, 0, 3, 0)$.

В евклидовом пространстве E выбран некоторый ортонормированный базис e. Найти угол между вектором f, заданным координатным столбцом в этом базисе, и подпространством L, описанным в базисе e однородной системой уравнений.

50.23. $f_e = (1, -2, 1)^T$, $L: \ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$.

50.24. $f_e = (1, 0, 0, 0)^T$, $L: \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

50.25. $f_e = (3, 1, -1, -1)^T$, $L: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad x_4 = 0. \end{cases}$

50.26. $f_e = (0, 2, 1, 1)^T$, $L: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + \qquad 2x_4 = 0. \end{cases}$

50.27. В пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением линейное подпространство L описано системой $Ax = 0$ с некоторой матрицей $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Найти угол между вектором $(c_1, \ldots, c_n)$ и подпространством L, если $c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$.

В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора f до подпространства L, натянутого на векторы $a_1, \ldots, a_k$.

50.28. $a_1 = (4, 3, 2, 1)$, $f = (1, -1, 1, -1)$.

50.29. $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (4, 0, 5)$, $f = (7, -3, -1)$.

50.30. $a_1 = (1, -1, 1, 0)$, $a_2 = (2, -1, 0, 1)$, $f = (1, 0, 2, -2)$.

50.31. $a_1 = (-2, 0, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 1, -1, -1)$, $f = (1, 2, 0, -1)$.

50.32. $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (5, 1, 1, 3)$, $a_3 = (3, -1, 1, 0)$, $f = (5, 4, -3, -2)$.

В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора f до подпространства L, заданного однородной системой уравнений.

50.33. $f = (1, -2, 3, -4)$, $L : \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

50.34. $f = (8, -2, 8, 3)$, $L : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

50.35. $f = (2, 3, -1, -2)$, $L : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

50.36. $f = (0, 1, -2, 3)$, $L : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

50.37. Доказать, что квадрат расстояния от вектора f евклидова пространства до подпространства L, натянутого на линейно независимую систему векторов $f_1, \ldots, f_k$, равен отношению определителей Грама систем $f_1, \ldots, f_k, f$ и $f_1, \ldots, f_k$.

50.38. Пусть L – линейное подпространство и f – некоторый вектор евклидова (унитарного) пространства. Доказать, что наименьшее значение величины $|f - g|$ среди всех векторов $g \in L$ достигается на единственном векторе, являющемся ортогональной проекцией вектора f на подпространство L, и оно равно длине перпендикуляра, опущенного из f на L.

50.39. В пространстве многочленов M_n скалярное произведение введено стандартным образом. Для заданных многочленов:

$$f_1(t) = 3t^2 + 2t + 1, \quad f_2(t) = -t^2 + 2t + 1,$$
$$f_3(t) = 3t^2 + 2t + 5, \quad f_2(t) = 3t^2 + 2t + 2$$

а) найти многочлен $f_0(t)$ степени не выше 2, равноудаленный от $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

б) определить расстояние между $f_0(t)$ и каждым из многочленов $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$;

в) доказать, что всякий многочлен вида

$$f_0(t) + \alpha_3 t^3 + \ldots + \alpha_n t^n$$

равноудален от $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, и определить расстояние от него до этих многочленов.

50.40. Доказать, что в евклидовом пространстве E для любого подпространства L и любого вектора $x \in E$ выполнено равенство

$$\rho(x + y, L) = \rho(x, L),$$

где y – произвольный вектор подпространства L.

50.41. Подпространство L является ортогональной суммой подпространств L_1 и L_2. Доказать, что если вектор x ортогонален подпространству L_1, то

$$\rho(x, L) = \rho(x, L_2).$$

50.42. Пусть a – фиксированный вектор евклидова пространства, L – подпространство всех векторов, ортогональных a. Доказать, что для произвольного вектора x расстояние до подпространства L можно вычислить по формуле

$$\rho(x, L) = \frac{|(x, a)|}{|a|}.$$

50.43. В пространстве многочленов M_n скалярное произведение введено стандартным образом. Найти расстояние между подпространством M_{n-1} и

а) многочленом t^n;

б) многочленом $t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$;

в) многочленом $\alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0$.

50.44. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением рассматривается подпространство L всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$. Доказать, что расстояние от произвольного многочлена $g(t)$ до подпространства L равно

$$\rho(g, L) = \frac{g(1)}{\sqrt{n+1}}.$$

50.45. Показать, что угол между любыми линейными подпространствами всегда определен и равен нулю тогда и только тогда, когда одно из этих подпространств содержится в другом.

50.46. Найти угол между подпространствами векторов x евклидова пространства, удовлетворяющими условию $(x, a_1) = 0$ и $(x, a_2) = 0$ соответственно, где a_1, a_2 – заданные ненулевые векторы.

50.47. Подпространства L_1 и L_2 являются линейными оболочками систем векторов, заданных в некотором ортоноромированном базисе евклидова пространства координатными столбцами $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$. Найти угол между подпространствами L_1 и L_2, если:

1) $a_1 = (0, 3, -1, 0)^T$, $a_2 = (1, -2, 1, 1)^T$,
$b_1 = (0, 0, 1, -3)^T$, $b_2 = (1, 1, 0, 1)^T$;

2) $a_1 = (1, 1, 2, 0)^T$, $a_2 = (2, 0, -1, -1)^T$,
$b_1 = (1, 1, 0, -2)^T$, $b_2 = (1, 1, -3, 1)^T$;

3) $a_1 = (1, 2, 0, 1)^T$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)^T$,
$b_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $b_2 = (1, 1, 2, 0)^T$, $b_3 = (1, 0, 1, -1)$;

4) $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $a_2 = (1, 0, 1, 2)^T$, $a_3 = (0, 1, 0, -1)^T$,
$b_1 = (1, 1, 0, 0)^T$, $b_2 = (1, 0, 0, 1)^T$, $b_3 = (0, 1, 1, 0)$.

50.48. В пространстве M_n рассматриваются одномерные подпространства $L_0, L_1, \ldots, L_n$, натянутые на многочлены 1, $t, \ldots, t^n$ соответственно. Для каждого $k = \overline{1, n}$ найти угол между подпространствами L_{k-1} и L_k, если:

а) скалярное произведение в M_n введено стандартным образом;

б) скалярное произведение в M_n введено равенством (47.9), в котором $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

50.49. В пространстве M_n со стандартным скалярным произведением найти угол между подпространствами:

а) $L_1 = \{f(t) \mid f(1) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f'(1) = 0\}$;

б) $L_1 = \{f(t) \mid f(1) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f(2) = 0\}$;

в) $L_1 = \{f(t) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ и $L_2 = \{f(t) \mid f'(0) = 0\}$.

50.50. Доказать, что объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_n$, может быть вычислен по формуле

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\det G(a_1, \ldots, a_n)} = |\det A|,$$

где $G(a_1, \ldots, a_n)$ – матрица Грама векторов $a_1, \ldots, a_n$, а A – матрица, строками которой являются координаты рассматриваемых векторов в каком-нибудь ортонормированном базисе n-мерного подпространства, натянутого на векторы $a_1, \ldots, a_n$.

50.51. В пространстве многочленов M_n со скалярным произведением (47.9) с $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$, найти:

а) объем параллелепипеда, натянутого на многочлены 1, t, $t^2, \ldots, t^n$;

б) наименьшее значение интеграла

$$\int_{-1}^{1} (t^n - f(t))^2\, dt$$

на множестве всех многочленов $f(t)$ степени не выше $n-1$.

50.52. Доказать, что объем n-мерного параллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер, выходящих из одной вершины:

$$V(a_1, \ldots, a_n) \le \prod_{i=1}^{n} |a_i|,$$

и равен этому произведению тогда и только тогда, когда эти ребра попарно ортогональны, т.е. параллелепипед прямоугольный.

50.53. Доказать, что объем параллелепипеда удовлетворяет неравенству:

$$V(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \le V(a_1, \ldots, a_k) V(b_1, \ldots, b_l),$$

причем знак равенства в нем имеет место тогда и только тогда, когда линейные подпространства, натянутые на векторы $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$, ортогональны.

50.54. Доказать, что если $a_1, \ldots, a_n$ – нормированная система векторов и $V(a_1, \ldots, a_n) = 1$, то эта система ортонормирована.

50.55. Доказать, что среди всех параллелепипедов, натянутых на нормированную систему, параллелепипед, натянутый на ортонормированную систему, имеет максимальный объем.

§51. Линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве

Пусть $H = x_0 + L$ – линейное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Вектор $n \in H$, ортогональный L, называется *нормальным вектором линейного многообразия H*.

Теорема 51.1. *Для любого линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве существует, и притом единственный, нормальный вектор.*

Теорема 51.2. *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из любого вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*

Следствие. *Среди всех векторов линейного многообразия нормальный вектор имеет наименьшую длину.*

Пример 51.1. Найти нормальный вектор линейного многообразия $H = a_0 + L$, если $a_0 = (-1,0,0,3)$, а L натянуто на векторы $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,2,-1)$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ задано стандартным образом.

Решение. Нормальный вектор n линейного многообразия H удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} n = a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \\ n \perp L \end{cases} \iff \begin{cases} n = a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \\ (n, a_1) = 0, \\ (n, a_2) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} n = a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \\ \alpha_1(a_1,a_1) + \alpha_2(a_2,a_1) = -(a_0,a_1), \\ \alpha_1(a_1,a_2) + \alpha_2(a_2,a_2) = -(a_0,a_2). \end{cases}$$

Из последней системы следует, что $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, и следовательно, $n = (-1,0,0,3) - (1,1,1,1) + (1,0,2,-1) = (-1,-1,1,1)$. ■

Пример 51.2. Найти нормальный вектор линейного многообразия H, заданного системой

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ задано стандартным образом.

Решение. Направляющим подпространством L линейного многообразия $H = a_0 + L$ служит множество решений приведенной однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

фундаментальная система решений

$$e_1 = (1,0,0,-1),\ e_2 = (1,1,-1,0)$$

которой, очевидно, образует базис в L.

Согласно определению нормального вектора n многообразия H, он ортогонален направляющему подпространству L или, что то же самое, его базису e_1, e_2. Тем самым, координаты (x_1,x_2,x_3,x_4) нормального вектора n удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ (n, e_1) = 0, \\ (n, e_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $n = (0,1,1,0)$. ■

Теорема 51.3. *Пусть $H = x_0 + L$ — линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Тогда*

$$\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L).$$

Пример 51.3. Найти расстояние от многочлена $f(t) = -4 + 3t - t^2 + t^3$ до линейного многообразия H всех многочленов степени не выше 3, удовлетворяющих условиям $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$. Скалярное произведение в M_3 задано стандартным образом.

Решение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ принадлежит многообразию H тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 2. \end{cases}$$

Вектором сдвига x_0 многообразия H является многочлен, коэффициенты которого удовлетворяют этой системе – например, $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 0$, т.е. многочлен $x_0(t) = -1 + 2t$.

Расстояние от многочлена $f(t)$ до рассматриваемого линейного многообразия H равно расстоянию от многочлена $f(t) - x_0(t) = -3 + t - t^2 + t^3$ до направляющего подпространства L многообразия H, которое в данном случае описывается однородной системой

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что ортогональное дополнение $L^\perp$ является линейной оболочкой, натянутой на многочлены, коэффициенты которых совпадают с коэффициентами однородной системы, описывающей L, т.е. на многочлены $e_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3$, $e_2(t) = t + 2t^2 + 3t^3$. Поэтому разложение многочлена $f(t) - x_0(t)$ на ортогональную проекцию $g(t)$ и перпендикуляр $h(t)$ будем искать в виде

$$f(t) - x_0(t) = g(t) + h(t) \iff f(t) - x_0(t) = g(t) + \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t).$$

Из последнего соотношения следует

$$\begin{cases} (f - x_0, e_1) = \alpha_1(e_1,e_1) + \alpha_2(e_2,e_1), \\ (f - x_0, e_2) = \alpha_1(e_1,e_2) + \alpha_2(e_2,e_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 4\alpha_1 + 6\alpha_2 = -2, \\ 6\alpha_1 + 14\alpha_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{matrix} \alpha_1 = -2, \\ \alpha_2 = 1. \end{matrix}$$

Следовательно, $h(t) = -2e_1(t) + e_2(t) = -2 - t + t^3$. Отсюда $\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L) = |h| = \sqrt{6}$. ■

Теорема 51.4. *Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ – линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве. Тогда*

$$\rho(H_1, H_2) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2).$$

Пример 51.4. Найти расстояние между линейным многообразием H_1 всех четных многочленов степени не выше 3, удовлетворяющих условию $f(1) = 1$, и линейным многообразием H_2 всех нечетных многочленов степени не выше 3. Скалярное произведение в M_3 задано стандартным образом.

Решение. Линейное многообразие H_1 имеет вектор сдвига $x_1(t) = 1$ и направляющее подпространство L_1, состоящее из всех четных многочленов, обращающихся в нуль при $t = 1$. Таким образом, L_1 одномерно и натянуто на многочлен $a_1(t) = 1 - t^2$.

Линейное многообразие H_2 является линейным подпространством, поэтому его вектор сдвига $x_2(t)$ можно выбрать нулевым, а направляющее подпространство L двумерно и натянуто на многочлены $b_1(t) = t$, $b_2(t) = t^3$.

Расстояние между H_1 и H_2 согласно теореме 51.4 равно расстоянию от вектора $x_1(t) - x_2(t) = x_1(t)$ до подпространства $L_1 + L_2 = \mathcal{L}(a_1, b_1, b_2)$.

Найдем ортогональное дополнение подпространства $L_1 + L_2$. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ принадлежит $(L_1 + L_2)^\perp$ тогда и только тогда, когда

$$a_0 - a_2 = 0, \quad a_1 = a_3 = 0.$$

Следовательно, подпространство $(L_1 + L_2)^{\perp}$ одномерно и натянуто на многочлен $e(t) = 1 + t^2$, и разложение

$$x_1(t) = g(t) + h(t), \quad g(t) \in L_1 + L_2, \; h(t) \perp (L_1 + L_2).$$

будем искать в виде $x_1(t) = g(t) + \alpha e(t)$.

Имеем $(x_1, e) = \alpha(e, e)$, т.е. $\alpha = 1/2$. Следовательно, $h(t) = (1 + t^2)/2$ и $\rho(H_1, H_2) = |h| = 1/\sqrt{2}$. ▪

Углом между линейными многообразиями называется угол между их направляющими подпространствами.

ЗАДАЧИ

51.1. Доказать, что множество всех векторов евклидова (унитарного) пространства E, удовлетворяющих условию $(n, x) = b$, где n – фиксированный ненулевой вектор, b – заданное число, есть гиперплоскость этого пространства. В каком случае эта гиперплоскость является подпространством?

51.2. Показать, что гиперплоскость, заданную условием $(n, x) = b$, можно описать и условием $(n, x - x_0) = 0$, где x_0 – произвольный вектор этой гиперплоскости.

51.3. Доказать, что всякую гиперплоскость евклидова пространства можно задать условием $(n, x) = b$.

51.4. Доказать, что если условия $(n_1, x) = b_1$ и $(n_2, x) = b_2$ определяют одну и ту же гиперплоскость, то $n_1 = \alpha n_2$, $b_1 = \alpha b_2$ для некоторого ненулевого числа α.

51.5. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением для гиперплоскости, заданной условием $f(c) = d$, найти представление $(n, f) = b$. Указать соответствующий многочлен $n(t)$.

51.6. Всякую ли гиперплоскость пространства многочленов M_n можно задать условием вида $f(c) = d$?

51.7. Пусть $t_1 \in \mathbb{R}$ произвольно. Доказать, что любую гиперплоскость в пространстве многочленов M_n можно задать условием

$$\alpha_0 f(t_1) + \alpha_1 f'(t_1) + \ldots + \alpha_n f^{(n)}(t_1) = c$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}$.

51.8. Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_n$ – произвольные различные между собой действительные числа. Доказать, что любую гиперплоскость в пространстве многочленов M_n можно задать условием

$$\alpha_0 f(t_0) + \alpha_1 f(t_1) + \ldots + \alpha_n f(t_n) = c$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}$.

51.9. Пусть a_k, $k = \overline{0, n+1}$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1}$. Доказать, что любую гиперплоскость в пространстве многочленов M_n можно задать условием

$$\alpha_0 \int_{a_0}^{a_1} f(t)\,dt + \alpha_1 \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt + \ldots + \alpha_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt = c$$

с соответствующим образом подобранными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, c \in \mathbb{R}$.

51.10. Доказать, что в каждом ортонормированном базисе пространства всякая гиперплоскость может быть описана уравнением первой степени

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n = b$$

относительно координат $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ векторов этой гиперплоскости.

51.11. Доказать, что если пересечение гиперплоскостей n-мерного евклидова (унитарного) пространства

$$(n_1, x) = b_1, \, (n_2, x) = b_2, \ldots, (n_k, x) = b_k$$

непусто, то оно представляет собой линейное многообразие размерности $n - r$, где r – ранг системы векторов $n_1, \ldots, n_k$.

51.12. Найти нормальный вектор для гиперплоскости, заданной условием $(n, x) = b$.

51.13. Пусть n – нормальный вектор многообразия H (не совпадающего со всем пространством). Доказать, что многообразие H содержится в гиперплоскости $(n, x) = (n, n)$.

51.14. В пространстве многочленов M_n со стандартным скалярным произведением определить нормальный вектор для многообразия, заданного условиями:

а) $f(0) = 1$, $f(1) = 1$; б) $f'(0) = 1$, $f'(1) = 1$;
в) $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$; г) $f(0) + f'(0) = 1$, $f(1) = 0$.

51.15. Подпространство L натянуто на линейно независимую систему векторов $a_1, \ldots, a_k$. Доказать, что расстояние от вектора x до линейного многообразия $H = x_0 + L$ равно

$$\rho(x, H) = \sqrt{\frac{\det G(a_1, \ldots, a_k, x - x_0)}{\det G(a_1, \ldots, a_k)}}.$$

51.16. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от вектора $x = (5, 3, -1, -1)$ до многообразия $H = x_0 + L$, где $x_0 = (0, 0, -3, 6)$, а L натянуто на систему векторов $a_1 = (1, 0, 2, -2)$, $a_2 = (0, 1, 2, 0)$, $a_3 = (2, 1, 6, -4)$.

51.17. В пространстве M_n со стандартным скалярным произведением найти расстояние от многочлена $x(t) = 1 + t + \ldots + t^n$ до многообразия, заданного условием:

а) $f(1) = 1$; б) $f(0) = f(1) = 1$; в) $f(0) = f'(1) = 1$.

51.18. В пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ со стандартным скалярным произведением найти расстояние от матрицы X, все элементы которой равны 1, до многообразия:

а) матриц A с единичным следом: $\operatorname{tr} A = 1$;

б) всех стохастических матриц;

в) всех дважды стохастических матриц.

51.19. Доказать, что квадрат расстояния между прямыми $l_1 : x = x_1 + tq_1$ и $l_2 : x = x_2 + tq_2$ может быть вычислен по формуле:

1) $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{\det G(q_1, q_2, x_1 - x_2)}{\det G(q_1, q_2)}$, если прямые l_1 и l_2 не параллельны;

2) $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{\det G(q_1, x_1 - x_2)}{(q_1, q_1)}$, если прямые l_1 и l_2 параллельны.

Найти расстояние между прямыми $l_1 : x = x_1 + tq_1$ и $l_2 : x = x_2 + tq_2$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ считается введенным стандартным образом).

51.20. $x_1 = (5, 2, 0, 3)$, $q_1 = (1, 2, -4, 1)$;
$x_2 = (3, -1, 3, 1)$, $q_2 = (1, 0, -1, 0)$.

51.21. $x_1 = (5, 4, 3, 2)$, $q_1 = (1, 1, -1, -1)$;
$x_2 = (2, 1, 4, 3)$, $q_2 = (-3, -3, 3, 3)$.

Найти расстояние между плоскостями $P_1 : x = x_1 + t_1p_1 + t_2p_2$ и $P_2 : x = x_2 + t_1q_1 + t_2q_2$ (скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$ считается введенным стандартным образом).

51.22. $x_1 = (89, 37, 111, 13, 54)$, $x_2 = (42, -16, -39, 71, 3)$,
$p_1 = (1, 1, 0, -1, -1)$, $p_2 = (1, -1, 0, -1, 1)$;
$q_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $q_2 = (1, -1, 0, 1, -1)$.

51.23. $x_1 = (5, 0, -1, 9, 3)$, $x_2 = (3, 2, -4, 7, 5)$,
$p_1 = (1, 1, 0, -1, -1)$, $p_2 = (1, -1, 0, -1, 1)$;
$q_1 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $q_2 = (0, 3, 0, 1, -2)$.

51.24. $x_1 = (4, 3, 3, 3, 0)$, $x_2 = (-1, 1, -1, 0, 2)$,
$p_1 = (1, 2, 2, -1, 1)$, $p_2 = (2, 1, -2, 1, -1)$;
$q_1 = (8, 7, -2, 1, -1)$, $q_2 = (5, 4, -2, 1, -1)$.

51.25. Доказать, что в любом базисе линейного пространства любая гиперплоскость может быть описана уравнением первой степени относительно координат векторов этой гиперплоскости (ср. с задачей 51.10).

51.26. Доказать, что в любом базисе линейного пространства всякое линейное многообразие размерности r может быть описано системой $n - r$ линейных уравнений относительно координат векторов этого многообразия.

51.27. Пусть H – некоторое линейное многообразие линейного пространства, не являющееся подпространством; x – произвольный вектор этого многообразия. Показать, что в пространстве можно ввести скалярное произведение таким образом, чтобы x был нормальным вектором многообразия H.

51.28. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением найти угол между плоскостями $P_1 : x = x_1 + t_1p_1 + t_2p_2$ и $P_2 : x = x_2 + t_1q_1 + t_2q_2$, где

$x_1 = (3, 1, 0, 1)$, $p_1 = (1, 0, 0, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0, 0)$,
$x_2 = (2, 1, 1, 3)$, $q_1 = (1, 1, 1, 1)$, $q_2 = (1, -1, 1, -1)$.

Глава XIV. Линейные операторы в линейных пространствах

§52. Линейный оператор и его матрица

Пусть V и W – линейные пространства над общим полем P. Отображение

$$\mathcal{A} : V \to W \tag{52.1}$$

называется *линейным отображением пространства V в пространство W*, если для любых $x, y \in V$, $\alpha \in P$

1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$.

Линейное отображение (52.1) называют также *линейным преобразованием пространства V в пространство W* или *линейным оператором, действующим из пространства V в пространство W*.

Если $V = W$, то линейное отображение $\mathcal{A} : V \to V$ называют *линейным отображением (преобразованием) пространства V в себя*, а чаще – *линейным оператором, действующим в V*.

Если $W = P$, то линейное отображение (52.1) называют *линейной формой* или *линейным функционалом в пространстве V*. Линейный функционал обозначают строчными латинскими буквами (например, f), при этом образ вектора x – символом $f(x)$.

Множество всех линейных операторов, действующих из пространства V в пространство W, будем обозначать символом $\mathcal{L}(V, W)$.

В соответствии с определением равенства отображений (§11) операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны, если $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$, $\forall x \in V$.

Пример 52.1. Пусть M_n – пространство вещественных многочленов степени не выше n. Отображение $\mathcal{D} : M_n \to M_n$, определенное правилом

$$\mathcal{D}p(t) = p'(t),$$

является линейным и называется *оператором дифференцирования*.

Пример 52.2. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Отображение $\mathcal{P} : V \to V$, определенное правилом

$$\mathcal{P}x = x_1$$

для вектора $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, является линейным и называется *оператором проектирования (проектором) пространства V на L_1 параллельно L_2*.

Отображение $\mathcal{R} : V \to V$, определенное правилом

$$\mathcal{R}x = x_1 - x_2,$$

также является линейным и называется *оператором отражения пространства V относительно L_1 параллельно L_2*.

Пример 52.3. Отображение $\mathcal{O} : V \to W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $\theta \in W$, является линейным и называется *нулевым оператором*.

Пример 52.4. Отображение $\mathcal{I} : V \to V$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в x, является линейным и называется *тождественным (единичным) оператором*.

Пример 52.5. Изоморфизм φ линейных пространств V и W (§44), очевидно, является линейным оператором, действующим из V в W.

Из определения оператора следует, что

1) *линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор*;

2) *линейный оператор сохраняет линейные комбинации*, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами: $\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}x_i$;

3) *линейный оператор сохраняет линейную зависимость*, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

Теорема 52.1. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, а $g_1, \ldots, g_n$ – произвольные векторы пространства W. Тогда существует и притом единственный, линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно.*

Следствие. Линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны тогда и только тогда, когда они совпадают на векторах базиса V.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пространств V и W. Как следует из теоремы 52.1, линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. В свою очередь, векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1, n}$, однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{m2} f_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m. \end{cases}$$

Матрица

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e и f*. Для обозначения этой матрицы используется также символ $(\mathcal{A})_{fe}$.

Из единственности разложения вектора по базису следует, что при фиксированных базисах e и f матрица линейного оператора определена однозначно.

Теорема 52.2. *Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$.*

Теорема 52.3. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, e и f – базисы пространств V и W соответственно. Тогда если $y = \mathcal{A}x$, то*

$$y_f = A_{fe} x_e.$$

Пусть $f \in \mathcal{L}(V, P)$ – линейная форма в пространстве V над полем P. Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, то линейная форма f однозначно определяется числами

$$\alpha_1 = f(e_1), \; \ldots, \; \alpha_n = f(e_n).$$

При этом для произвольного вектора $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ выполнено равенство

$$f(x)=\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n.$$

Это представление называется *общим видом линейной формы f в базисе* $e_1,\ldots,e_n$. Числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ называются *коэффициентами линейной формы f в базисе* $e_1,\ldots,e_n$.

Если $W=V$, то при построении матрицы линейного оператора $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V,V)$ используется один базис e пространства V: столбцами этой матрицы являются коэффициенты разложений векторов $\mathcal{A}e_1,\ldots,\mathcal{A}e_n$ по базису $e_1,\ldots,e_n$; матрица обозначается символом A_e или $(\mathcal{A})_e$ и называется *матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе e*. Очевидно, $A_e\in P^{n\times n}$.

Пример 52.6. Выяснить, являются ли линейными следующие преобразования.

1. Преобразование $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_3,-x_2,x_1)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в себя.
2. Преобразование $\mathcal{A}(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2+1)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в себя.
3. Преобразование $\mathcal{A}X=\operatorname{tr}X$ пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ в пространство $\mathbb{R}$.
4. Преобразование $\mathcal{A}X=\det X$ пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ в пространство $\mathbb{R}$.
5. Преобразование $\mathcal{A}p(t)=p(2t+1)$ пространства многочленов M_n в себя.
6. Преобразование $\mathcal{A}p(t)=\dfrac{p(1+t)-p(1-t)}{2t}$ пространства M_n в пространство M_{n-1}.

Решение. 1. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным, так как если $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ и $\alpha\in\mathbb{R}$, то

$$\mathcal{A}(x+y)=(x_3+y_3,-x_2-y_2,x_1+y_1)=\mathcal{A}x+\mathcal{A}y,$$
$$\mathcal{A}(\alpha x)=(\alpha x_3,-\alpha x_2,\alpha x_1)=\alpha\mathcal{A}x.$$

2. Преобразование $\mathcal{A}$ не является линейным, так как оно нулевой вектор $(0,0)$ переводит в ненулевой вектор $(0,1)$.

3. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным, так как в силу определения следа матрицы:

$$\mathcal{A}(X+Y)=\operatorname{tr}(X+Y)=\operatorname{tr}X+\operatorname{tr}Y=\mathcal{A}X+\mathcal{A}Y,$$
$$\mathcal{A}(\alpha X)=\operatorname{tr}(\alpha X)=\alpha\operatorname{tr}X=\alpha\mathcal{A}X.$$

Таким образом, это преобразование – линейная форма в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$.

4. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным лишь в случае $n=1$, так как при $n\geq 2$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\alpha X)=\det(\alpha X)=\alpha^n\det X=\alpha^n\mathcal{A}X,$$

что, например, при $\alpha=2$ противоречит пункту 2 определения линейного оператора.

5. Преобразование $\mathcal{A}$ является линейным, так как для любых $p(t),q(t)\in M_n$ и $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(p(t)+q(t))=p(2t+1)+q(2t+1)=\mathcal{A}p(t)+\mathcal{A}q(t),$$
$$\mathcal{A}(\alpha p(t))=\alpha p(2t+1)=\alpha\mathcal{A}p(t).$$

6. Убедимся сначала, что преобразование $\mathcal{A}$ переводит любой многочлен $p(t)$ степени не выше n в многочлен степени не выше $n-1$. Действительно, при $t=0$ многочлен $p(1+t)-p(1-t)$ обращается в нуль, и следовательно, в силу теоремы Безу его можно записать в виде $p(1+t)-p(1-t)=tp_1(t)$,

где $p_1(t)$ – многочлен на единицу меньшей степени, чем многочлен $p(1+t)-p(1-t)$. Поэтому $\mathcal{A}p(t)=p_1(t)\in M_{n-1}$.

Линейность вытекает из того, что для любых $p(t),q(t)\in M_n$ и $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(p(t)+q(t))=\frac{p(1+t)+q(1+t)-p(1-t)-q(1-t)}{2t}=\mathcal{A}p(t)+\mathcal{A}q(t),$$
$$\mathcal{A}(\alpha p(t))=\frac{\alpha p(1+t)-\alpha p(1-t)}{2t}=\alpha\mathcal{A}p(t).\ ■$$

Пример 52.7. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства M_2 в пространство M_1 по правилу $\mathcal{A}p(t)=\dfrac{p(1+t)-p(1-t)}{2t}$, в паре естественных базисов пространств M_2 и M_1 (см. пример 52.6(6)).

Решение. Итак, в пространстве M_2 выбран базис $e_1=1$, $e_2=t$, $e_3=t^2$, а в пространстве M_1 – базис $f_1=1$, $f_2=t$. Тогда имеем:

$$\mathcal{A}e_1=\frac{1-1}{2t}=0=0f_1+0f_2,$$
$$\mathcal{A}e_2=\frac{(1+t)-(1-t)}{2t}=1=1f_1+0f_2,$$
$$\mathcal{A}e_3=\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{2t}=2=2f_1+0f_2,$$

Отсюда следует, что

$$A_{fe}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}.\ ■$$

Пример 52.8. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ в пространство $\mathbb{R}$ по правилу $\mathcal{A}X=\operatorname{tr}X$, в паре базисов

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad(52.2)$$

пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $f_1=1$ пространства $\mathbb{R}$.

Решение. Так как

$$\mathcal{A}E_1=1=1f_1,\ \mathcal{A}E_2=0=0f_1,\ \mathcal{A}E_3=0=0f_1,\ \mathcal{A}E_4=1=1f_1$$

то матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_{fe}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\end{bmatrix}.\ ■$$

Пример 52.9. Построить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ умножения квадратных матриц второго порядка слева на заданную матрицу $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ в естественном базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Решение. Так как

$$\mathcal{A}E_1=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=aE_1+cE_3,$$
$$\mathcal{A}E_2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=aE_2+cE_4,$$
$$\mathcal{A}E_3=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=bE_1+dE_3,$$

$$\mathcal{A}E_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = bE_2 + dE_4,$$

то матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Пример 52.10. *Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном линейном пространстве V, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис пространства V, а F и G – матрицы, столбцы которых являются координатными столбцами векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ соответственно в базисе e. Доказать, что матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе e можно найти из соотношения*

$$A_e = GF^{-1}.$$

Решение. В силу теоремы 52.3 выполнены равенства

$$(g_i)_e = A_e(f_i)_e, \quad i = \overline{1, n},$$

которые можно объединить в одно матричное соотношение

$$G = A_e F.$$

Так как векторы $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы, то и столбцы матрицы F линейно независимы, и следовательно, матрица F невырождена и $A_e = GF^{-1}$. $\blacksquare$

Пример 52.11. Построить матрицу оператора проектирования $\mathcal{P}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$ на подпространство L_1 симметрических матриц параллельно подпространству L_2 кососимметрических матриц в базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$.

Решение. Воспользуемся тождеством

$$X = \tfrac{1}{2}(X + X^T) + \tfrac{1}{2}(X - X^T),$$

которое, по существу, является разложением произвольной матрицы $X \in \mathbb{R}^{2\times2}$ по подпространствам L_1 и L_2, так что $X_1 = \frac{1}{2}(X + X^T)$ и $X_2 = \frac{1}{2}(X - X^T)$. Отсюда следует, что рассматриваемый здесь оператор проектирования действует по правилу

$$\mathcal{P}X = \tfrac{1}{2}(X + X^T).$$

Так как

$$\mathcal{P}E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1E_1, \quad \mathcal{P}E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = (E_2 + E_3)/2,$$

$$\mathcal{P}E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = (E_2 + E_3)/2, \quad \mathcal{P}E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1E_4,$$

то

$$P_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Пример 52.12. Построить матрицу оператора отражения $\mathcal{R}$ пространства многочленов M_3 относительно подпространства $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ параллельно подпространству $L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(1) = f'(1) = 0\}$ в естественном базисе пространства M_3.

Решение. Выберем базисы: $f_1 = t^2$, $f_2 = t^3$ в L_1 и $f_3 = (1-t)^2$, $f_4 = t(1-t)^2$ в L_2. Нетрудно проверить, что $L_1 \oplus L_2 = M_3$.

Способ 1. Разложим произвольный многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ по базису f_1, f_2, f_3, f_4. Решая соответствующую неоднородную систему линейных уравнений, получим

$$p(t) = (a_2 + 2a_1 + 3a_0)t^2 + (a_3 - a_1 - 2a_0)t^3 + a_0(1-t)^2 + (a_1 + 2a_0)t(1-t)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{R}p(t) = (a_2 + 2a_1 + 3a_0)t^2 + (a_3 - a_1 - 2a_0)t^3 - a_0(1-t)^2 - (a_1 + 2a_0)t(1-t)^2.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{R}$ действует на векторы естественного базиса $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$ пространства M_3 следующим образом:

$$\mathcal{R}e_1 = -1 + 6t^2 - 4t^3 = -e_1 + 6e_3 - 4e_4, \quad \mathcal{R}e_2 = -t + 4t^2 - 2t^3 = -e_2 + 4e_3 - 2e_4,$$

$$\mathcal{R}e_3 = t^2 = e_3, \qquad \mathcal{R}e_4 = t^3 = e_4.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathcal{R}$ в базисе e имеет вид

$$R_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Способ 2. Воспользуемся результатом примера 52.10.

Согласно определению оператора отражения $\mathcal{R}$ его действие на векторы базиса f_1, f_2, f_3, f_4 описывается соотношениями

$$\mathcal{R}f_1 = f_1, \quad \mathcal{R}f_2 = f_2, \quad \mathcal{R}f_3 = -f_3, \quad \mathcal{R}f_4 = -f_4.$$

В силу соотношения примера 52.10 $R_e = GF^{-1}$, где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу R_e методом Гаусса–Жордана (§9):

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\text{элементарные} \\ \text{преобразования} \\ \text{столбцов}}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Следовательно,

$$R_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

52.1. Доказать, что всякий линейный оператор, действующий в одномерном пространстве, сводится к умножению всех векторов пространства на фиксированное (для данного оператора) число (такие операторы называют *скалярными*).

52.2. Описать все линейные операторы пространства $\mathbb{R}_+$, введенного в задаче 44.9.

52.3. Выяснить, какие из следующих отображений линейного пространства V над полем P являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}x = a$ (a – фиксированный вектор);
б) $\mathcal{A}x = x + a$ (a – фиксированный вектор);
в) $\mathcal{A}x = \alpha x$ (α – фиксированное число из поля P).

52.4. Выяснить, какие из следующих отображений геометрического пространства V_3 являются линейными операторами (здесь $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – некоторые заданные векторы):

а) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$; б) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{b}$;
в) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$; г) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$;
д) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, [\mathbf{x}, \mathbf{b}]]$.

52.5. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ – фиксированные ненулевые векторы геометрического пространства V_2 или V_3. Показать, что следующие преобразования являются линейными, и выяснить их геометрический смысл:

а) $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$;

б) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$, если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$;

в) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;

г) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$, если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$;

д) $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;

е) $\mathcal{A}\mathbf{x} = 2(\mathbf{x}, \mathbf{a})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$;

ж) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{a}$ – заданный единичный вектор.

52.6. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^n$. Выяснить, какие из следующих преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2)$ $(n = 3)$;
б) $\mathcal{A}x = (x_3, x_1, x_2 - 1)$ $(n = 3)$;
в) $\mathcal{A}x = (x_2, x_1 - x_2)$ $(n = 2)$;

г) $\mathcal{A}x = (x_1, x_2, x_3^2)$ $(n = 3)$;
д) $\mathcal{A}x = (x_1 + 3x_2 - 2x_3, 3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3)$ $(n = 3)$;
е) $\mathcal{A}x = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)$ $(n = 3)$;
ж) $\mathcal{A}x = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$;
з) $\mathcal{A}x = (x_1, 2|x_2|, -3x_3)$ $(n = 3)$.

52.7. Выяснить, какие из следующих преобразований пространства многочленов M_n являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}f(t) = f(-t)$; б) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1)$;
в) $\mathcal{A}f(t) = f(at + b)$, где $a \neq 0$, b – фиксированные числа;
г) $\mathcal{A}f(t) = f^{(k)}(t)$, где $k \in \mathbb{N}$ фиксировано;
д) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - f(t)$;
е) $\mathcal{A}f(t) = f(t+1) - g(t)$, где $g(t)$ – фиксированный ненулевой многочлен;
ж) $\mathcal{A}f(t) = tf(t)$; з) $\mathcal{A}f(t) = tf'(t)$;

и) $\mathcal{A}f(t) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(t-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$,

где $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}$ фиксированы;

к) $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{f(-t) - f(0) + f(t)}{t^2}$; л) $\mathcal{A}f(t) = f(t^2)$;

м) $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\xi)\,d\xi$.

52.8. Показать, что дифференцирование определяет линейное отображение:

а) пространства многочленов M_n в пространство многочленов M_{n-1};
б) пространства четных многочленов степени не выше $2n$ в пространство нечетных многочленов степени не выше $2n - 1$;
в) пространства нечетных многочленов степени не выше $2n+1$ в пространство четных многочленов степени не выше $2n$.

52.9. Показать, что отображение $f(t) \mapsto f(t^2)$ определяет линейное отображение пространства M_n в пространство многочленов M_{2n}.

52.10. Показать, что отображение $f(t) \mapsto \displaystyle\int_a^t f(\xi)\,d\xi$ при любом $a \in \mathbb{R}$ определяет линейное отображение пространства многочленов M_n в пространство M_{n+1}.

52.11. Выяснить, какие из следующих отображений пространства матриц $\mathbb{R}^{n\times m}$ являются линейными операторами:

а) $\mathcal{A}X = X^T$;

б) $\mathcal{A}X = BX$, где B – заданная квадратная матрица n-го порядка;

в) $\mathcal{A}X = BXC$, где B, C – заданные квадратные матрицы n-го и m-го порядков соответственно;

г) $\mathcal{A}X = AX + XB$, где B, C – заданные квадратные матрицы n-го и m-го порядков соответственно;

д) $\mathcal{A}X = X_1$, где X_1 получена из матрицы X перестановкой первого и последнего столбцов.

52.12. Выяснить, какие из следующих отображений являются линейными операторами, действующими из пространства квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ в подходящее линейное пространство V (в каждом случае указать это пространство V):

а) $\mathcal{A}X = \frac{1}{2}(X + X^T)$; б) $\mathcal{A}X = \frac{1}{2}(X - X^T)$;

в) $\mathcal{A}X = \operatorname{tr} X$;

г) $\mathcal{A}X = \operatorname{tr}(BX)$, где B – заданная квадратная матрица n-го порядка;

д) $\mathcal{A}X = \det X$;

е) $\mathcal{A}X = \det(BX)$, где B – заданная квадратная матрица n-го порядка;

ж) $\mathcal{A}X = \operatorname{rg} X$;

з) $\mathcal{A}X = XC$, где C – заданная матрица размера $n \times m$;

и) $\mathcal{A}X = [X, B]$ – коммутатор матрицы X и заданной квадратной матрицы B порядка n;

к) $\mathcal{A}X = X \otimes B$ – кронекерово произведение матрицы X и заданной матрицы B размера $m \times k$.

52.13. Доказать линейность отображения $\mathcal{A}$ и выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным или биективным, если:

а) $\mathcal{A}$ – нулевое отображение;

б) $\mathcal{A}$ – тождественное отображение;

в) $\mathcal{A}$ сводится к умножению вектора на фиксированное число из поля.

52.14. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – линейно независимые векторы линейного пространства V, а $g_1, \ldots, g_k$ – некоторые векторы пространства W. Доказать, что существует линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ такой, что $\mathcal{A}f_i = g_i$ для всех $i = \overline{1, k}$. В каком случае оператор $\mathcal{A}$ единствен?

52.15. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – векторы линейного пространства V, а $g_1, \ldots, g_k$ – векторы пространства W. Найти необходимые

и достаточные условия, при которых:

а) существует линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ такой, что $\mathcal{A}f_i = g_i$ для всех $i = \overline{1, k}$;

б) такой линейный оператор $\mathcal{A}$ единствен.

52.16. Пусть L – линейное подпространство пространства V, $\mathcal{A}$ – произвольный линейный оператор, действующий из L в некоторое линейное пространство W.

1. Доказать, что найдется оператор из $\mathcal{L}(V, W)$, действие которого на подпространстве L совпадает с оператором $\mathcal{A}$.

2. Показать, что если поле P бесконечно, то таких линейных операторов существует бесконечно много.

52.17. В пространстве многочленов M_n построить два различных оператора, совпадающих на подпространстве M_{n-1} с оператором дифференцирования.

52.18. Пусть пространство V есть прямая сумма подпространств $L_1, \ldots, L_p$. Показать, что действие линейного оператора $\mathcal{A}$ на любой вектор пространства определяется единственным образом, если известно действие этого оператора на каждом из подпространств $L_1, \ldots, L_p$.

52.19. Выяснить, какие из следующих отображений пространства V_3 являются линейными формами:

а) $f(\mathbf{x}) = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ задано;

б) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор;

в) $f(\mathbf{x}) = \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{a}})$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор;

г) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$;

д) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – заданные векторы;

е) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, [\mathbf{a}, \mathbf{x}])$, где $\mathbf{a}$ – заданный вектор.

52.20. В пространстве V фиксирован базис $e_1, \ldots, e_n$. Доказать, что отображение, ставящее в соответствие каждому вектору x пространства V его i-ю координату в этом базисе, является линейной формой.

52.21. Пусть $a \in \mathbb{R}$ – некоторое фиксированное число. Показать, что отображение $f(t) \mapsto f(a)$ задает в пространстве многочленов M_n линейную форму. Верно ли обратное: всякую линейную форму в пространстве M_n можно задать таким образом при подходящем выборе числа a?

52.22. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ – некоторые фиксированные числа. Показать, что отображение $f(t) \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ задает в пространстве многочленов M_n линейную форму. Верно ли обратное: всякую линейную форму в пространстве M_n можно задать таким образом при подходящем выборе чисел a и b?

52.23. Может ли линейная форма на комплексном линейном пространстве принимать только действительные значения?

Оператор $\mathcal{A}$ задан своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$. Построить матрицу этого оператора: а) в естественном базисе e_1, e_2, e_3; б) в базисе $e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3$.

52.24. $\mathcal{A}x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

52.25. $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

52.26. $\mathcal{A}x = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$.

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^3$, переводит векторы f_1, f_2, f_3 соответственно в векторы g_1, g_2, g_3. Построить матрицу этого оператора: а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$, б) в базисе f_1, f_2, f_3.

52.27. $f_1 = (2,3,5)$, $f_2 = (0,1,2)$, $f_3 = (1,0,0)$,
$g_1 = (1,1,1)$, $g_2 = (1,1,-1)$, $g_3 = (2,1,2)$.

52.28. $f_1 = (2,0,3)$, $f_2 = (4,1,5)$, $f_3 = (3,1,2)$,
$g_1 = (1,2,-1)$, $g_2 = (4,5,-2)$, $g_3 = (1,-1,1)$.

52.29. $f_1 = (5,3,1)$, $f_2 = (1,-3,-2)$, $f_3 = (1,2,1)$,
$g_1 = (-2,1,0)$, $g_2 = (-1,3,0)$, $g_3 = (-2,-3,0)$.

Оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^n$ соответственно в векторы $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{R}^m$. Построить матрицу этого оператора в паре естественных базисов пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

52.30. $n = 2$, $m = 3$,
$f_1 = (2,-1)$, $f_2 = (1,-1)$,
$g_1 = (-4,2,-1)$, $g_2 = (-1,1,-1)$.

52.31. $n = 3$, $m = 2$,
$f_1 = (0,1,1)$, $f_2 = (1,1,1)$, $f_3 = (1,0,1)$,
$g_1 = (3,-1)$, $g_2 = (2,0)$, $g_3 = (0,1)$.

52.32. $n = 2$, $m = 5$,
$f_1 = (2,1)$, $f_2 = (1,1)$,
$g_1 = (-2,-2,2,3,0)$, $g_2 = (5,-1,-2,0,3)$.

52.33. $n = 4$, $m = 2$,
$f_1 = (4,3,-1,7)$, $f_2 = (5,2,3,7)$, $f_3 = (9,7,2,6)$,

$f_4 = (-3,2,2,1)$,
$g_1 = (0,8)$, $g_2 = (35,33)$, $g_3 = (19,19)$, $g_4 = (-2,0)$.

52.34. $n = 3$, $m = 4$,
$f_1 = (1,1,2)$, $f_2 = (1,2,3)$, $f_3 = (1,2,4)$,
$g_1 = (-4,2,14,-6)$, $g_2 = (-2,1,7,-3)$, $g_3 = (-6,3,21,-9)$.

52.35. $n = 4$, $m = 3$,
$f_1 = (1,1,1,1)$, $f_2 = (1,1,-1,-1)$, $f_3 = (1,-1,1,-1)$,
$f_4 = (-1,1,1,-1)$,
$g_1 = (0,8,0)$, $g_2 = (-2,8,4)$, $g_3 = (2,24,-4)$, $g_4 = (4,8,-8)$.

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в комплексном арифметическом пространстве $\mathbb{C}^2$, переводит векторы f_1, f_2 соответственно в векторы g_1, g_2. Построить матрицу этого оператора в естественном базисе пространства $\mathbb{C}^2$.

52.36. $f_1 = (i,1)$, $f_2 = (1,i)$, $g_1 = (i-1,i+1)$, $g_2 = (i+1,i-1)$.

52.37. $f_1 = (1,-i)$, $f_2 = (-i,1)$, $g_1 = (0,0)$, $g_2 = (2,2i)$.

52.38. $f_1 = (1,i)$, $f_2 = (0,1)$, $g_1 = (i,-1)$, $g_2 = (1,2i)$.

Оператор $\mathcal{A}$ действует в пространстве многочленов M_n. Построить матрицу этого оператора в естественном базисе этого пространства.

52.39. $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ – оператор дифференцирования.

52.40. $\mathcal{A} = \mathcal{D}^2$ – оператор двукратного дифференцирования.

52.41. $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ – разностный оператор (h – фиксированное положительное число).

52.42. $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\xi)\,d\xi$.

52.43. $\mathcal{A}f(t) = \dfrac{f(a+t) - f(a-t)}{2t}$, где a – произвольное фиксированное число.

52.44. Рассматривая оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ как оператор, действующий из M_n в M_{n-1}, построить его матрицу в паре базисов $1, t, t^2, \ldots, t^n$ и $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$. В этой же паре базисов найти матрицу оператора интегрирования

$$\mathcal{A}f(t) = \int_0^t f(\xi)\,d\xi$$

как оператора из M_{n-1} в M_n.

52.45. Пространство V является прямой суммой подпространств L_1 и L_2. Базис $e_1, \ldots, e_n$ выбран таким образом, что векторы $e_1, \dots, e_k$ образуют базис подпространств L_1, а векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ – базис подпространства L_2. В базисе $e_1, \dots, e_n$ составить:

а) матрицу оператора проектирования на L_1 параллельно L_2;

б) матрицу оператора проектирования на L_2 параллельно L_1;

в) матрицу оператора отражения относительно L_1 параллельно L_2.

52.46. Пусть в пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Для линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего по правилу:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}],$$

где $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ – фиксированный ненулевой вектор, найти матрицу в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

52.47. Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ – некоторые единичные векторы геометрического пространства V_3, координаты которых заданы в прямоугольной декартовой системе координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, если $\mathcal{A}$ осуществляет:

а) ортогональное проектирование на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;

б) ортогональное проектирование на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;

в) проектирование на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

г) проектирование на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ параллельно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

д) ортогональное отражение относительно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;

е) ортогональное отражение относительно прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;

ж) отражение относительно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

з) отражение относительно прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ параллельно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$.

52.48. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{P}$ ортогонального проектирования на подпространство L, если L является:

а) прямой $x = z = 0$;

б) прямой $x = y = z$;

в) плоскостью $x + y + z = 0$;

г) плоскостью, натянутой на векторы $\mathbf{a} = \{-1, 1, -1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, -3, 2\}$.

52.49. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{P}$ проектирования на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, если:

а) L_1 определено уравнением $x = 0$, а L_2 – уравнениями $2x = 2y = -z$;

б) L_1 имеет уравнение $x = y$, а L_2 определяется системой уравнений $x + y + z = 0$, $2x + y + 4z = 0$;

в) L_1 определено уравнениями $-20x = 15y = 12z$, а L_2 – уравнением $2x + 3y - z = 0$;

г) L_1 определено системой уравнений $x - y + z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$, а L_2 – уравнением $2x + 3y - 4z = 0$.

52.50. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{R}$ ортогонального отражения относительно:

а) плоскости $x = 0$;

б) прямой $x = 2y = z$;

в) плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{a} = \{1, 0, -1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, 1, -2\}$.

52.51. Пусть в геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ найти матрицу оператора $\mathcal{R}$ отражения:

а) относительно плоскости $x = 0$ параллельно прямой $2x = y = -z$;

б) относительно прямой $x = z$, $x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x + y = 0$.

52.52. В геометрическом пространстве V_3 задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Построить в этом базисе матрицу оператора поворота пространства:

а) на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;

б) на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;

в) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой $x = y = z$.

52.53. В естественном базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка найти матрицу:

а) оператора умножения слева на заданную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ второго порядка;

б) оператора умножения справа на заданную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ второго порядка.

52.54. В естественном базисе (52.2) пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка найти матрицу:

а) оператора транспонирования,

б) оператора $\mathcal{G}$, который каждой матрице X ставит в соответствие матрицу AXB, где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – заданные квадратные матрицы второго порядка,

в) оператора $\mathcal{F}$, определенного соотношением

$$\mathcal{F}X = AX + XB,$$

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – заданные квадратные матрицы второго порядка.

52.55. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ фиксирован естественный базис из матричных единиц $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{in}$, $i = \overline{1, m}$. Пусть далее A и B – заданные квадратные матрицы соответственно порядков m и n. Рассмотрим операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$, определенные соотношениями

$$\mathcal{G}X = AXB,$$
$$\mathcal{F}X = AX + XB.$$

Доказать, что в указанном базисе матрица:

а) оператора $\mathcal{G}$ есть кронекерово произведение $A \otimes B^T$;

б) оператора $\mathcal{F}$ есть $A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$.

Найти матрицы тех же операторов в естественном базисе, занумерованном другим образом: $E_{1j}, E_{2j}, \ldots, E_{mj}$, $j = \overline{1, n}$.

52.56. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^2$ в пространство матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x, y) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественных базисах пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

52.57. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в пространство матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественных базисах пространств $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

52.58. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ в вещественное пространство комплексных матриц $\mathbb{C}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{bmatrix}.$$

Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ и базисе $E_{11}, iE_{11}, E_{21}, iE_{21}, E_{12}, iE_{12}, E_{22}, iE_{22}$ пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

52.59. Отображение $\mathcal{A}$ арифметического пространства $\mathbb{R}^4$ в вещественное пространство комплексных матриц $\mathbb{C}^{2\times 2}$ задано соотношением

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

где $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Показать линейность и инъективность этого отображения и построить его матрицу в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ и базисе пространства $\mathbb{C}^{2\times 2}$, указанном в предыдущей задаче.

§53. Матрицы линейного оператора в различных базисах. Эквивалентные и подобные матрицы

Матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ называются *подобными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что

$$A = Q^{-1}BQ.$$

Теорема 53.1. *Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ в парах базисов e, f и $t = eC$, $s = fD$ связаны соотношением*

$$A_{st} = D^{-1}A_{fe}C.$$

Следствие 1. Матрицы линейного оператора в различных парах базисов эквивалентны (§16).

Следствие 2. Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов.

Теорема 53.2. *Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пространства над полем P размерностей n и m соответственно.*

Если $W = V$, то при переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ изменяется по закону:

$$A_f = Q^{-1}A_eQ. \tag{53.1}$$

Таким образом, *одному и тому же линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ соответствует целый класс матриц, подобных друг другу.*

Очевидно, что две матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве над полем P (теорема 53.2).

Из соотношения (53.1) следует, что все матрицы одного и того же линейного оператора имеют одинаковый определитель. *Определителем линейного оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется определитель матрицы этого оператора в произвольном базисе. Обозначение: $\det \mathcal{A}$. Итак,

$$\det \mathcal{A} = \det A_e\,.$$

Пример 53.1. Пусть оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис пространства V, а F и G – матрицы, столбцы которых являются координатными столбцами соответственно векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ в базисе e. Доказать, что матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f можно найти из соотношения

$$A_f = F^{-1}G.$$

Решение. Как показано выше в примере 52.10, выполнено соотношение $A_e = GF^{-1}$.

Так как матрица перехода от базиса e к базису f совпадает с матрицей F, то в силу соотношения (53.1)

$$A_f = F^{-1}(GF^{-1})F = F^{-1}G. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

53.1. Как изменится матрица линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, если в этом базисе:

а) поменять местами два вектора e_i и e_j;

б) умножить вектор e_i на число $\alpha \neq 0$?

53.2. Доказать, что матрицы одного и того же линейного оператора в двух базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрицы перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей линейного оператора в одном из этих базисов.

53.3. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет верхнюю треугольную матрицу. В каком базисе его матрица будет нижней треугольной?

53.4. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) e_1, e_3, e_2, e_4;

б) $e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

53.5. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A_e = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

53.6. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе

$$f_1 = (8, -6, 7),\ f_2 = (-16, 7, -13),\ f_3 = (9, -3, 7)$$

имеет матрицу

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$g_1 = (1, -2, 1),\ g_2 = (3, -1, 2),\ g_3 = (2, 1, 2).$$

53.7. Дан вектор $\mathbf{a} = \{1, 2, 3\}$. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$ геометрического пространства V_3:

а) в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, в котором даны координаты всех векторов;

б) в базисе $\mathbf{b}_1 = \{1, 0, 1\},\ \mathbf{b}_2 = \{2, 0, -1\},\ \mathbf{b}_3 = \{1, 1, 0\}$.

53.8. В геометрическом пространстве V_2 задана аффинная система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ найти матрицу оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ осуществляет:

а) отражение плоскости относительно прямой $x + 2y = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$;

б) проектирование плоскости на прямую $x + y = 0$ паралельно прямой $4x + 5y = 0$;

в) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к прямой $3x - 2y = 0$ параллельно прямой $x - y = 0$.

53.9. В геометрическом пространстве V_3 задана прямоугольная декартова система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ осуществляет:

а) проектирование на плоскость $3x - y = 0$ параллельно прямой $x + z = 0,\ x + y + 2z = 0$;

б) отражение пространства относительно прямой $x = y = -2z$ параллельно плоскости $x + y + 3z = 0$;

в) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к плоскости $x - 2z = 0$ параллельно прямой $x = y = z$;

г) поворот вокруг прямой $x = y = -z$ на угол $\pi/2$;

д) поворот вокруг прямой $x + y = 0$, $y - z = 0$ на такой угол, что первая из данных плоскостей переходит во вторую.

53.10. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном линейном пространстве V, переводит линейно независимые векторы $f_1, \ldots, f_n$ в векторы $g_1, \ldots, g_n$ соответственно. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис пространства V, а F и G – матрицы, столбцы которых являются координатными столбцами соответственно векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ в базисе e. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$:

а) в базисе e;

б) в базисе f из столбцов матрицы F;

в) в базисе g из столбцов матрицы G (при условии, что G невырождена).

53.11. Пусть A – невырожденная матрица порядка n, B – матрица размера $m \times n$. Доказать, что найдется единственное линейное отображение $\mathcal{A}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, при котором образами столбцов матрицы A являются соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$:

а) в естественных базисах пространств;

б) в базисе пространства $\mathbb{R}^n$ из столбцов матрицы A и естественном базисе пространства $\mathbb{R}^m$;

в) в базисе пространства $\mathbb{R}^n$ из столбцов матрицы A и базисе пространства $\mathbb{R}^m$ из столбцов матрицы B (при условии, что $m = n$ и B невырождена).

53.12. Координаты векторов f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2, g_3 трехмерного линейного пространства V заданы в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит векторы f_i в g_i ($i = 1, 2, 3$). Построить матрицу оператора $\mathcal{A}$: а) в базисе e_1, e_2, e_3; б) в базисе f_1, f_2, f_3, если:

1) $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, -3)$, $f_3 = (0, 1, 3)$,
$g_1 = (1, 1, 1)$, $g_2 = (2, 0, -6)$, $g_3 = (0, 2, 6)$;

2) $f_1 = (1, 1, -1)$, $f_2 = (2, 1, 0)$, $f_3 = (3, 0, 2)$,
$g_1 = (0, 0, 0)$, $g_2 = (2, 1, 0)$, $g_3 = (3, 0, 2)$;

3) $f_1 = (0, 2, 1)$, $f_2 = (-1, 1, -1)$, $f_3 = (1, -2, 0)$,
$g_1 = (0, 0, 0)$, $g_2 = (-2, 2, -2)$, $g_3 = (1, -3, -1)$;

4) $f_1 = (2, 0, -1)$, $f_2 = (-1, 2, -1)$, $f_3 = (0, -1, 1)$,
$g_1 = (-6, 0, 3)$, $g_2 = (5, -6, 2)$, $g_3 = (0, -2, 2)$.

53.13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе e матрицу A_e,

а координатные столбцы векторов нового базиса f образуют матрицу S. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f, если:

1) $A_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A_e = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $A_e = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$;

4) $A_e = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;

5) $A_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

6) $A_e = \begin{bmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

7) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

8) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$;

9) $A_e = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

10) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

53.14. Линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе e комплексного линейного пространства матрицу A_e, а координатные столбцы векторов нового базиса f образуют матрицу S. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе f, если:

1) $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$;

$$2)\ A_e = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \end{bmatrix};$$

$$3)\ A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$4)\ A_e = \begin{bmatrix} -5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -i & -1 & i \\ -i & 3i-3 & i & -3-3i \end{bmatrix}.$$

53.15. Линейный оператор, действующий из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, задан матрицей A_{fe} в паре естественных базисов этих пространств. Координатные столбцы новых базисных векторов g и h составляют соответственно матрицы S и T. Вычислить матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов g и h, если:

1) $n = 3$, $m = 2$,

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix};$$

2) $n = 4$, $m = 2$,

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$

3) $n = 2$, $m = 3$,

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

4) $n = 3$, $m = 4$,

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 13 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

53.16. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования в пространстве M_n. Вычислить матрицу оператора $\mathcal{D}$ в следующих базисах

этого пространства:

1) $1+t,\ t+2t^2,\ 3t^2-1$ $(n=2)$;
2) $t^3+1,\ 1-t,\ 1-t+t^2,\ 1-t+t^2-t^3$ $(n=3)$;
3) $1,\ t,\ t^2, \ldots, t^n$ $(n \geq 1)$;
4) $1,\ t,\ \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$ $(n \geq 1)$;
5) $1,\ 1+t,\ 1+t+\frac{t^2}{2!}, \ldots, 1+t+\ldots+\frac{t^n}{n!}$ $(n \geq 1)$;
6) $1,\ 1+t,\ 1+t+t^2, \ldots, 1+t+\ldots+t^n$ $(n \geq 1)$;
7) $1,\ t-t_0,\ (t-t_0)^2, \ldots, (t-t_0)^n$ $(n \geq 1,\ t_0 \in \mathbb{R})$;
8) $1,\ t-1,\ t^2-t, \ldots, t^n-t^{n-1}$ $(n \geq 1)$.

53.17. В базисе $1, t, t^2$ пространства M_2 оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, составленном из многочленов $3t^2+2t$, $5t^2+3t+1$, $7t^2+5t+3$.

53.18. Пусть $\mathcal{A}$ – оператор транспонирования в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Построить матрицу этого оператора в базисе:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

53.19. Пусть $\mathcal{C}$ – оператор в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ставящий в соответствие каждой матрице X значение ее коммутатора $[X, A]$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

53.20. Доказать, что отношение подобия на множестве всех невырожденных матриц одного порядка является отношением эквивалентности.

53.21. Пусть матрицы A и B подобны: $B = S^{-1}AS$. Однозначно ли при этом определена матрица преобразования S?

53.22. Показать, что скалярная матрица подобна только самой себе. Доказать, что этим свойством обладают только скалярные матрицы.

53.23. Пусть A – фиксированная квадратная матрица. Доказать, что множество матриц S, для которых $A = S^{-1}AS$ является группой по умножению?

53.24. Пусть A и B – подобные матрицы. Доказать, что если матрица S_0 такова, что $B = S_0^{-1}AS_0$, то все множество матриц S, осуществляющих преобразование подобия: $B = S^{-1}AS$, получается из множества матриц $\{P \mid A = P^{-1}AP\}$ путем умножения этих матриц справа на матрицу S_0.

53.25. Показать, что матрица A переходит в подобную, если над ней выполняется любое из следующих преобразований:

а) i-я строка умножается на число $\alpha \neq 0$, а затем i-й столбец умножается на число $1/\alpha$;

б) к i-й строке прибавляется j-я, умноженная на число β, а затем из j-го столбца вычитается i-й, умноженный на β;

в) переставляются i-я и j-я строки, а затем i-й и j-й столбцы;

г) каждый элемент матрицы заменяется на симметричный ему относительно "центра" матрицы.

53.26. Доказать, что если хотя бы одна из двух матриц A или B невырождена, то матрицы AB и BA подобны. Верно ли это утверждение, если обе матрицы вырождены?

53.27. Доказать, что преобразование подобия сохраняет следующие свойства матриц:

а) невырожденность;

б) нильпотентность;

в) периодичность;

г) ортогональность.

53.28. Пусть A – симметрическая матрица, а матрица B подобна матрице A. Доказать, что для того, чтобы B была симметрической матрицей достаточно, чтобы матрица преобразования была ортогональна. Является ли это условие необходимым?

53.29. Матрица B получена из матрицы A преобразованием подобия. Выяснить, верны ли следующие утверждения:

а) если A – треугольная матрица, то B – также треугольная;

б) если A – стохастическая матрица, то B – также стохастическая.

53.30. Пусть матрицы A и B подобны и $B = S^{-1}AS$. Доказать, что:

а) $\det B = \det A$;

б) $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$;

в) $B = I$ тогда и только тогда, когда $A = I$;

г) $B = A$ тогда и только тогда, когда A и S перестановочны;

д) $B^k = S^{-1}A^kS$ для любого $k \in \mathbb{N}$;

е) $f(B) = S^{-1}f(A)S$ для любого многочлена $f(t)$;

ж) $B^{-1} = SA^{-1}S^{-1}$.

53.31. Если квадратные матрицы A и B n-го порядка эквивалентны, то означает ли это, что эквивалентны и матрицы A^2 и B^2?

53.32. Матрицы A и B порядков n и m подобны соответственно матрицам C и D. Доказать, что:

а) произведения $A \otimes B$ и $C \otimes D$ подобны;

б) матрицы $A \otimes I_n \otimes + I_m \otimes B^T$ и $C \otimes I_n \otimes + I_m \otimes D^T$ подобны.

53.33. Показать, что если комплексные матрицы $A_1 = B_1 + iC_1$ и $A_2 = B_2 + iC_2$ подобны, то подобны и действительные матрицы

$$D_1 = \begin{bmatrix} B_1 & -C_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} B_2 & -C_2 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}.$$

§54. Образ и ядро линейного оператора

Образом линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется множество

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists x \in V : \mathcal{A}x = y\},$$

ядром оператора $\mathcal{A}$ – множество

$$\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}.$$

Пример 54.1. В пространстве многочленов M_n для оператора дифференцирования (§52): $\operatorname{im} \mathcal{D} = M_{n-1}$, $\ker \mathcal{D} = M_0$.

Пример 54.2. Для оператора проектирования (§52): $\operatorname{im} \mathcal{P} = L_1$, $\ker \mathcal{P} = L_2$.

Пример 54.3. Для оператора отражения (§52): $\operatorname{im} \mathcal{R} = V$, $\ker \mathcal{R} = \{\theta\}$.

Теорема 54.1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, то $\ker \mathcal{A}$ – линейное подпространство пространства V, $\operatorname{im} \mathcal{A}$ – линейное подпространство пространства W.*

Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а *дефектом* – размерность ядра. Обозначения: $\operatorname{rg} \mathcal{A}$, $\operatorname{def} \mathcal{A}$. Итак, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{im} \mathcal{A}$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}$.

Теорема 54.2. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V, то*
$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n).$$

Теорема 54.3. *Ранг линейного оператора равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Теорема 54.4 (о ранге и дефекте). *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, то*
$$\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V.$$

Пример 54.4. Пусть $\mathcal{C}$ – оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ ставит в соответствие каждой матрице X значение ее коммутатора $[X, A]$ с заданной матрицей $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Найти образ оператора $\mathcal{C}$.

Решение. Выберем в пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}$ естественный базис из матриц (52.2). Тогда

$$\mathcal{C}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения базиса линейной оболочки, натянутой на найденные образы базисных матриц, воспользуемся изоморфизмом пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$ пространству $\mathbb{R}^4$ и исследуем линейную оболочку, натянутую на арифметические векторы

$$(0, b, -c, 0),\ (c, d-a, 0, -c),\ (-b, 0, a-d, b),\ (0, -b, c, 0).$$

Составим матрицу из координат этих векторов:

$$\begin{bmatrix} 0 & b & -c & 0 \\ c & d-a & 0 & -c \\ -b & 0 & a-d & b \\ 0 & -b & c & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c & d-a & 0 & -c \\ -b & 0 & a-d & b \\ 0 & b & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $a = d$, $b = c = 0$, то ранг этой матрицы равен нулю, и следовательно, образ оператора $\mathcal{C}$ – нулевое подпространство.

В противном случае первые три строки последней матрицы линейно зависимы, так как их линейная комбинация с коэффициентами b, c, $a-d$ равна нулевой строке. Поэтому ранг последней матрицы не превосходит 2.

Если $b \neq 0$, то $\operatorname{rg} \mathcal{C} = 2$ и базис образа образуют матрицы

$$\begin{bmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $c \neq 0$, то $\operatorname{rg} \mathcal{C} = 2$ и базис образа образуют матрицы

$$\begin{bmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Если $b = c = 0$ и $a \neq d$, то $\operatorname{rg} \mathcal{C} = 2$ и базис образа образуют матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Теорема 54.5 (о канонической паре базисов). *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существуют базисы в пространствах V и W, в которых оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $I_r \in P^{m\times n}$*

вида

$$I_r = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & O \\ 0 & & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right] \Big\}\, r,$$

в которой все элементы равны нулю, кроме первых r диагональных элементов, равных 1.

ЗАДАЧИ

54.1. Что можно сказать о матрице оператора $\mathcal{A}$ ранга r, если в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ принадлежат ядру этого оператора?

54.2. Что можно сказать о матрице оператора $\mathcal{A}$ ранга r, если в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V векторы $e_1, \ldots, e_r$ принадлежат образу этого оператора?

54.3. Найти образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A}$ в геометрическом пространстве V_3, если:

а) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$; б) $\mathcal{A}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, [\mathbf{x}, \mathbf{b}]]$.

Для следующих линейных преобразований арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ построить базисы образа и ядра, найти ранг и дефект.

54.4. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

54.5. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

54.6. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

54.7. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 8x_2 - 8x_3, 4x_1 + x_2 - x_3)$.

54.8. $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 3x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_3, -x_1 + 2x_2)$.

54.9. Линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задан матрицей A в паре естественных базисов пространств. Найти образ вектора a, если:

1) $m = 3,\ n = 4,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ a = (4, -1, -1, 3)$;

2) $m = 4,\ n = 4,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},\ a = (-1, 1, 1, -1)$;

3) $m = 5,\ n = 4,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix},\ a = (-2, 1, 3, -1).$

54.10. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве V, задан матрицей A в некотором базисе e. Найти его ядро и образ и выяснить, является ли этот оператор изоморфизмом, если:

1) $n = 2,\ A = \begin{bmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{bmatrix};$

2) $n = 3,\ A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix};$

3) $n = 3,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

4) $n = 4,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$

5) $n = 4,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$

6) $n = 5,\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

54.11. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий из n-мерного пространства V в m-мерное пространство W, задан матрицей A в некоторой паре базисов e и f пространств V и W соответственно. Найти его ядро и образ и выяснить, задает ли данный оператор сюръективное, инъективное отображение, если:

1) $m = 3,\ n = 4,\ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{bmatrix};$

2) $m = 4,\ n = 3,\ A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix};$

3) $m = 4,\ n = 3,\ A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix};$

4) $m = 2,\ n = 5,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix};$

5) $m = 5,\ n = 3,\ A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{bmatrix};$

6) $m = 3,\ n = 5,\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

54.12. Найти ранг оператора $\mathcal{F}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ по правилу

$$\mathcal{F}X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

54.13. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{C}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$ по правилу $\mathcal{C}X = [X, A]$, где A – заданная матрица, не превосходит 2.

54.14. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{G}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{G}X = AX$, где A – заданная матрица, равен $n\,\mathrm{rg}\,A$.

54.15. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{G}$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ по правилу $\mathcal{G}X = XB$, где B – заданная матрица, равен $n\,\mathrm{rg}\,B$.

54.16. Доказать, что ранг оператора $\mathcal{A}$, ставящего в соответствие каждой квадратной матрице $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ кронекерово произведение $X \otimes B$ с заданной матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, равен $n^2\,\mathrm{rg}\,B$.

54.17. Описать образ и ядро оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ в пространстве M_n.

54.18. Описать образ и ядро разностного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве M_n, действующего по правилу

$$\mathcal{A}f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

54.19. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует из пространства M_n в пространство $\mathbb{R}^k$ по правилу $\mathcal{A}f(t) = (f(a_1), \ldots, f(a_k))$, где $a_1, \ldots, a_k$ – различные числа. Найти дефект этого оператора.

54.20. Описать образ и ядро оператора $\mathcal{A}$ в пространстве M_n, действующего по правилу

$$\mathcal{A}f(t) = \frac{f(a+t) - f(a-t)}{2t},$$

где $a \in \mathbb{R}$ – заданное число.

54.21. Найти дефект линейного функционала f на n-мерном пространстве V.

54.22. Для каждого из линейных функционалов геометрического пространства V_3, действующих по правилам $f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$ и $f_2(\mathbf{x}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{x}], \mathbf{b})$, найти ядро.

54.23. Пусть f_1, f_2 – два линейных функционала в линейном пространстве V, причем $f_1(x)f_2(x) = 0$ для всех $x \in V$. Доказать, что один из функционалов нулевой.

54.24. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ – линейные функционалы в линейном пространстве V над бесконечным полем. Доказать, что если $f_1(x) \ldots f_k(x) = 0$ для всех $x \in V$, то один из функционалов нулевой.

54.25. Линейный оператор $\mathcal{A}$ действует из V в W, а y – произвольный вектор, принадлежащий его образу. Доказать, что *полный прообраз* вектора y, т.е. множество всех векторов $x \in V$, для которых $\mathcal{A}x = y$, образует линейное аффинное многообразие пространства V с направляющим подпространством $\ker \mathcal{A}$.

54.26. Пусть оператор $\mathcal{A}$ действует из V в W, а подпространство L удовлетворяет включению: $L \subset \operatorname{im} \mathcal{A}$. Доказать, что множество векторов $x \in V$, образы которых принадлежат L, (т.е. *полный прообраз подпространства* L) также является подпространством, и его размерность равна $\dim L + \operatorname{def} \mathcal{A}$.

54.27. Линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задан в паре естественных базисов пространств матрицей A. Найти полный прообраз вектора y, если:

1) $n = 4,\ m = 3,\ A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix},\ y = (-1, 0, 1);$

2) $n = 5,\ m = 3,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{bmatrix},\ y = (1, 2, 1);$

3) $n = 3,\ m = 5,\ A = \begin{bmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 8 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix},\ y = (4, 2, 9, -20, -3);$

4) $n = 4,\ m = 5,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix},\ y = (0, 1, 1, 2, -1).$

54.28. Линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задан в паре естественных базисов пространств матрицей A. Найти полный прообраз подпространства $L \subset \mathbb{R}^m$, если:

1) $n = 5,\ m = 2,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, L натянуто на вектор $(3, -1)$;

2) $n = 4,\ m = 3,\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, L задано в естественном базисе системой уравнений $x_1 + x_2 = 0,\ x_1 - x_3 = 0$;

3) $n = m = 6,\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, L задано в естественном базисе системой уравнений $2x_1 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_2 + 2x_4 - x_6 = 0$.

54.29. Пусть линейное преобразование пространства всех многочленов от t переводит каждый многочлен t^k в t^{2k} ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Убедиться в том, что это преобразование инъективно, но не сюръективно. Найти его образ.

54.30. Найти образ и ядро линейного оператора умножения матриц пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$:

1) на матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ слева;

2) на матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ справа.

54.31. Для каждой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ обозначим через $Y \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ матрицу, составленную из первых $n-1$ столбцов матрицы X. Определим отображение $\mathcal{A}$ равенством $\mathcal{A}X = Y$. Доказать, что отображение $\mathcal{A}$ линейно, найти его ядро и образ.

54.32. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – заданные квадратные матрицы порядка m. Отображение $\mathcal{A}$ каждому вектору $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие матрицу $\mathcal{A}x = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$.

1) Доказать линейность отображения $\mathcal{A}$.

2) Найти ядро и образ этого отображения, если $n = 4$ и

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

54.33. Для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ построить взаимно однозначное соответствие между его образом $\operatorname{im}\mathcal{A}$ и линейными многообразиями пространства V вида $P = x_0 + \ker\mathcal{A}$.

54.34. Множество M всех плоскостей пространства V вида $P = x_0 + \ker\mathcal{A}$ является согласно задаче 46.34 линейным пространством (фактор-пространством пространства V по подпространству $\ker\mathcal{A}$). Доказать, что соответствие между многообразиями из M и векторами из $\operatorname{im}\mathcal{A}$, построенное в предыдущей задаче, является линейным оператором. Найти ядро и дефект этого оператора.

54.35. Пусть V – линейное пространство. Доказать, что всякое линейное подпространство из V служит:

а) ядром некоторого линейного оператора в V;

б) образом некоторого линейного оператора в V.

54.36. Доказать, что для любой ненулевой линейной формы f на n-мерном пространстве V над полем P существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, такой, что равенство
$$f(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1$$
выполнено для любых чисел $x_1, \ldots, x_n \in P$.

54.37. Привести пример линейного оператора, действующего в пространстве V, для которого пространство V не является прямой суммой образа и ядра этого оператора.

54.38. Пусть L – любое подпространство, дополнительное к ядру $\ker\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$. Доказать, что:

а) любая линейно независимая система векторов из L переводится оператором $\mathcal{A}$ в линейно независимую систему;

б) подпространство L отображается оператором $\mathcal{A}$ взаимно однозначно на его образ $\operatorname{im}\mathcal{A}$.

54.39. Доказать, что для любых двух подпространств: N в n-мерном пространстве V и T в пространстве W, таких, что $\dim N + \dim T = n$, найдется линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$, для которого ядро совпадает с N, а образ с T.

54.40. В пространстве M_n построить два различных линейных оператора, имеющих одни и те же образ и ядро.

54.41. В естественных базисах арифметических пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Найти каноническую пару базисов в каждом из следующих случаев:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$,

3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, 6) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & -10 \end{bmatrix}$.

§55. Линейное подпространство линейных операторов

Пусть V и W – линейные пространства над полем P.

Суммой линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ называется отображение $\mathcal{A} + \mathcal{B} : V \to W$, выполняемое по правилу
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \quad \forall x \in V.$$

Произведением линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ *на число* $\alpha \in P$ называется отображение $\alpha\mathcal{A} : V \to W$, выполняемое по правилу
$$(\alpha\mathcal{A})x = \alpha\mathcal{A}x, \quad \forall x \in V.$$

Теорема 55.1. *Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ и числа $\alpha \in P$*
$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W), \quad \alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W).$$

Следствие. Сложение операторов и умножение оператора на число являются внутренним и внешним законами композиции на множестве $\mathcal{L}(V,W)$.

Теорема 55.2. *Множество $\mathcal{L}(V,W)$ – линейное пространство над полем P относительно введенных выше операций.*

Теорема 55.3. *При сложении операторов их матрицы складываются, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число, т.е. если e и f – базисы пространств V и W, то*

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})_{fe} = A_{fe} + B_{fe}, \quad (\alpha\mathcal{A})_{fe} = \alpha A_{fe}.$$

Теорема 55.4. *Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то линейное пространство $\mathcal{L}(V,W)$ изоморфно пространству матриц $P^{m\times n}$.*

Следствие. $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

ЗАДАЧИ

55.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $a_1 = (-3,7)$, $a_2 = (1,-2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}$ в базисе $b_1 = (6,-7)$, $b_2 = (-5,6)$ – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$:

а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^2$;

б) в базисе a_1, a_2;

в) в базисе b_1, b_2.

55.2. Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в трехмерном пространстве, переводит векторы базиса e_1, e_2, e_3 в векторы a_1, a_2, a_3, координаты которых в этом базисе равны $(-2,-1,-2)$, $(11,7,1)$, $(-6,-4,-1)$ соответственно. Линейный оператор $\mathcal{B}$ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3, координаты которых в том же базисе e равны $(1,5,0)$, $(3,4,-3)$, $(-1,-1,2)$ соответственно. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}-3\mathcal{B}$ в базисе e_1, e_2, e_3.

55.3. Линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующие в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$, переводят векторы $a_1 = (1,1-1)$, $a_2 = (2,0,1)$, $a_3 = (2,-5,6)$ соответственно в векторы $b_1 = (0,-2,2)$, $b_2 = (1,1,1)$, $b_3 = (-2,4,1)$ и $c_1 = (1,3,-3)$, $c_2 = (0,1,-1)$, $c_3 = (3,-4,2)$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

55.4. Пусть линейное пространство V является прямой суммой двух ненулевых подпространств L_1 и L_2. Показать, что единичный оператор пространства V представим в виде суммы $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, где $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – операторы проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1 соответственно.

55.5. Доказать, что для произвольных операторов $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ выполнено:

а) $\operatorname{im} \lambda\mathcal{A} = \operatorname{im}\mathcal{A}$, если $\lambda \neq 0$;

б) $\operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \subset \operatorname{im}\mathcal{A} + \operatorname{im}\mathcal{B}$.

Привести пример, когда включение пункта б) является строгим.

55.6. Доказать, что для произвольных операторов $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ выполнено:

а) $\ker \lambda\mathcal{A} = \ker\mathcal{A}$, если $\lambda \neq 0$;

б) $\ker(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \supset \ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}$.

Привести пример, когда включение пункта б) является строгим.

55.7. Доказать, что если операторы $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ таковы, что $\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} = V$, то выполнено равенство

$$\operatorname{im}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \operatorname{im}\mathcal{A} + \operatorname{im}\mathcal{B}.$$

Является ли условие $\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} = V$ необходимым для справедливости этого равенства?

55.8. Доказать, что если операторы $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$ таковы, что $\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \operatorname{im}\mathcal{B} = \{\theta\}$, то выполнено равенство

$$\ker(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}.$$

Является ли условие $\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \operatorname{im}\mathcal{B} = \{\theta\}$ необходимым для справедливости этого равенства?

55.9. Доказать, что ненулевые операторы $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$, образы которых различны, линейно независимы.

55.10. Ненулевые операторы $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V,W)$ таковы, что их образы попарно различны. Верно ли, что эти операторы линейно независимы?

55.11. Пусть $f_1,\ldots,f_m$ – базис пространства W, g – ненулевой вектор пространства V. Доказать, что операторы $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_m$ такие, что $\mathcal{B}_j g = f_j$, $j = \overline{1,m}$, линейно независимы.

55.12. В пространстве W задан базис $f_1,\ldots,f_m$. Доказать, что для всякого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ найдутся операторы $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_m$ такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 + \ldots + \mathcal{B}_m$, причем:

а) ранг каждого из операторов $\mathcal{B}_j$ не превосходит единицы;

б) образ ненулевого оператора $\mathcal{B}_j$ натянут на вектор f_j.

55.13. Пусть $e_1,\ldots,e_n$ – базис пространства V, а g – некоторый ненулевой вектор пространства. Доказать, что операторы $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$, заданные на базисе e равенствами

$$\mathcal{A}_j e_k = \begin{cases} g, & k = j, \\ \theta, & k \neq j, \end{cases}$$

линейно независимы.

55.14. Доказать, что всякий оператор ранга 1, образ которого содержит вектор g, есть линейная комбинация операторов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, введенных в предыдущей задаче.

55.15. Пусть в пространствах V и W заданы соответственно базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$. Используя результаты предыдущих задач, показать, что всякий оператор, действующий из V в W, есть линейная комбинация операторов $\mathcal{A}_{11}, \ldots, \mathcal{A}_{mn}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\mathcal{A}_{ij} e_k = \begin{cases} f_i, & k = j, \\ \theta, & k \neq j, \end{cases} \qquad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

55.16. Показать, что система операторов $\mathcal{A}_{ij}$, введенных в предыдущей задаче, линейно независима. Вывести отсюда, что эти операторы образуют базис пространства $\mathcal{L}(V, W)$.

55.17. Выяснить, образует ли данное множество линейных операторов линейное подпространство в $\mathcal{L}(V, W)$:

а) множество всех операторов ранга $k \geq 1$;

б) множество всех операторов ранга, на превосходящего числа $k \geq 1$;

в) множество всех инъективных отображений;

г) множество всех сюръективных отображений.

55.18. Будет ли линейным подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$ множество всех операторов, имеющих:

а) один и тот же образ; б) одно и то же ядро?

55.19. Показать, что если T – подпространство пространства W, то множество всех линейных операторов, образы которых содержатся в T, является подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$. Найти его размерность, если $\dim V = n$, $\dim T = k$.

55.20. Показать, что если N – подпространство пространства V, то множество всех линейных операторов из $\mathcal{L}(V, W)$, ядро которых содержит N, является подпространством пространства $\mathcal{L}(V, W)$. Найти размерность этого подпространства, если $\dim V = n$, $\dim N = l$, $\dim W = m$.

55.21. Пусть L_1 и L_2 – произвольные подпространства пространства W, причем $L = L_1 + L_2$, $L_0 = L_1 \cap L_2$. Доказать следующие соотношения:

а) $\mathcal{L}(V, L) = \mathcal{L}(V, L_1) + \mathcal{L}(V, L_2)$;

б) $\mathcal{L}(V, L_0) = \mathcal{L}(V, L_1) \cap \mathcal{L}(V, L_2)$.

55.22. Пусть пространство W разложено в прямую сумму

подпространств $L_1, \ldots, L_k$. Доказать, что

$$\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(V, L_1) \oplus \mathcal{L}(V, L_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(V, L_k).$$

55.23. Доказать, что ранг суммы операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ не превосходит суммы рангов этих операторов:

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \leq \operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{B}.$$

55.24. Пусть операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ таковы, что

$$V = \operatorname{im}\mathcal{A} \oplus \operatorname{im}\mathcal{B} = \ker\mathcal{A} \oplus \ker\mathcal{B}.$$

Доказать, что ранг суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ этих операторов равен сумме рангов $\operatorname{rg}\mathcal{A}$ и $\operatorname{rg}\mathcal{B}$.

55.25. Показать, что для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \geq |\operatorname{rg}\mathcal{A} - \operatorname{rg}\mathcal{B}|.$$

55.26. Пусть V – некоторое линейное пространство, а k_1 и k_2 – натуральные числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq k_1, k_2 \leq \dim V$, $k_1 + k_2 \leq \dim V$. Для каждого натурального числа k: $|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2$ привести пример операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$, для которых $\operatorname{rg}\mathcal{A} = k_1$, $\operatorname{rg}\mathcal{B} = k_2$, $\operatorname{rg}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = k$.

55.27. Доказать, что любой оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ранга r может быть представлен в виде суммы r операторов ранга 1, но не может быть представлен в виде суммы менее чем r таких операторов.

55.28. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы сумма двух операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ранга 1 была оператором ранга не больше единицы.

55.29. Пространство V имеет размерность $n > 1$. Доказать, что в пространстве $\mathcal{L}(V, V)$ всякое подпространство L размерности $n+1$ содержит хотя бы один оператор ранга больше единицы.

55.30. Пусть операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ таковы, что для любого вектора $x \in V$ векторы $\mathcal{A}x$ и $\mathcal{B}x$ коллинеарны. Значит ли это, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коллинеарны?

55.31. В условиях предыдущей задачи дополнительно предположить, что ранг оператора $\mathcal{B}$ равен размерности пространства V. Коллинеарны ли операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в этом случае?

55.32. Доказать, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ранга 1, имеющие один и тот же образ T и одно и то же ядро N, коллинеарны.

55.33. Доказать, что если два линейных функционала имеют одинаковые ядра, то они коллинеарны.

55.34. Доказать, что n линейных функционалов на n-мерном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер есть нулевое подпространство.

55.35. Доказать, что формы $\varphi_0(f) = f(a)$, $\varphi_1(f) = f'(a), \ldots, \varphi_n(f) = f^{(n)}(a)$ при любом $a \in \mathbb{R}$ образуют базис в пространстве $\mathcal{L}(M_n, \mathbb{R})$.

55.36. Доказать, что формы $\varphi_0(f) = f(a_0)$, $\varphi_1(f) = f(a_1), \ldots, \varphi_n(f) = f(a_n)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – произвольные попарно различные действительные числа, образуют базис в пространстве $\mathcal{L}(M_n, \mathbb{R})$.

55.37. Доказать, что формы $\varphi_k(f) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$, $k = \overline{0,n}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n+1}$, образуют базис в пространстве $\mathcal{L}(M_n, \mathbb{R})$.

55.38. Доказать, что для любого проектора $\mathcal{P}$ оператор $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ также является проектором. Найти, как связаны ядро и образ оператора $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ с ядром и образом оператора $\mathcal{P}$.

55.39. Доказать, что если $\mathcal{P}$ – оператор проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2, то оператор $\mathcal{R} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P}$ является оператором отражения.

§56. Умножение линейных операторов. Обратный оператор

Пусть V, W, Z – линейные пространства над полем P. *Произведением линейных операторов* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$ называется отображение $\mathcal{BA} : V \to Z$, выполняемое по правилу

$$(\mathcal{BA})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x), \quad \forall x \in V.$$

Теорема 56.1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$, то $\mathcal{BA} \in \mathcal{L}(V, Z)$.*

Теорема 56.2. *Операция умножения линейных операторов обладает следующими свойствами:*

1) $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$ (ассоциативность),

2) $\alpha(\mathcal{AB}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B})$,

3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$,

$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$ (дистрибутивность),

выполненными для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, для которых левые части равенств имеют смысл.

Теорема 56.3. *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы пространств V, W, Z, то*

$$(\mathcal{BA})_{ge} = B_{gf} A_{fe}.$$

Во множестве $\mathcal{L}(V, V)$ всех линейных операторов, действующих в пространстве V, для любых операторов выполнимы операции сложения, умножения на число и умножение друг на друга. Как следует из общей теории линейных операторов,

1) $\mathcal{L}(V, V)$ – *линейное пространство над полем P;*

2) $\mathcal{L}(V, V)$ – *некоммутативное кольцо с единицей.*

Линейное пространство над полем P, которое является кольцом и для любых своих элементов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ удовлетворяет условию

$$\alpha(\mathcal{AB}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B}), \quad \forall \alpha \in P,$$

называется *алгеброй* (или *линейной алгеброй*) *над полем P*. Размерность линейного пространства при этом называется также *размерностью алгебры*. Таким образом, $\mathcal{L}(V, V)$ – *алгебра над полем P*.

Как и в любом кольце, оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ можно возводить в степень $n \in \mathbb{N}$, и если $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – произвольный многочлен над полем P от переменной t, то однозначно определен оператор

$$p(\mathcal{A}) = a_0 I + a_1 \mathcal{A} + \ldots + a_n \mathcal{A}^n, \tag{56.1}$$

называемый *многочленом от оператора $\mathcal{A}$*. Из свойств матрицы линейного оператора следует, что матрицей многочлена (56.1) от оператора $\mathcal{A}$ является тот же многочлен от матрицы A_e: $(p(\mathcal{A}))_e = p(A_e)$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}^{-1} : V \to V$ называется *обратным оператором* к оператору $\mathcal{A}$, если

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}.$$

Теорема 56.4. *Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ обратим тогда и только тогда, когда он биективен.*

Теорема 56.5. *Обратный оператор единствен.*

Теорема 56.6. *Матрица обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в произвольном базисе является обратной к матрице оператора $\mathcal{A}$ в этом же базисе.*

Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т.е.

$$\ker \mathcal{A} = \{\theta\},$$

и *вырожденным* в противном случае.

Теорема 56.7. *В конечномерном пространстве V следующие утверждения равносильны: для $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$*

1) $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$;	*4) $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$;*	*6) $\mathcal{A}$ обратим;*
2) $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$;	*5) $\det \mathcal{A} \neq 0$;*	*7) $\mathcal{A}$ биективен.*
3) $\mathcal{A}$ не вырожден;		

Теорема 56.8. *Произведение обратимых операторов обратимо, при этом*

$$(\mathcal{AB})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

Следствие 1. *Умножение линейных операторов является алгебраической операцией на множестве всех обратимых операторов, действующих в пространстве V.*

Следствие 2. *Множество всех обратимых линейных операторов из $\mathcal{L}(V, V)$ образует неабелеву мультипликативную группу.*

ЗАДАЧИ

56.1. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}$ в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ – матрицу $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{AB}$:

а) в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^2$;

б) в базисе a_1, a_2;

в) в базисе b_1, b_2.

56.2. В пространстве M_3 заданы два оператора. Оператор $\mathcal{A}$ всякий многочлен $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ переводит в многочлен $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Оператор $\mathcal{B}$ многочлены $t^3 + t^2$, $t^3 + t$, $t^3 + 1$, $t^3 + t^2 + t + 1$ переводит соответственно в $t^3 + t$, $t^3 + 1$, $t^3 + t^2 + t + 1$ и нулевой многочлен. В базисе $1, t, t^2, t^3$ составить матрицы операторов $\mathcal{AB}$ и $\mathcal{BA}$.

56.3. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 в некотором базисе трехмерном пространства V образуют соответственно матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Линейный оператор $\mathcal{F}$ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейный оператор $\mathcal{G}$ переводит векторы b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3. Найти матрицу преобразования $\mathcal{GF}$:

а) в базисе, в котором заданы координаты всех векторов;

б) в базисе a_1, a_2, a_3;

в) в базисе b_1, b_2, b_3.

56.4. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – линейные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{R}^2$, причем $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A_e = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ в естественном базисе e_1, e_2, а $\mathcal{B}$ – матрицу $B_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ в базисе $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (-1, -2)$. Найти матрицы следующих операторов:

а) $\mathcal{A}^2 - 6\mathcal{A} + 9\mathcal{I}$ в базисе e;

б) $\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{B} + 4\mathcal{I}$ в базисе e;

в) $\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2$ в базисе e;

г) $4\mathcal{AB}^{-1}$ в базисе f;

д) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^4$ в базисе $g_1 = (1, 2)$, $g_2 = (0, -1)$.

56.5. Доказать, что всякое линейное отображение представимо в виде произведения сюръективного и инъективного линейных отображений.

56.6. Верно ли, что перестановочность операторов является отношением эквивалентности на множестве операторов, действующих в пространстве V?

56.7. Показать, что всякий оператор отражения $\mathcal{R}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{R}^2 = \mathcal{I}$.

56.8. Показать, что всякий проектор $\mathcal{P}$ удовлетворяет соотношению $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

56.9. Доказать, что, наоборот, всякий оператор $\mathcal{P}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, является проектором.

56.10. Показать, что из условий $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}$, $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{O}$ следует, что:

а) $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ – проекторы;

б) $\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 = \mathcal{O}$.

56.11. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, действующий в пространстве многочленов M_n. Показать, что $\mathcal{D}^{n+1} = \mathcal{O}$.

56.12. Пусть $\mathcal{D}$ – оператор дифференцирования, действующий в пространстве многочленов M_n. Найти матрицу оператора $\mathcal{D}^k$ в базисе $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2/2!, \ldots, e_{n+1} = t^n/n!$.

56.13. В пространстве всех многочленов от переменной t рассматриваются линейные операторы: $\mathcal{A}$ – умножения на t и $\mathcal{D}$ – дифференцирования. Найти:

а) оператор $\mathcal{AD}$;

б) оператор $\mathcal{DA}$;

в) коммутатор $[\mathcal{D}, \mathcal{A}] = \mathcal{DA} - \mathcal{AD}$.

56.14. Для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$, рассмотренных в предыдущей задаче, доказать равенство $[\mathcal{D}^k, \mathcal{A}] = k\mathcal{D}^{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

56.15. Доказать, что коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ двух линейных операторов, действующих в конечномерном линейном пространстве над бесконечным полем, не может быть единичным оператором. Объянить, как это утверждение согласуется с результатом пункта в) задачи 56.13.

56.16. Доказать, что если $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ – вырожденный оператор.

56.17. Показать, что любые два многочлена от одного оператора $\mathcal{A}$ перестановочны.

56.18. Показать, что множество всех многочленов от заданного оператора $\mathcal{A}$ образует коммутативную алгебру.

56.19. Показать, что если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то перестановочны и любые многочлены $f(\mathcal{A})$ и $g(\mathcal{B})$ от этих операторов.

56.20. Доказать, что для перестановочных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполнено соотношение

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^n = \mathcal{A}^n + n\mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B} + \frac{n(n-1)}{2}\mathcal{A}^{n-2}\mathcal{B}^2 + \ldots + \mathcal{B}^n.$$

56.21. Доказать, что операторы ранга 1, имеющие одинаковое ядро и одинаковый образ, перестановочны.

56.22. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны. Доказать, что $\mathcal{B}\ker\mathcal{A} \subset \ker\mathcal{A}$.

56.23. Доказать, что если проекторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ перестановочны, то их произведение также является проектором. При этом:

а) $\operatorname{im}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \operatorname{im}\mathcal{P}_1 \cap \operatorname{im}\mathcal{P}_2$;

б) $\ker\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \ker\mathcal{P}_1 + \ker\mathcal{P}_2$.

56.24. Доказать, что произведение проекторов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ также является проектором тогда и только тогда, когда коммутатор $[\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1]$ отображает подпространство $\operatorname{im}\mathcal{P}_2$ в подпространство $\ker\mathcal{P}_1$. При этом:

а) $\operatorname{im}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \operatorname{im}\mathcal{P}_1 \cap (\operatorname{im}\mathcal{P}_2 + \ker\mathcal{P}_1 \cap \ker\mathcal{P}_2)$;

б) $\ker\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \ker\mathcal{P}_1 + \ker\mathcal{P}_2 \cap (\operatorname{im}\mathcal{P}_1 + \operatorname{im}\mathcal{P}_2)$.

56.25. Доказать, что если произведение проекторов $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_k$ не меняется при циклических перестановках сомножителей, то оно также является проектором, причем

$$\operatorname{im}\mathcal{P} = \operatorname{im}\mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \operatorname{im}\mathcal{P}_k, \quad \ker\mathcal{P} = \ker\mathcal{P}_1 + \ldots + \ker\mathcal{P}_k.$$

56.26. Доказать, что сумма проекторов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ также является проектором тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = \mathcal{O}$. При этом:

а) $\operatorname{im}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \operatorname{im}\mathcal{P}_1 \oplus \operatorname{im}\mathcal{P}_2$;

б) $\ker(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \ker\mathcal{P}_1 \cap \ker\mathcal{P}_2$.

56.27. Пусть проекторы $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ удовлетворяют условиям: $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$. Доказать, что в этом случае их сумма $\mathcal{P}_1 + \ldots + \mathcal{P}_k$ также является проектором.

56.28. Операторы $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ в пространстве V размерности n таковы, что $\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_k = \mathcal{I}$. Доказать, что следующие

условия эквивалентны:

а) все операторы $\mathcal{A}_i$ являются проекторами;

б) $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{O}$ при всех $i \neq j$;

в) $\operatorname{rg}\mathcal{A}_1 + \ldots + \operatorname{rg}\mathcal{A}_k = n$.

56.29. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ перестановочен с каждым оператором из $\mathcal{L}(V,V)$, то $\mathcal{A}L \subset L$ для любого подпространства L из V. В частности, для любого вектора $x \in V$ векторы x и $\mathcal{A}x$ коллинеарны.

56.30. Пользуясь предыдущей задачей, доказать *лемму Шура:* если оператор $\mathcal{A}$ перестановочен с каждым оператором из $\mathcal{L}(V,V)$, то он – скалярный.

56.31. Доказать, что для произведения $\mathcal{B}\mathcal{A}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ справедливы неравенства:

а) $\operatorname{rg}\mathcal{B}\mathcal{A} \leq \min(\operatorname{rg}\mathcal{A}, \operatorname{rg}\mathcal{B})$;

б) $\operatorname{def}\mathcal{B}\mathcal{A} \geq \operatorname{def}\mathcal{A}$;

в) $\operatorname{def}\mathcal{B}\mathcal{A} \geq \operatorname{def}\mathcal{B}$ (если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в одном пространстве).

56.32. Доказать, что для произведения $\mathcal{B}\mathcal{A}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполнены равенства:

а) $\operatorname{rg}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \operatorname{rg}\mathcal{A} - \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$;

б) $\operatorname{def}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \operatorname{def}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$.

56.33. Доказать, что для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$ выполнены равенства

$$\operatorname{def}\mathcal{A}^{n+1} = \operatorname{def}\mathcal{A} + \sum_{k=1}^{n} \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}^k \cap \ker\mathcal{A}),$$

$$\operatorname{rg}\mathcal{A}^{n+1} = \operatorname{rg}\mathcal{A} - \sum_{k=1}^{n} \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}^k \cap \ker\mathcal{A}).$$

56.34. Доказать, что произведение $\mathcal{B}\mathcal{A}$ операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{def}(\mathcal{B}\mathcal{A}) \leq \operatorname{def}\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{B}.$$

56.35. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – такие линейный операторы, что произведение $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}$ определено. Доказать, что справедливо *неравенство Фробениуса:*

$$\operatorname{rg}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \operatorname{rg}\mathcal{A}\mathcal{C} \leq \operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{rg}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

56.36. Доказать, что для всякого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$, ранг которого равен 1, найдется число α такое, что $\mathcal{A}^2 = \alpha\mathcal{A}$.

56.37. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$ – линейные отображения и $\dim W = m$. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg} \mathcal{BA} \geq \operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{rg} \mathcal{B} - m$ (неравенство Сильвестра);

б) если $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$, то $\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{rg} \mathcal{B} \leq m$.

56.38. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – произвольный линейный оператор. Доказать, что для любого натурального числа k, удовлетворяющего условию $\operatorname{rg} \mathcal{A} \leq k \leq \dim V$, существует линейный оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ такой, что $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$ и $\operatorname{rg} \mathcal{B} + \operatorname{rg} \mathcal{A} = k$.

56.39. Доказать, что для любых двух перестановочных линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеет место включение

$$\ker \mathcal{A} + \ker \mathcal{B} \subset \ker \mathcal{AB}.$$

Привести пример, когда это включение является строгим.

56.40. Доказать, что если перестановочные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таковы, что $\ker \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B} = \{\theta\}$, то справедливо равенство

$$\ker \mathcal{AB} = \ker \mathcal{A} \oplus \ker \mathcal{B}.$$

56.41. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве, удовлетворяет соотношению $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg}(\mathcal{A} + \mathcal{I}) + \operatorname{rg}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) = n$;

б) $\operatorname{def}(\mathcal{A} + \mathcal{I}) + \operatorname{def}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) = n$.

56.42. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ таковы, что $\mathcal{BA} = \mathcal{O}$. Следует ли отсюда, что $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$?

56.43. Привести пример двух ненулевых операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, таких, что $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{O}$.

56.44. Доказать, что если $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 1$ и $\operatorname{tr} \mathcal{AB} = 0$, то $\mathcal{ABA} = \mathcal{O}$.

56.45. Пусть $\mathcal{A}$ – заданный линейный оператор, действующий в линейном пространстве V. Доказать, что множество всех линейных операторов $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$, удовлетворяющих условию $\mathcal{AB} = \mathcal{O}$, является подпространством пространства $\mathcal{L}(V, V)$. Найти размерность этого подпространства, если $\dim V = n$ и ранг оператора $\mathcal{A}$ равен r.

56.46. Тот же вопрос для множества операторов $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, V)$, удовлетворяющих условию $\mathcal{CA} = \mathcal{O}$.

56.47. Пусть V – $2m$-мерное пространство над бесконечным полем. В пространстве $\mathcal{L}(V, V)$ указать подпространство размерности $m^2 + 1$, состоящее из попарно перестановочных операторов.

56.48. Пусть V – n-мерное пространство, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – заданный оператор ранга r. Преобразование пространства $\mathcal{L}(V, V)$

каждому оператору $\mathcal{X}$ ставит в соответствие оператор $\mathcal{AX}$. Доказать, что это преобразование является линейным. Найти его ранг и дефект.

56.49. Пусть V – n-мерное пространство, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – заданный ненулевой оператор. Преобразование δ пространства $\mathcal{L}(V, V)$ каждому оператору $\mathcal{X}$ ставит в соответствие его коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{X}]$. Доказать, что это преобразование является линейным. Показать, что преобразование δ обладает следующими свойствами:

а) δ является вырожденным и его ядро содержит все операторы, перестановочные с $\mathcal{A}$;

б) если $f(\mathcal{A})$ – многочлен от оператора $\mathcal{A}$, то $\delta f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$;

в) для любых операторов $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{AB}) = (\delta\mathcal{A})\mathcal{B} + \mathcal{A}(\delta\mathcal{B});$$

г) для любого оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{B}^n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}^k (\delta\mathcal{B}) \mathcal{B}^{n-1-k};$$

д) для любого обратимого оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{B}^{-1}) = -\mathcal{B}^{-1}(\delta\mathcal{B})\mathcal{B}^{-1};$$

е) для любых перестановочных операторов $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, V)$ выполнено соотношение

$$\delta(\mathcal{AB}^{-1}) = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(\delta\mathcal{A}) - \mathcal{A}(\delta\mathcal{B}))\mathcal{B}^{-1}.$$

56.50. Показать, что если $\mathcal{A}$ – невырожденный оператор, то для любого подпространства L имеет место равенство $\dim \mathcal{A}L = \dim L$.

56.51. Пространство V является прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_k$. Пусть $\mathcal{A}_i$ – невырожденный оператор, заданный на подпространстве L_i, $i = \overline{1, k}$. Показать, что оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, совпадающий на каждом из подпространств L_i с соответствующим оператором $\mathcal{A}_i$, также будет невырожденным.

56.52. Проверить, что оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ является:

а) вырожденным в пространстве многочленов M_n;

б) невырожденным на двумерном линейном пространстве, натянутом на функции $f_1 = \cos t$ и $f_2 = \sin t$ (с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число).

56.53. Найти обратный оператор для оператора дифференцирования пункта б) предыдущей задачи.

56.54. Найти обратный для оператора отражения $\mathcal{R}$.

56.55. Показать, что для невырожденного оператора $\mathcal{A}$ и любого числа α, отличного от нуля, выполнено равенство

$$(\alpha\mathcal{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

56.56. Доказать, что если $\mathcal{A}$ – оператор ранга 1, то хотя бы один из операторов $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ или $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ невырожден.

56.57. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то для любого оператора $\mathcal{B}$ имеют место равенства

$$\operatorname{rg} \mathcal{AB} = \operatorname{rg} \mathcal{BA} = \operatorname{rg} \mathcal{B}.$$

56.58. Доказать, что произведение операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тогда и только тогда будет невырожденным оператором, когда каждый из операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ невырожден. При этом

$$(\mathcal{AB})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

56.59. Доказать, что для невырожденного оператора $\mathcal{A}$ и произвольного оператора $\mathcal{B}$ справедливо тождество

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}-\mathcal{B}) = (\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{B}).$$

56.60. Пусть $\mathcal{A}$ – нильпотентный оператор индекса q. Доказать, что оператор $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ невырожден и

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{I} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \ldots + \mathcal{A}^{q-1}.$$

56.61. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ связаны соотношением $\mathcal{AB} + \mathcal{A} + \mathcal{I} = \mathcal{O}$. Доказать, что $\mathcal{A}$ – невырожденный оператор, причем $\mathcal{A}^{-1} = -\mathcal{I} - \mathcal{B}$.

56.62. Линейный оператор $\mathcal{F}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$, сохраняет определитель матриц. Доказать, что оператор $\mathcal{F}$ невырожден.

56.63. Ненулевой многочлен $f(t)$ называют *аннулирующим оператор* $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Доказать, что если у многочлена $f(t)$, аннулирующего оператор $\mathcal{A}$, свободный член отличен от нуля, то оператор $\mathcal{A}$ невырожден.

56.64. Доказать, что у любого линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном пространстве, существует аннулирующий многочлен степени не выше n^2.

56.65. Доказать, что для невырожденного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном пространстве, обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ представляется многочленом от $\mathcal{A}$ степени не выше $n^2 - 1$.

56.66. Показать, что перестановочны любые два многочлена $f(\mathcal{A})$ и $g(\mathcal{A}^{-1})$, где $\mathcal{A}$ – произвольный невырожденный оператор.

56.67. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$ и найдется оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W,V)$ такой, что $\mathcal{BA} = \mathcal{I}_V$ (единичный оператор пространства V). Значит ли это, что $\mathcal{AB} = \mathcal{I}_W$?

56.68. Пусть операторы $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(M_{n-1}, M_n)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(M_n, M_{n-1})$ определены соотношениями

$$\mathcal{A}f(t) = tf(t), \qquad \mathcal{B}f(t) = (f(t) - f(0))/t.$$

Показать, что оператор $\mathcal{BA}$ единичный, а оператор $\mathcal{AB}$ – нет.

56.69. Пусть V – линейная оболочка многочленов $t, t^2, \ldots, t^n$; W – пространство многочленов M_{n-1}. Рассмотреть дифференцирование многочленов как оператор $\mathcal{D}$, действующий из V в W, а также интегрирование $\int_0^t f(\xi)\,d\xi$ как оператор $\mathcal{B}$, действующий из W в V. Показать, что

$$\mathcal{BD} = \mathcal{I}_V, \qquad \mathcal{DB} = \mathcal{I}_W.$$

56.70. Пусть в условиях задачи 56.67 $\dim W > \dim V$. Доказать, что оператор $\mathcal{AB}$ будет оператором проектирования в пространстве W.

56.71. Пусть $\mathcal{AB} \in \mathcal{L}(V,W)$ – линейные операторы, причем $\operatorname{rg}\mathcal{A} \le \operatorname{rg}\mathcal{B}$. Доказать, что существуют такие операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, действующие соответственно в V и в W, что $\mathcal{A} = \mathcal{DBC}$, причем один из операторов $\mathcal{C}$ или $\mathcal{D}$ можно выбрать невырожденным.

56.72. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\ker\mathcal{A} \subset \ker\mathcal{B}$;

б) $\mathcal{B} = \mathcal{CA}$ для некоторого оператора $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(W,W)$.

56.73. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V,W)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\operatorname{im}\mathcal{A} \subset \operatorname{im}\mathcal{B}$;

б) $\mathcal{A} = \mathcal{BD}$ для некоторого оператора $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(V,V)$.

56.74. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,W)$. Доказать, что существует такое линейное отображение $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W,V)$, что $\mathcal{A} = \mathcal{ABA}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{BAB}$.

56.75. Пусть в линейном пространстве V задан базис e. Доказать, что следующие множества линейных преобразований пространства V являются группами относительно операции умножения преобразований:

а) множество всех невырожденных преобразований;

б) множество всех невырожденных преобразований с определителем, равным 1;

в) множество всех невырожденных преобразований, матрицы которых в базисе e верхние треугольные;

г) множество всех невырожденных преобразований, заданных в базисе e диагональными матрицами;

д) множество всех скалярных операторов $\lambda\mathcal{I}$, где $\lambda \neq 0$;

е) множество всех преобразований, матрицы которых в базисе e являются матрицами перестановок.

56.76. В линейном пространстве V дан базис e. Являются ли мультипликативными группами следующие множества линейных преобразований пространства V:

а) множество всех линейных преобразований;

б) множество всех преобразований, матрицы которых диагональны в базисе e;

в) множество всех невырожденных преобразований, которые в базисе e задаются целочисленными матрицами;

г) множество всех преобразований, матрицы которых в базисе целочисленны и имеют определители, равные 1 или -1;

д) множество всех преобразований с одинаковыми определителями, равными d;

е) множество всех невырожденных преобразований, имеющих в базисе e матрицы, каждая строка и каждый столбец которых содержат ровно по одному ненулевому элементу?

Ответы и указания

§44

44.3. Указание. Доказать, что $0 \cdot x = \theta$, откуда вывести, что $(-1) \cdot x = -x$. Затем воспользоваться ассоциативностью сложения.

44.4. Указание. Положить: а) $\lambda(a_1, a_2) = (a_1, 0)$; б) $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, a_2)$.

44.6. Указание. Положить: $\lambda(a_1, a_2) = (\mathrm{Re}\,\lambda a_1, \mathrm{Re}\,\lambda a_2)$.

44.8. Указание. Не доказана сюръективность умножения на число.

44.10. Указание. Рассмотреть отображение $\varphi(f) = \ln f(x)$.

44.11. Указание. в,г) Воспользоваться индукцией по n.

44.12. в) Содержит p^n векторов, размерность равна n.

44.14. Указание. Показать, что если числа $\alpha_i \in P$, $i \in \mathbb{N}$, различны и вектор $a \in V$ ненулевой, то векторы $\alpha_i a$ также различны.

44.15. Нет. Указание. Рассмотреть порядки элементов аддитивной группы векторов пространства.

44.16. Указание. Если $x \in X_i$, но $x \notin X_j$ для всех $j \neq i$, то x не содержится ни в какой линейной комбинации подмножеств X_j, $j \neq i$.

44.17. Указание. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для каждого подмножества $X \subset M$ положить $\varphi(X) = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$, если $x_i \in X$, и $a_i = 0$ в противном случае.

44.18. а) Линейно независимы; б) линейно зависимы. Обе пары линейно независимы как векторы вещественных пространств.

44.20. а) Линейно зависимы; б) линейно независимы. Обе системы линейно независимы как системы векторов вещественных пространств.

44.21. а) Линейно независимы; б) линейно зависимы. Обе системы линейно независимы как системы векторов вещественных пространств.

44.24. 2 в обоих случаях. **44.25.** 2 в обоих случаях.

44.26. 4 в обоих случаях. **44.27.** 3 в обоих случаях.

44.28. 3 в обоих случаях. **44.29.** 4 в обоих случаях.

44.30. 2 – в комплексном пространстве, 3 – в вещественном.

44.31. 4 в обоих случаях. **44.32.** 5 в обоих случаях.

44.33. 5 в обоих случаях.

44.34. 2 – в комплексном пространстве, 3 – в вещественном.

44.35. 2 в обоих случаях.

44.36. 2 – в комплексном пространстве, 4 – в вещественном.

44.37. 1 – в комплексном пространстве, 2 – в вещественном.

44.38. Нет.

44.39. Указание. Пусть $a_1, \ldots, a_r$ – база, а $a_{r+i} = \alpha_{i1}a_1 + \alpha_{i2}a_2 + \ldots + \alpha_{ir}a_r$, $i = \overline{1, r+1}$. Рассмотреть матрицу $(\mathrm{Im}\,\alpha_{ij})$, $i = \overline{1, r+1}$, $j = \overline{1, r}$, и показать, что один из векторов $a_{r+1}, \ldots, a_{2r+1}$ представим в виде линейной комбинации остальных с вещественными коэффициентами.

44.40. Ранг равен 2, база – например, x_1, x_2.

44.41. Ранг равен 3, база – например, x_1, x_2, x_4.

44.42. Ранг равен 3, база – например, $p_1(t), p_3(t), p_4(t)$.

44.43. Ранг равен 2, база – например, $p_1(t), p_2(t)$.

44.44. Ранг равен 2, база – например, A, A^T.

44.45. Ранг равен 5, база – например, A, B, B^T, AB^T, B^TB.

44.46. Указание. Если $x_l = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r$, то в качестве вектора x_j можно взять любой вектор, у которого коэффициент α_j в этом разложении отличен от нуля.

44.47. а) В системе ровно r векторов отличны от нуля; б) в системе ровно $r+1$ векторов отличны от нуля, причем два из них коллинеарны; в) либо в системе $r+2$ вектора отличны от нуля, причем три из них коллинеарны, либо в системе отличны от нуля $r+1$ векторов и существует тройка линейно зависимых векторов, в которой никакие два не коллинеарны.

44.48. x_1, x_2; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4. **44.49.** Любые два вектора.

44.50. а) x_1, x_2; x_2, x_3; x_2, x_4; б) x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_4; x_2, x_3, x_4.

44.51. Да. **44.53.** Указание. Рассмотреть базу системы.

44.54. Нет, нельзя. **44.62.** Нет. **44.65.** Нет, нельзя.

44.66. $x_e = (1/3, 1/3, 1/3)^T$. **44.67.** $x_e = (1+i, -1, 1-i)^T$.

44.68. $x_e = (0, 2, 1, 2)^T$. **44.69.** $x_e = (6, 5, -7, -3)^T$.

44.72. а) $(1, -, 1, -1, 1, -1, 1)^T$; б) $(2, -1, -1, 1, -1, 1)^T$; в) $(1, -1, -1, 2, -1, 1)^T$.

44.73. $(4, -1, -3)^T$. **44.74.** $x = -e_1 + e_2$.

44.75. Указание. Рассмотреть матрицы $E_1 + E_2 + E_3$, $E_1 + E_2 + E_4$, $E_1 + E_3 + E_4$, $E_2 + E_3 + E_4$.

44.76. $(-1, 2, -1, 1)^T$. **44.77.** а) $(1, -1, 1, i)$; б) $(1, 1, -1, 0)$.

44.78. $(1, 1, -1, 1, 1, 1)^T$. **44.79.** $(x_1', x_2')^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (x_1, x_2)^T$.

44.80. $$(x_1', x_2', x_3')^T = \begin{bmatrix} i & -1-i & 1+i \\ 1-i & i & -1-i \\ -1-i & 1-i & i \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T.$$

44.81. $$\left(f(c), f'(c), \frac{f''(c)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right).$$

44.82. $$\begin{bmatrix} 1 & -c & c^2 & -c^3 & \ldots & (-c)^n \\ 0 & 1 & -cC_2^1 & c^2C_3^1 & \ldots & (-c)^{n-1}C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & -cC_3^2 & \ldots & (-c)^{n-2}C_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (-c)^{n-3}C_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

44.83. $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ (x_1', \ldots, x_6')^T = Q(x_1, \ldots, x_6)^T.$$

44.84. $$(x_1', x_2', x_3')^T = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 4 \\ -3 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T.$$

44.85. $$(x_1', x_2', x_3', x_4')^T = \begin{bmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ -0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3, x_4)^T.$$

44.86. $$(x_1', x_2', x_3')^T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T.$$

44.87. а) Поменяются местами i-я и j-я строки; б) поменяются местами i-й и j-й столбцы; в) все строки, а затем все столбцы запишутся в обратном порядке.

44.88. а) S^{-1}; б) SQ^{-1}.

44.89. а) Каждый вектор f_i коллинеарен e_i, $i = \overline{1,n}$; б) $f_i = \alpha e_i$, $i = \overline{1,n}$; в) каждый вектор f_i линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_i$; г) каждый вектор f_i линейно выражается через $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n$.

44.90. Указание. Так как $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m = \theta$. Пусть $\beta_1 \neq 0$. Тогда, так как $e_2, \ldots, e_m$ также линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m = \theta$. Пусть $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$ и $\gamma = \sum_{i=2}^m \gamma_i$ отличны от нуля. Тогда линейная комбинация $\gamma(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m) - \beta(\gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m)$ – искомая.

44.92. Указание. Пусть Q – матрица перехода от f к e. Так как она невырождена, то среди миноров k-го порядка, стоящих в первых k столбцах, обязательно есть ненулевой. Номера строк, в которых он находится, и определяют требуемый набор векторов из базиса f. Чтобы убедиться в этом, достаточно составить матрицу перехода от f к вновь построенному базису.

44.93. Нет, не обязательно. Можно, например, взять векторы $f_1 = e_1 - e_2$ и $f_2 = e_2 - e_3 - e_1$. Тогда $f_1 + f_2 + e_3 = \theta$.

44.94. а) q^n; б),в) $(q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-1})$.

§45

45.2. $(1, 0, 0, \ldots, 0, 1)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, …, $(0, 0, 0, \ldots, 1, 0)$; размерность равна $n - 1$.

45.3. $(1, 0, 0, 0, \ldots)$, $(0, 0, 1, 0, \ldots)$, …; размерность равна $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

45.4. $(0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$, $(1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$, $(0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, …; размерность равна $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$.

45.5. $(1, 0, 1, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, 1, \ldots)$; размерность равна 2.

45.6. Базис образуют, например, матрицы F_{ij} $(i \leq j,\ i, j = \overline{1,n})$, у которых элементы $f_{ij} = f_{ji} = 1$, а все остальные элементы равны 0; размерность равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

45.7. Базис образуют, например, матрицы G_{ij} $(i < j,\ i, j = \overline{1,n})$, у которых элементы $g_{ij} = -g_{ji} = 1$, а все остальные элементы равны 0; размерность равна $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

45.8. Размерность равна 2; базис образуют матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

45.10. $1, t^2, t^4, \ldots$; размерность равна $\left[\frac{n+2}{2}\right]$.

45.11. $t, t^3, t^5, \ldots$; размерность равна $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

45.12. $t - a$, $(t-a)t$, $(t-a)t^2$, …, $(t-a)t^{n-1}$; размерность равна n.

45.13. $(t-a)(t-\overline{a})$, $(t-a)(t-\overline{a})t$, $(t-a)(t-\overline{a})t^2, \ldots, (t-a)(t-\overline{a})t^{n-2}$; размерность равна $n-1$.

45.14. При $k \leq n$: $(t-a_1)\ldots(t-a_k)$, $(t-a_1)\ldots(t-a_k)t, \ldots, (t-a_1)\ldots(t-a_k)t^{n-k}$, размерность равна $n+1-k$. При $k > n$ – это нулевое подпространство.

45.15. C_{k+n-1}^{n-1}.

45.16. а) Размерность равна 0;
б) размерность равна 1, базис $(1+3i, -2)$;
в) размерность равна 1, базис $(1,1,1)$;
г) размерность равна 2, базис $(1-i,-1,0)$, $(2+i,0,-1)$;
д) размерность равна 2, базис $(-1,i,1,0)$, $(1+i,1,0,-1)$.

45.17. Размерность равна 3; базис образуют, например, a_1, a_2, a_4.

45.18. Размерность равна 3; базис образуют, например, a_1, a_2, a_5.

45.19. Размерность равна 3; базис образуют, например, f_1, f_2, f_3.

45.20. Размерность равна 2; базис образуют, например, c_1, c_2.

45.21. Размерность равна 1; базис образует, например, c_1.

45.22. Размерность равна 2; базис образуют, например, c_1, c_2.

45.23. Размерность равна 3; базис образуют, например, c_1, c_2, c_3.

45.24. Размерность равна 2; базис образуют, например, A_1, A_2.

45.26. $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-k+1})/b$, где $b=(q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})$ – число различных базисов в k-мерном подпространстве.

45.27. Например, $x_1-x_3-x_4=0$, $x_2+x_3-x_4=0$.

45.28. Например, $x_1-x_2-2x_3=0$, $x_1-x_2+2x_4=0$, $2x_1+x_2-x_5=0$.

45.29. Например, $(3-3i)x_1-2x_2=0$.

45.30. Например, $x_1-x_2=0$, $x_1-x_3=0$, $(1-i)x_1-x_4=0$.

45.31. Например, $(1-7i)x_1+(-11+7i)x_2+10x_3=0$, $(-19+13i)x_1+(9-3i)x_2+10x_4=0$.

45.33. *Указание.* Произвольный базис подпространства L дополнить до базиса пространства V. Затем элементарными преобразованиями получить базис, удовлетворяющий условию.

45.34. Да. Нет.

45.36. *Указание.* При доказательстве необходимости использовать равенство $B_e = CA_e$, где C – невырожденная матрица, составленная из коэффициентов разложения второй системы через первую. При доказательстве достаточности приписать к матрице A_e снизу строку координат вектора b_i и показать, что ранг полученной матрицы равен r.

45.39. Размерность L_1+L_2 равна 3, базис – например, a_1, a_2, a_3.

45.40. Размерность L_1+L_2 равна 4, базис – например, a_1, a_2, a_3, b_1.

45.41. Размерность L_1+L_2 равна 3, базис – например, a_1, a_2, b_1.

45.42. Размерность L_1+L_2 равна 3, базис – например, a_1, a_2, b_1.

45.49. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 1, базис – например, $c_1=(3,5,7)$.

45.50. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, $c_1=(0,1,0,1)$, $c_2=(1,0,1,0)$.

45.51. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, $c_1=(1,2,2,1)$, $c_2=(1,1,1,1)$.

45.52. И в вещественном, и в комплексном случаях: $\dim(L_1+L_2)=3$, $\dim(L_1\cap L_2)=1$, базис суммы – например, a_1, a_2, b_2, базис пересечения – $c_1=(0,4,3-i)$.

45.53. В комплексном случае: $\dim(L_1+L_2)=4$, $\dim(L_1\cap L_2)=2$, базис суммы – например, a_1, a_2, a_4, b_4, базис пересечения – $c_1=(0,1,0,0)$, $c_2=(0,0,0,1)$. В вещественном случае: $\dim(L_1+L_2)=6$, $\dim(L_1\cap L_2)=1$, базис

суммы – например, $a_1, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$, базис пересечения – $c_1=(0,1,0,2-i)$.

45.54. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 1, базис – например, $c_1=(3,5,1)$.

45.55. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, a_1, a_3.

45.56. Размерность $L_1 \cap L_2$ равна 2, базис – например, $c_1=(1,1,1,1,1)$, $c_2=(0,2,3,1,-1)$.

45.57. В вещественном случае: $\dim(L_1+L_2)=6$, $\dim(L_1\cap L_2)=0$, базис суммы – например, a_1, a_3, $b_1=(i,0,-3)$, $b_2=(1,0,3i)$, $b_3=(0,-i,1-2i)$, $b_4=(0,1,2+i)$. В комплексном случае: $\dim(L_1+L_2)=3$, $\dim(L_1\cap L_2)=1$, базис суммы – например, a_1, a_3, b_1, базис пересечения – $c_1=(-10+9i, 16+2i, 3-10i)$.

45.58. Например, базис суммы – $a_1=(1,1,0,0,-1)$, $a_2=(0,1,1,0,1)$, $a_3=(0,0,1,1,1)$, $a_4=(1,0,1,0,1)$, базис пересечения – $c_1=(1,1,1,1,0)$, $c_2=(1,0,0,1,-1)$.

45.59. Например, базис суммы – $a_1=(1,0,0,1)$, $a_2=(0,1,0,0)$, $a_3=(0,0,-1,1)$, базис пересечения – $c_1=(2,3,1,1)$.

45.60. Например, базис суммы – $a_1=(1,0,1,0)$, $a_2=(0,1,0,1)$, $a_3=(0,0,1,0)$, базис пересечения – a_1, a_2.

45.61. Размерность суммы равна 5, размерность пересечения равна 2, базис суммы – например, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, базис пересечения – например, A_1, B_4.

45.62. Размерность суммы равна 3, размерность пересечения равна 1, базис суммы – например, $1+2t+t^3$, $1+t^2$, $1+t+t^2$, базис пересечения – например, $2+3t+t^2+t^3$.

45.65. *Указание.* Учесть, что $\dim(V_1+V_2)=\dim(W_1+W_2)=\mathrm{rg}(A_1+A_2)$.

45.70. Проекция вектора e_i на L_1 параллельно L_2 имеет i-ю координату $(n-1)/n$, а остальные координаты, равные $-1/n$, проекция на L_2 параллельно L_1 имеет все координаты, равные $1/n$.

45.71. В матрице A_1: $\{A_1\}_{ii}=1$, $i=\overline{1,n}$, остальные элементы равны 1/2; в матрице A_2: $\{A_2\}_{ij}=-\{A_2\}_{ji}=1/2$, $i<j$, $i,j=\overline{1,n}$, все диагональные элементы равны 0.

45.72. $x=(-1,-2,-6,-3)+(3,2,6,6)$.

45.74. а) $2t^3-3t^2+1$; б) t^3-t+1; в) $3(t^3-t)/2$.

45.75. а) $(-1,2i)$; б) $(0,0)$; в) $(27+6i, 12-54i)$.

45.77. В качестве дополнительных подпространств можно взять, например, линейные оболочки, натянутые на векторы $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$ и $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$.

45.78. В качестве дополнительных подпространств можно взять, например, подпространство M_0 и линейную оболочку, натянутую на многочлен t^n.

45.79. В качестве дополнительных подпространств можно взять, например, подпространство всех симметрических матриц и подпространство всех верхних треугольных матриц.

45.81. $$\frac{(k^n-k^m)(k^n-k^{m+1})\ldots(k^n-k^{n-1})}{(k^m-1)(k^m-k^2)\ldots(k^m-k^{m-1})}.$$

§46

46.1. Вектор. **46.2.** Пространство V.

46.5. Нет, неверно. Если характеристика поля равна двум, то для любого $a \in V$ выполнено $a + a = \theta$, и следовательно, $\forall x, y \in L : (a + x) + (a + y) = x + y \in L$.

46.6. Может, например, если H – это линейное многообразие в линейном подпространстве над полем $\mathbb{Z}_2$.

46.7. Вектор сдвига $(1, 0, 1, 0)$, направляющее подпространство натянуто на вектор $(1, 1, 3, 2)$.

46.8. Вектор сдвига $(1, 2, 0, 0)$, направляющее подпространство натянуто на векторы $(3, 1, 0, 1)$, $(1, -2, 1, 0)$.

46.9. В комплексном случае: вектор сдвига $(0, i, -1)$, направляющее подпространство двумерно и натянуто на векторы $(1, i, 0)$, $(2i, 1, 1 + i)$. В вещественном случае: вектор сдвига $(0, i, -1)$, направляющее подпространство четырехмерно и натянуто на векторы $(1, i, 0)$, $(i, -1, 0)$, $(2i, 1, 1 + i)$, $(-2, i, -1 + i)$.

46.10. В комплексном случае: вектор сдвига $(i, 2, 1 + i, 1 - i)$, направляющее подпространство одномерно и натянуто на вектор $(0, -i, 1, 0)$. В вещественном случае: вектор сдвига $(i, 2, 1+i, 1-i)$, направляющее подпространство двумерно и натянуто на векторы $(0, -i, 1, 0)$ и $(0, 1, i, 0)$.

46.11. Если $\lambda = 1$, то вектор сдвига $(2, 0, 0)$, направляющее подпространство натянуто на векторы $(2, 0, 1)$, $(-i, 1, 0)$. Если $\lambda \neq 1$, то вектор сдвига $(-2, -2i, 1)$, направляющее подпространство натянуто на вектор $(-2, -2i - 2i\lambda, 1)$.

46.12. Если $\lambda = 2$, то вектор сдвига $(2 - i, 0, 0, i)$, направляющее подпространство натянуто на векторы $(1, -1, 0, 1)$, $(-5, 3, 1, 0)$. Если $\lambda \neq 2$, то вектор сдвига $(\lambda+1-2i, i-1, 0, 1)$, направляющее подпространство натянуто на вектор $(-5, 3, 1, 0)$.

46.14. Все являются гиперплоскостями в M_n.

46.15. а) $n^2 - 1$; б) $n(n - \operatorname{rg} A)$; в) $n(n - \operatorname{rg} A)$; г) $n^2 - \operatorname{rg} A \operatorname{rg} B$; д) 1; е) 2.

46.16. а) $n^2 - n$; б) $n^2 - 2n + 1$.

46.17. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -7, \\ x_2 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 4x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$

46.18. $x_1 + (2 + i)x_2 + ix_3 + (1 - i)x_4 = 1 + i$.

46.19. $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$.

46.20. $\begin{cases} 2x_1 + ix_2 - x_4 = 0, \\ ix_1 - (1 - 2i)x_2 + x_3 = 1 - 2i. \end{cases}$

46.21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

46.22. $\begin{cases} x_1 + ix_2 + (1 - i)x_3 = -1, \\ 2ix_1 - x_2 + ix_3 = 2, \\ 3ix_1 - 2x_2 + (1 + 2i)x_3 = 2 - i. \end{cases}$

46.23. $\operatorname{rg} A = m$, и $n = m + 1$ или $n = m + 2$.

46.24. Указание. Преобразовать систему из базиса направляющего подпространства $e_1, \ldots, e_k$ и вектора сдвига a так, чтобы все векторы принадлежали многообразию.

46.26. Если $x_0, x_1, \ldots, x_k$ – заданная система векторов, то в качестве вектора сдвига можно взять x_0, а в качестве направляющего подпространства – $\mathcal{L}(x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0)$.

46.28. Если $k = n + 1$, то единственным многообразием является все пространство V. Если $k < n + 1$, то многообразия имеют вид $x_0 + \mathcal{L}(x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0, y_1, \ldots, y_l)$, где $l \leq n+1-k$ и $y_1, \ldots, y_l$ – произвольные векторы, для которых система $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ линейно независима.

46.29. $q^{n-k}(q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-k+1})/b$, где $b = (q^k - 1)(q^k - q) \ldots (q^k - q^{k-1})$.

46.31. $L_1 + L_2$. **46.32.** L, если $\lambda \neq 0$, $\{\theta\}$, если $\lambda = 0$.

46.33. Да, если $L = \{\theta\}$.

46.35. $\dim M = n - k$. Указание. Установить изоморфизм между M и произвольным подпространством, дополнительным к L.

46.36. Содержит вектор u, не содержит вектор v.

46.38. а) Прямая не пересекается с многообразием; б) прямая имеет с многообразием единственный общий вектор $z = (2, 1, -2, 2)$; в) прямая лежит на многообразии.

46.39. Векторы $x_1 - x_2, q_1, q_2$ должны быть линейно зависимы.

46.40. Векторы q_1, q_2 должны быть линейно независимы, а вектор $x_1 - x_2$ должен линейно выражать через q_1, a_2.

46.41. Общий вектор $z = (-5, 11, -16, -11, 7)$, плоскость имеет вид $z + \mathcal{L}(q_1, q_2)$.

46.42. Общий вектор $z = (-2, -5, -1, 1, -1)$, плоскость имеет вид $z + \mathcal{L}(q_1, q_2)$.

46.43. Общий вектор $z = (0, 1, -1, -2, -3)$, плоскость имеет вид $z + \mathcal{L}(q_1, q_2)$.

46.44. При $\lambda = 1$.

46.45. Векторы $x_1 - c, x_2 - c, q_1, q_2$ линейно зависимы, а каждая из систем $x_1 - c, q_1, q_2$ и $x_2 - c, q_1, q_2$ линейно независима.

46.46. $x = c + tq$, где $q = (6, 7, -8, -11)$; векторы пересечения: $(2, 2, -3, -4)$, $(-4, -5, 5, 7)$.

46.47. $x = c + tq$, где $q = (1, 1, 0, 3)$; векторы пересечения: $(2, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 2, -2)$.

46.48. Указание. Рассмотреть параметрические уравнения прямых.

46.49. $x_1 + \mathcal{L}(x_2 - x_1, q_1, q_2)$.

46.51. Имеют один общий вектор $z = (1, 2, 1, 0, 1)$.

46.52. Не пересекаются; направляющие подпространства пересекаются по нулевому вектору.

46.53. Не пересекаются; направляющие подпространства пересекаются по одномерному подпространству, натянутому на вектор $(5, 1, 0, 0, 5)$.

46.54. Пересекаются по прямой $x = z_0 + q_2 t$, где $z_0 = (-2, -1, 6, 6, 7)$.

46.55. Введем две матрицы: A – матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов p_1, p_2, q_1, q_2, B – матрица, полученная из A приписыванием столбца координат вектора $x_0 - y_0$. Пусть $\operatorname{rg} A = r_1$, $\operatorname{rg} B = r_2$. Возможен один из шести случаев:

1) $r_1 = 4$, $r_2 = 5$: плоскости не лежат в одном четырехмерном многообразии;

2) $r_1 = r_2 = 4$: плоскости имеют одну общую точку, и следовательно, лежат в одном четырехмерном, но не лежат в одном трехмерном многообразии;

3) $r_1 = 3$, $r_4 = 4$: плоскости не имеют общих точек, лежат в одном четырехмерном, но не лежат в одном трехмерном многообразии;

4) $r_1 = r_2 = 3$: плоскости лежат в трехмерном многообразии и пересекаются по прямой;

5) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$: плоскости не имеют общих точек, но лежат в одном трехмерном многообразии;

6) $r_1 = r_2 = 2$: плоскости совпадают.

46.57. Если две плоскости трехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Если плоскость и трехмерное линейное многообразие четырехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую прямую. Если два трехмерных линейных многообразия четырехмерного пространства имеют общую точку, то они имеют общую плоскость.

46.58. Линейное многообразие имеет уравнение $x = a_1 + t_1(a_2 - a_1) + t_2(a_4 - a_1)$. Пересечение с заданной прямой: а) состоит из одного вектора $(0, 0, 3, 3)$; б) пусто.

46.62. Гиперплоскость, параллельная H_1 и H_2 и проходящая через одну из точек указанного вида.

46.63. Если характеристика поля равна 2, то это утверждение неверно. Указание. Записать уравнение прямой, содержащей a и b, в виде $\lambda a + (1-\lambda)b$, $\lambda \in P$.

46.66. Указание. Показать, что $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) = \dim(L_1 \cap \ldots \cap L_k)$, а затем по индукции показать, что в n-мерном пространстве размерность пересечения k подпространств размерности $n-1$ не меньше $n-k$.

46.67. Указание. Дополнить базис направляющего подпространства рассматриваемого многообразия до базиса всего пространства.

§47

47.2. Пусть e – произвольный фиксированный базис пространства. Для любых векторов x и y обозначим через x_e и y_e их координатные столбцы в базисе e. Тогда скалярное произведение можно ввести равенствами $(x, y) = x_e^T y_e$ в вещественном случае и $(x, y) = x_e^T \overline{y_e}$ в комплексном случае.

47.3. Изменение масштабной единицы для измерения длин.

47.5. а,д,е,ж) Нет; б,в,г) да.

47.7. Указание. При проверке последней аксиомы воспользоваться неравенством $2|\alpha_i\alpha_j| \le |\alpha_i|^2 + |\alpha_j|^2$.

47.8. а,б,в,г,ж,и) Нет; д,е,з) да.

47.9. $A^H = A$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $\det A > 0$.

47.10. а,в,г) Нет; б,д) да.

47.11. Только правило б). **47.12.** 1) Да; 2) да, если $m \ge n+1$.

47.13. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $G(e) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

4) $G(e) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

47.14. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 2+i \\ 0 & 2-i & 6 \end{bmatrix}$, а) $G(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i & 2+i \\ 1+2i & 3 & 2+i \\ 2-i & 2-i & 6 \end{bmatrix}$, б) $G(f) = I$.

47.15. а) $G = I$; б) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (i+j-1)^{-1}$;

в) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (i+j-1)^{-1}$, если $i+j$ четно, и $g_{ij} = 0$, если $i+j$ нечетно;

г) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{\min(i-1,j-1)} \dfrac{(i-1)!(j-1)!}{(i-k-1)!(j-k-1)!}\alpha^{i+j-2k-2}$; при $\alpha = 0$: $g_{ij} = ((i-1)!)^2\delta_{ij}$;

д) $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} t_k^{i+j-2}$.

47.16. $\det G' = \det G(\det S)^2$.

47.17. Указание. Воспользоваться результатом задачи 47.15 б,в).

47.18. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $(x, y) = -1$; 2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $(x, y) = 2$;

3) $G(e) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(x, y) = 7$; 4) $G(e) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $(x, y) = 3$;

5) $G(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(x, y) = -3$.

47.19. 1) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(x, y) = 1+3i$; 2) $G(e) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(x, y) = 7i$.

47.20. Будет, если $\alpha = 0$.

47.23. Указание. Ввести произвольным образом скалярное произведение на L^6 и использовать предыдущую задачу.

47.28. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей и свойствами следа матрицы.

47.30. Нет.

47.31. 1) $|a| = 5\sqrt{2}$; 2) $|a| = \sqrt{30}$; 3) $|a| = \sqrt{6}$; 4) $|a| = 3\sqrt{2}$; 5) $|a| = \sqrt{7}$; 6) $|a| = \sqrt{10}$.

47.32. Совпадает с тождеством параллелограмма.

§48

48.1. Да.

48.8. Нет. Если в системе есть нулевой вектор, то она линейно зависима.

48.13. Указание. При $n \ge 3$ записать компоненты векторов базиса в строки матрицы и проанализировать ее первые три строки.

48.15. 1) $1, t, \ldots, t^n$; 2) $(k!)^{-1}(t-a)^k$, $k = \overline{0, n}$; 3) $\prod\limits_{j=1, j \ne k}^{n+1} (t - t_j)(t_k - t_j)^{-1}$, $k = \overline{1, n+1}$.

48.17. Указание. Воспользоваться задачами 48.5 и 48.6.

48.18. Если $x_e = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y_e = (y_1, \ldots, y_n)^T$, то: а) $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i y_i$; б) $(x, y) = (2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1) + \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda^2 x_i y_i$.

48.19. Указание. См. задачу 47.2.

48.21. *Для* $f(t) = a_1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$ *положить* $(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + (2!)^2 a_2 b_2 + \ldots + (n!)^2 a_n b_n$.

48.22. 1) $\frac{1}{3}(1, -2, 2)$; 2) $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2, -1)$;

5) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, -1, 1)$.

48.23. 1) $\frac{1}{2}(1 + i, -1 + i)$; 2) $\frac{1}{2}(1 - i, 1, -i)$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{5}}(0, 1, -5i)$.

48.24. Указание. Предположить противное – хотя один из векторов $g_1, \ldots, g_k$ нулевой.

48.25. 1) $\frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, -1, 2)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)$;

3) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2)$;

4) $\frac{1}{3}(1, 2, 2)$, $\frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $\frac{1}{3}(2, -2, 1)$;

5) $\frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, 1)$;

6) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1)$.

48.28. $1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t$.

48.29. Указание. Выполнить интегрирование по частям.

48.31. 1) Например, векторами $a_3 = (1, 1, 1, 0)$, $a_4 = (-1, 1, 0, 1)$;
2) например, векторами $a_3 = (2, 3, 1, 0)$, $a_4 = (1, -1, 1, 1)$;
3) например, векторами $a_3 = (0, -3, 1, 1)$, $a_4 = (11, -3, -10, 1)$;
4) например, векторами $a_3 = (0, -5, 4, 3)$, $a_4 = (2, 1, 10, -7)$.

48.32. 1) Например, вектором $a_3 = (11 - 3i, 1, -6 + i)$;
2) например, вектором $a_3 = (4 + 3i, 16 + 8i, 8 + 3i)$.

48.33. 1) Например, вектором $a_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$;

2) например, векторами $a_3 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $a_4 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$;

3) например, векторами $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1)$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)$;

4) например, $a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 0, -1)$, $a_4 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 2, -3, -2)$.

48.34. 1) $g_1 = (2, 3, -4, -6)$, $g_2 = (-3, 2, 6, -4)$, $g_3 = (4, 6, 2, 3)$;
2) $g_1 = (1, 1, -1, -2)$, $g_2 = (2, 5, 1, 3)$, $g_3 = (2, -1, 1, 0)$.

48.35. 1) $g_1 = (2, 1, -i)$, $g_2 = (1 + i, -1, -2 + i)$, $g_3 = (-1 + i, 4 - i, -1 + 2i)$;
2) $g_1 = (0, 1 - i, 2)$, $g_2 = (1, 1 + i, -i)$.

48.36. $n - 1$.

48.37. 1) Например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)$;

2) например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$;

3) например, $\frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1)$;

4) например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{22}}(-2, 3, 2, -2, 1)$;

5) например, $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, 2, 2, 1)$;

6) например, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, 1, 3, 0)$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 1, -1, -1, -4)$.

48.38. Указание. Процессу ортогонализации соответствует треугольная матрица перехода.

48.39. Обе матрицы равны G^{-1}. **48.40.** а) $(S^T)^{-1}$; б) $(\overline{S}^T)^{-1}$.

48.41. Указание. Воспользоваться задачей 48.38.

48.45. Если системы $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ биортогональны, то система $h_1, \ldots, h_k$ также образует с системой $e_1, \ldots, e_k$ биортогональную пару тогда и только тогда, когда векторы $f_1 - h_1, \ldots, f_k - h_k$ ортогональны подпространству $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$.

48.48. $f_1 = (5/2, -1/2)$, $f_2 = (-3/2, 1/2)$.

48.49. $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1/2, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1/3)$.

48.50. $f_1 = (3, -3, 1)$, $f_2 = (-5/2, 4, -3/2)$, $f_3 = (1/2, -1, 1/2)$.

48.51. $f_1 = (1, -3, -13)$, $f_2 = (0, 1, 5)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

48.52. $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0, 0)$, $f_3 = (-1, -2, 1, -2)$,
$f_4 = (1, 2, -1, 3)$.

48.53. $f_1 = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$, $f_2 = (1/3, 0, 1/3, 1/3)$,
$f_3 = (1/3, 1/3, 0, 1/3)$, $f_4 = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$.

48.54. $f_1 = (0, 0, 0, 1)$, $f_2 = (0, 0, 1, -1)$, $f_3 = (0, 1, -1, 0)$,
$f_4 = (1, -1, 0, 0)$.

48.55. $f_1 = \frac{1}{5}(3 - i, -1 - 3i, -1 + 2i)$, $f_2 = \frac{1}{5}(2 + i, 1 + 3i, 1 - 2i)$,

$f_3 = \frac{1}{5}(1 - 2i, 2 + i, 2 + i)$.

48.56. а) $f_1 = (0, 0, 0, 1)$, $f_2 = (1/3, 1/3, 1/3, -1)$;
б) $f_1 = (2/7, 3/7, 2/7, 2/7)$, $f_2 = (4/7, -1/7, -3/7, -3/7)$,
$f_3 = (-3/7, -1/7, -3/7, 4/7)$.

48.57. 1) $\frac{3}{8}(3 - 5t^2)$, $\frac{3}{2}t$, $-\frac{15}{8}(1 - 3t^2)$;

2) $\frac{3}{8}(3 - 5t^2)$, $\frac{15}{8}(5t - 7t^3)$, $-\frac{15}{8}(1 - 3t^2)$, $-\frac{35}{8}(3t - 5t^3)$.

§49

49.6. Указание. Воспользоваться результатом задачи 45.65.

49.8. Указание. Показать, что строки матрицы B линейно выражаются через строки матрицы A.

49.12. а) Например, $b_1 = (2, -2, -1, 0)$, $b_2 = (1, 1, 0, -1)$; б) например, $b_1 = (0, 1, 0, -1)$, $b_2 = (1, 0, -1, 0)$; в) например, $b_1 = (-3, 1, -2, 0)$, $b_2 = (1, -1, -2, 1)$.

49.13. а) Например, $b_1 = (-4 + 2i, -i, 1 - 2i)$; б) например, $b_1 = (i, 0, 0)$, $b_2 = (-2, -2 + i, 0)$, $b_3 = (-2, 0, 1)$, $b_4 = (2, 1, i)$.

49.14. а) $x_2 + x_4 = 0$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -18x_1 + x_2 + 18x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

в) $4x_1 - ix_2 + (1 + 5i)x_3 = 0$.

49.16. $L:\begin{cases}3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,\end{cases}$ $L^{\perp}:\begin{cases}x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.\end{cases}$

49.17. а) Подпространство, натянутое на многочлен $1 + t + \ldots + t^n$; б) подпространство, натянутое на многочлен $t + t^3 + \ldots + t^{2k+1}$, где $2k + 1$ – наибольшее нечетное число, не превосходящее n; в) подпространство, натянутое на многочлен $1 + 2t + 3t^2 + \ldots + (n+1)t^n$; г) подпространство всех нечетных многочленов из M_n.

49.18. а) Подпространство скалярных матриц; б) подпространство кососимметрических матриц; в) подпространство симметрических матриц; г) подпространство нижних треугольных матриц с нулевой главной диагональю.

49.19. Указание. Учесть, что величина $\mathrm{tr}(A^T B)$ задает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$.

49.23. а) $(1, -10, 0)^T$, $(0, 7, 1)^T$; б) $(3, 2, -5)^T$;
в) $(5, 1, 0, 0)^T$, $(2, 0, -1, 0)^T$, $(9, 0, 0, 1)^T$; г) $(2, 1, 0, -3)^T$, $(1, 0, 1, 4)^T$;
д) $(1, 0, -5, 1)^T$, $(0, 0, 1, -3)^T$.

49.24. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$;
б) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$;
в) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)$;
г) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, 2, 1)$;
д) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1, 0)$, $\frac{1}{2\sqrt{6}}(1, -3, 2, 1, -3)$.

49.25. а) $(1, 1, -1, 1)^T$, $(10, 1, 0, -2)^T$;
б) $(0, 1, 1, -1)^T$, $(1, 0, -2, 3)^T$;
в) $(1, 1, -1, -1, 1)^T$, $(0, 1, 2, 3, 4)^T$.

49.26. а) $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$; б) $\begin{cases}2x_1 - x_2 = 0,\\ x_3 = 0,\\ 5x_1 - x_4 = 0;\end{cases}$
в) $\begin{cases}x_1 + x_2 = 0,\\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0;\end{cases}$
д) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

49.30. $g = (5, 2, -9, -8)$, $h = (9, -5, 3, 1)$.
49.31. $g = (0, -3, 5, 2)$, $h = (2, -2, -2, 2)$.
49.32. $g = (1, -1, -1, 5)$, $h = (3, 0, -2, -1)$.
49.33. $g = (3, 1, -1, -2)$, $h = (2, 1, -1, 4)$.
49.34. $g = (2 - i, -1, i)$, $h = (-2 + i, i, -1 + 5i)$.
49.35. $g = (1, 2, -5, 1)$, $h = (-4, -2, 0, 8)$.
49.36. $g = (5, -5, -2, -1)$, $h = (2, 1, 1, 3)$.
49.37. $g = (5, 2, -1, 1)$, $h = (3, -4, 9, 2)$.
49.38. $g = (1, 1, -1, 1)$, $h = (1, 2, 0, -3)$.
49.39. $g = (2 + i, 1 - 9i, 4 + 3i)$, $h = (-2 - i, -1 + 2i, 3 + 4i)$.
49.40. $g = (3 + i, -4 + 2i, -1 + 3i)$, $h = (1 - i, -2i, 1 + i)$.
49.41. $g = (0, i, 0, -1)$, $h = (3 - i, 1 + i, 2, 1 - i)$.
49.42. $g(t) = -2 + t + t^4$, $h(t) = 2 + 4t + 6t^2 + 8t^3$.

49.43. $g(t) = 3 + 5t^2 - t^4$, $h(t) = 3t + 3t^3$.
49.44. $g(t) = 6t^2 - 4t^4$, $h(t) = 2 - 2t^2 - 3t^4$.
49.45. а) $g(t) = 1 + t$; б) $g(t) = \frac{19}{30} + \frac{29}{10}t$; в) $g(t) = -2 + 6t$;
г) $g(t) = -\frac{21}{5} + \frac{64}{5}t$.
49.52. Указание. 1) Рассмотреть определитель матрицы $\overline{A}^T A$.
49.55. Указание. Воспользоваться результатами задач 48.38 и 49.54.

§50

50.1. 1) а) 0; б) $\pi/6$; в) $3\pi/4$; 2) а) π; б) $2\pi/3$; в) $\arccos\sqrt{7/10}$;
3) а) $\arccos(1/\sqrt{3})$; б) $\pi/2$; 4) а) $\pi/4$; б) $\pi/2$.

50.2. а) Не изменится; б) заменится на дополнительный до π; в) не изменится.

50.4. а) $|x| = 3\sqrt{2}$, $|y| = 6$, $|x - y| = 3\sqrt{2}$, поэтому треугольник равнобедренный; $(\widehat{x, x - y}) = \pi/2$, поэтому треугольник прямоугольный; $(\widehat{x, y}) = \pi/4$ и является внутренним углом треугольника; $(\widehat{y, x - y}) = 3\pi/4$, поэтому внутренним углом является $(\widehat{y, y - x})$;
б) $|x| = |y| = |x - y| = 6$, поэтому треугольник равносторонний; углы $(\widehat{x, y}) = (\widehat{x, x - y}) = (\widehat{y, y - x}) = \pi/3$ являются внутренними.

50.5. Указание. 4) Воспользоваться теоремой косинусов из предыдущего пункта.

50.7. Нет.

50.9. 1. Параллелограмм, у которого равны диагонали, является прямоугольником. 2. Равенство справедливо лишь тогда, когда $\mathrm{Re}(x, y) = 0$.

50.10. Указание. Показать, что если нетривиальная линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_{n+1}$ равна θ, то все коэффициенты одного знака. Далее показать, что в минимальную линейно зависимую подсистему входят все векторы.

50.11. Указание. От противного: если все углы тупые, то в равной нулевому вектору нетривиальной линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_{n+2}$ все коэффициенты одного знака; с другой стороны эти коэффициенты могут быть подобраны так, чтобы их сумма равнялась нулю (см. задачу 44.89).

50.13. Нет. **50.19.** $\pi/4$. **50.20.** $\pi/3$. **50.21.** $\pi/3$.
50.22. $\pi/6$. **50.23.** $\arccos(2/3)$. **50.24.** $\pi/6$. **50.25.** $\pi/3$.
50.26. $\arccos(1/\sqrt{6})$. **50.27.** $\pi/2$. **50.28.** $\sqrt{58/15}$.
50.29. $\sqrt{42}$. **50.30.** $\sqrt{3}$. **50.31.** 1. **50.32.** $2\sqrt{10}$.
50.33. 1. **50.34.** $\sqrt{110}$. **50.35.** $\sqrt{14}$. **50.36.** $\sqrt{22/3}$.

50.39. а) $t^2 + 3t + 3$; б) 3; в) $(3 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2)^{1/2}$.

50.42. Указание. Перпендикуляр из вектора x на L коллинеарен вектору a.

50.43. а) 1; б) 1; в) α_n.

50.44. Указание. Использовать задачу 50.42.

50.46. Косинус угла равен модулю косинуса угла между a_1 и a_2.

50.47. 1) $\arccos(2/7)$; 2) $\arccos(1/\sqrt{3})$; 3) $\pi/2$; 4) 0.

50.48. а) $\pi/2$; б) $\arccos\frac{2k}{2k+1}$.

50.49. а) $\arccos\sqrt{\dfrac{2(n+1)}{2(2n+1)}}$; б) $\arccos\sqrt{\dfrac{3(2^{n+1}-1)}{(n+1)(2^{n+1}+1)}}$;

в) $\arccos\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$.

50.50. Указание. Использовать задачу 48.38.

50.51. а) $\left(\dfrac{(1!2!\dots n!)^3}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n+1)!}\right)^{1/2}$; б) $\left(C_{2n}^{n}\sqrt{4n+1}\right)^{-1}$.

50.52. Указание. Использовать результат задачи 49.51.

50.53. Указание. Использовать результат задачи 49.55.

50.54. Указание. Использовать результат задачи 50.52.

50.55. Указание. Использовать предыдущую задачу.

§51

51.1. При $b = 0$.

51.2. Указание. Найти x_0 в виде αn.

51.3. Указание. Если гиперплоскость имеет вид $x_0 + L$, то n – базис $L^{\perp}$.

51.5. $n(t) = 1 + ct + c^2t^2 + \ldots + c^nt^n$, $b = d$. **51.6.** Нет.

51.7. Указание. Показать, что многочлены $n_k(t)$, $k = \overline{0,n}$, в представлении подпространства $f^{(k)}(t_1) = 0$ равенством $(n_k, f) = 0$ образуют базис пространства M_n.

51.11. Указание. Показать, что направляющее подпространство этого многообразия есть ортогональное дополнение к $\mathcal{L}(n_1, \ldots, n_k)$.

51.12. Нормальный вектор равен αn, где $\alpha = b/(n,n)$.

51.14. а) 1; б) t;

в) $\dfrac{4(n-1)}{(n+1)(n+2)}(1+t+\ldots+t^n) - \dfrac{6(n-2)}{n(n+1)(n+2)}(t+2t^2+\ldots+nt^n)$;

г) $\dfrac{1}{n(n-1)}\Big(2(1+t+\ldots+t^n) - (n+1)(1+t)\Big)$.

51.16. 5. **51.17.** а) $\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sqrt{n}$; в) $\dfrac{3(n+2)(n-1)}{\sqrt{6n(n+1)(2n+1)}}$.

51.18. а) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; б) $n-1$; в) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(n-1)$. **51.20.** 2.

51.21. 2. **51.22.** 150. **51.23.** 5. **51.24.** 5.

51.25. Указание. Ввести в пространстве скалярное произведение так, чтобы заданный базис стал ортонормированным.

51.26. См. указание к предыдущей задаче.

51.27. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис направляющего подпространства многообразия H. Линейно независимую систему $e_1, \ldots, e_k, x$ дополнить до базиса всего пространства и ввести скалярное произведение так, чтобы этот базис стал ортонормированным.

51.28. $\pi/4$.

§52

52.2. Всякий оператор состоит в возведении чисел в степень с фиксированным (для данного оператора) действительным показателем.

52.3. а,б) Да, если $a = \theta$; в) да. **52.4.** а,б,г,д) Да; в) нет.

52.5. а) Ортогональное проектирование на прямую $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$; б) проектирование на прямую $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$ параллельно подпространству $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; в) ортогональное проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; г) проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$; д) ортогональное отражение относительно подпространства $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; е) ортогональное отражение относительно прямой $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$; ж) суперпозиция ортогонального проектирования на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ и поворота на угол $\pi/2$ вокруг прямой $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$.

52.6. а,в,д,ж) Да; б,г,е,з) нет.

52.7. а-д,з,и,к,м) Да; е,ж,л) нет. **52.11.** а-л) Да.

52.12. а,б) Да, в пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$; в,г) да, в пространство $\mathbb{R}$; д,е,ж) нет; з) да, в пространство $\mathbb{R}^{n\times m}$; и) да, в пространство $\mathbb{R}^{n\times n}$; к) да, в пространство $\mathbb{R}^{nm\times nk}$.

52.13. а) Не является ни сюръективным, ни иньективным; б,в) является биективным.

52.14. В случае, если $f_1, \ldots, f_k$ – базис V.

52.15. Пусть $f_1, \ldots, f_r$ – база системы $f_1, \ldots, f_k$. Тогда векторы $f_{k+1}, \ldots, f_k$ должны быть такими же линейными комбинациями векторов $f_1, \ldots, f_r$, как $g_{r+1}, \ldots, g_k$ – векторов $g_1, \ldots, g_r$.

52.16. Указание. Использовать задачу 52.14.

52.19. а) Да, если $\alpha = 0$; б,д,е) да; в,г) нет.

52.21. Линейную форму φ в пространстве M_n можно задать таким образом тогда и только тогда, когда для чисел $c_k = \varphi(t^k)$ выполнены соотношения: $c_0 = 1$, $\dfrac{c_k}{c_{k-1}} \equiv q$, $k = \overline{1,n}$.

52.22. Линейную форму φ в пространстве M_n можно задать таким образом тогда и только тогда, когда для чисел $c_k = (k+1)\varphi(t^k)$ выполнены соотношения: $c_0 \neq 0$, $c_k = \left(\dfrac{c_1}{2c_0} - \dfrac{c_0}{2}\right)^{k+1} - \left(\dfrac{c_1}{2c_0} + \dfrac{c_0}{2}\right)^{k+1}$, $k = \overline{2,n}$.

52.23. Нет, если эта форма не равна тождественно нулю.

52.24. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

52.25. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

52.26. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

52.27. а) $A_e = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A_f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

52.28. а) $A_e = \begin{bmatrix} -2 & 11/3 & 5/3 \\ -4 & 13/3 & 10/3 \\ 2 & -5/3 & -5/3 \end{bmatrix}$; б) $A_f = \begin{bmatrix} -10/3 & -7 & 3 \\ 5/3 & 3 & -2 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

52.29. а) $A_e = \begin{bmatrix} 5 & -20 & 33 \\ 7 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A_f = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -7 \\ 6 & 13 & -10 \\ 17 & 36 & -27 \end{bmatrix}$.

52.30. $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **52.31.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **52.32.** $\begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$.

52.33. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. **52.34.** $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$.

52.35. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 12 & -4 \\ 2 & -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$. **52.36.** $\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$.

52.37. $\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$. **52.38.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$.

52.39. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

52.40. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\cdot 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

52.41. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & h & h^2 & \dots & h^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & 3ht & \dots & C_n^1 h^{n-2} t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 & \dots & C_n^2 h^{n-3} t^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^{n-1} t^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

52.42. $\mathrm{diag}(1, 1/2, 1/3, \dots, 1/(n+1))$.

52.43. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots & (n-1)a^{n-2} & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3a & \dots & C_{n-1}^3 a^{n-4} & C_n^3 a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^5 a^{n-6} & C_n^5 a^{n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

где $\alpha_n = 1$, если n нечетно, и $\alpha_n = 0$, если n четно.

52.44. $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/n \end{bmatrix}$.

52.45. а) Первые k элементов главной диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0; б) последние $n-k$ элементов главной диагонали равны 1, все остальные элементы равны 0; в) матрица диагональная, первые k элементов ее главной диагонали равны 1, остальные равны -1.

52.46. $A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$.

52.47. Введем для любых двух векторов $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ матрицу $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\ x_2\ x_3)^T (y_1\ y_2\ y_3)$. Тогда матрица A_e имеет вид: а) $I - S(\mathbf{n}, \mathbf{n})$; б) $S(\mathbf{a}, \mathbf{a})$; в) $I - \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{n}, \mathbf{a})$; г) $\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{n}, \mathbf{a})$; д) $I - 2S(\mathbf{n}, \mathbf{n})$; е) $2S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - I$; ж) $I - \frac{2}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{n}, \mathbf{a})$; з) $\frac{2}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} S(\mathbf{n}, \mathbf{a}) - I$.

Указание. Использовать результат задачи 52.5.

52.48. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.49. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -6 & -9 & -3 \\ 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.50. а) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.51. а) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Указание. Использовать результат задачи 52.47.

52.52. а) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

52.53. а) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$.

52.54. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} a_{11} B^T & a_{12} B^T \\ a_{21} B^T & a_{22} B^T \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} a_{11} I + B^T & a_{12} I \\ a_{21} I & a_{22} I + B^T \end{bmatrix}$.

52.55. а) $B^T \otimes A$; б) $I_n \otimes A + B^T \otimes I_m$.

52.56. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **52.57.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

52.58. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **52.59.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

§53

53.1. а) В матрице переставятся i-я и j-я строки и i-й и j-й столбцы; б) в матрице i-й столбец умножится на число α, а i-я строка разделится на число α.

53.3. В базисе $e_n, \dots, e_1$.

53.4. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

53.5. $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$. **53.6.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

53.7. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -16 & 4 & -12 \\ 24 & -6 & 18 \end{bmatrix}$.

53.8. а) $\begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Указание. Сначала выписать матрицу оператора в базисе из направляющих векторов данных прямых.

53.9. а) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

г) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{bmatrix}$ и $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Указание. Сначала построить матрицу оператора в базисе, составленном из базисов данных подпространств.

53.10. а) $A_e = GF^{-1}$; б) $A_f = F^{-1}G$; в) $A_f = F^{-1}G$.

53.11. а) BA^{-1}; б) B; в) I.

53.12. 1) а) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$;

2) а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$; б) $\mathrm{diag}(0, 1, 1)$;

3) а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

4) а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 9 & 13 & 15 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

53.13. 1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$;

9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 10) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

53.14. 1) $\begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\mathrm{diag}(-1, 1+i, 1-i)$; 3) $\mathrm{diag}(2, 2, -2, 2i)$;

4) $\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

53.15. 1) $\begin{bmatrix} 36 & -25 & -3 \\ 23 & -16 & -2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -42 & -18 & -20 & 48 \\ 15 & 7 & 7 & -17 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$;

4) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -15 & 9 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 25 & -31 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

53.16. 1) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 3,7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$;

4,5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ порядка $n+1$; 6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

53.17. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{bmatrix}$.

53.18. а,б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

53.19. а) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

53.21. Нет.

53.22. У к а з а н и е. Показать, что квадратная матрица A перестановочна с любой невырожденной матрицей тогда и только тогда, когда A скалярна.

53.26. Нет, неверно. **53.28.** Нет, неверно.

53.31. Нет, не означает.

§54

54.1. Последние $n-r$ столбцов матрицы нулевые, в то время как первые r линейно независимы.

54.2. Последние $n-r$ столбцов матрицы нулевые, в то время как первые r линейно независимы.

54.3. а) Образ – плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, ядро – прямая $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$; б) если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, то образ – прямая $[\mathbf{x}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$, а ядро – плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$; если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, то образ – плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, а ядро – прямая $[\mathbf{x}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

54.4. $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 1$, базис образа – $(1, 1, 1)$; $\operatorname{def} \mathcal{A} = 2$, базис ядра – $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$.

54.5. $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 2$, базис образа – $(2, 1, 1)$, $(-1, -2, 1)$; $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$, базис ядра – $(1, 1, 1)$.

54.6. $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 3$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$.

54.7. $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 2$, базис образа – $(2, 1, 2)$, $(1, 8, 1)$; $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$, базис ядра – $(0, 1, 1)$.

54.8. $\operatorname{rg} \mathcal{A} = 2$, базис образа – $(1, 2, 0)$, $(-3, 0, 2)$; $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$, базис ядра – $(2, 1, -3)$.

54.9. 1) $(0, 6, 18)$; 2) $(0, 0, 0, 0)$; 3) $(-8, -11, 3, 0, -13)$.

54.10. В базисе e координатные столбцы базисных векторов: 1) ядра – $(12, -5)^T$, образа – $(5, 12)^T$; 2) ядра – $(1, 1, -1)^T$, $(3, 0, 2)^T$, образа – $(1, 1, -1)^T$; 3) ядра – $(1, -, 1, 1)^T$, образа – $(1, 1, 0)^T$, $(0, 1, -1)^T$; 4) ядра – $(0, 1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, образа – $(1, 1, -3, -3)^T$, $(1, -1, -1, 1)^T$; 5,6) $\ker \mathcal{A} = \{\theta\}$, $\operatorname{im} \mathcal{A} = V$, $\mathcal{A}$ – изоморфизм.

54.11. В соответствующих базисах e или f координатные столбцы базисных векторов: 1) ядра – $(0, 2, 0, 1)^T$, $(0, -3, 1, 0)^T$, образа – $(0, 1, 0)^T$, $(1, 0, -2)^T$; 2) образа – $(4, 3, -1, 7)^T$, $(5, 2, 3, 7)^T$, $(9, 7, 2, 6)^T$, $\ker \mathcal{A} = \{\theta\}$, $\mathcal{A}$ инъективно; 3) ядра – $(3, 1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$, образа – $(-2, 1, 7, -3)^T$; 4) ядра – $(2, 0, 1, -1, 0)^T$, $(0, 1, 2, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0, 1)^T$, $\operatorname{im} \mathcal{A} = W$, $\mathcal{A}$ сюръективно; 5) ядра – $(0, 1, 1)^T$, образа – $(-2, -2, -3, 4, 6)^T$, $(2, 2, 2, 1, -5)^T$; 6) ядра – $(-23, 1, 0, -3, 6)^T$, $(-42, 0, 1, 5, 10)^T$, $\operatorname{im} \mathcal{A} = W$, $\mathcal{A}$ сюръективно.

54.12. $\operatorname{rg} \mathcal{F} = 2$.

54.13. У к а з а н и е. См. пример 54.4.

54.14. У к а з а н и е. Составить матрицу оператора $\mathcal{G}$ в естественном базисе пространства $\mathbb{R}^{n \times n}$.

54.15. См. указание к задаче 54.14.

54.16. См. указание к задаче 54.14.

54.17. Образ – M_{n-1}, ядро – M_0.

54.18. Образ – M_{n-1}, ядро – M_0.

54.19. $n + 1 - k$, если $k < n + 1$, и 0, если $k \geq n + 1$.

54.20. Образ – все четные многочлены из M_n, ядро – линейная оболочка, натянутая на многочлены $(t - a)^{2k}$, $0 \leq 2k \leq n$.

54.21. n, если f нулевой, $n - 1$, если f ненулевой.

54.22. Двумерное подпространство векторов, ортогональных $\mathbf{a}$; двумерное подпространство векторов, компланарных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

54.23. У к а з а н и е. Использовать результат задачи 45.47 для ядер функционалов.

54.24. У к а з а н и е. Использовать результат задачи 45.46 для ядер функционалов.

54.27. 1) $(0, 0, 1/10, 1/5) + \alpha_1(10, 0, -7, 6) + \alpha_2(0, 5, -1, -7)$; 2) $(7/2, 0, -1/2, 0, 0) + \alpha_1(19, 2, -5, 0, 0) + \alpha_2(41, 0, -11, 2, 0) + \alpha_3(1, 0, -2, 0, 1)$; 3) $(0, 0, 1) + \alpha_1(1, -2, -3)$; 4) $(0, 1, 0, 0) + \alpha_1(2, 2, 1, -1)$ (здесь $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, произвольны).

54.28. Линейная оболочка, натянутая на векторы:
1) $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 0, 0)$, $(2, 0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 1)$;
2) $(1, 1, -1, -1)$, $(0, 2, 1, 0)$, $(7, 23, 0, -11)$;
3) $(0, 3, -1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0, 0)$, $(0, 4, 0, 0, 0, -1)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

54.29. Все четные многочлены.

54.30. 1) Базис образа – $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, базис ядра – $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; 2) образ – все пространство $\mathbb{R}^{2\times 2}$, базис ядра – $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

54.31. Ядро состоит из матриц, у которых первые $n - 1$ столбцов нулевые, образ – все пространство $\mathbb{R}^{m\times(n-1)}$.

54.32. 2) Ядро натянуто на вектор $(1, -2, 1, -2)$, образ – все матрицы из $\mathbb{R}^{2\times 2}$ вида $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$.

54.33. У к а з а н и е. Каждому вектору из $\operatorname{im} \mathcal{A}$ поставить в соответствие линейное многообразие его прообразов.

54.34. Ядро – $\ker \mathcal{A}$, дефект равен нулю.

54.36. У к а з а н и е. Построить базис так, чтобы $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = \ldots = f(e_n) = 0$.

54.41. 1) $(1, 0)$, $(-1, 1)$ и $(1, 1)$, $(0, 1)$; 2) $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 3)$, $(3, 10)$;
3) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, -1)$ и $(0, -1, -1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$;
4) $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -1, -1)$ и $(1, -1, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;
5) $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 2, 0, 0)$, $(2, 0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 1)$ и $(1, 1)$, $(2, -2)$;
6) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ и $(-2, -2, -3, 4, 6)$, $(2, 2, 2, 1, -5)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$.

§55

55.1. а) $\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -27 & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -30 & 27 \\ -35 & 31 \end{bmatrix}$.

55.2. $\begin{bmatrix} -5 & 14 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$. **55.3.** $\begin{bmatrix} 5 & -13 & -9 \\ 3 & -6 & -4 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

55.7. Нет, не является. У к а з а н и е. Рассмотреть случай $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

55.8. Нет, не является. У к а з а н и е. Рассмотреть случай $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

55.10. Нет, неверно.

55.12. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис V, и пусть $\mathcal{A}e_j = a_{1j}f_1 + \ldots + a_{mj}f_m$. Тогда положить $\mathcal{B}_i e_j = a_{ij} f_i$.

55.14. Указание. Множество всех операторов, отображающих n-мерное пространство в одномерное пространство, имеет размерность n.

55.16. Указание. Учесть, что $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$.

55.17. а-г) Нет.

55.18. а) Нет, если этот образ отличен от нулевого пространства; б) нет, если это ядро не совпадает со всем пространством V.

55.19. kn. **55.20.** $m(n-l)$.

55.21. Указание. а) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – некоторый базис V. Для данного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, L)$ фиксируем какие-либо разложения векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ по подпространствам L_1 и L_2: $\mathcal{A}e_i = u_i + v_i$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}e_i = u_i$, $\mathcal{A}e_i = v_i$, $i = \overline{1, n}$.

55.22. Указание. Воспользоваться индукцией по k и результатом предыдущей задачи.

55.23. Указание. Использовать результат задачи 55.5, пункт б).

55.24. Указание. Доказать, что $\operatorname{im}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = V$.

55.27. Указание. Использовать тот факт, что матрицу оператора ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, и результат задачи 55.23.

55.28. Либо $\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{B}$, либо $\operatorname{im} \mathcal{A} = \operatorname{im} \mathcal{B}$.

55.29. Пусть в L все операторы имеют ранг не выше 1, и пусть $\mathcal{A} \in L$ – произвольный оператор ранга 1. Рассмотрим в L подмножество L_1 всех операторов $\mathcal{B}$, для которых $\ker \mathcal{B} \supset \ker \mathcal{A}$, и подмножество L_2 всех операторов $\mathcal{C}$, для которых $\operatorname{im} \mathcal{C} \subset \operatorname{im} \mathcal{A}$. Согласно 55.19 и 55.20 эти подмножество являются подпространствами L размерности не выше n. Поэтому $L_1 \neq L$, $L_2 \neq L$ и существует оператор $\mathcal{D} \in L$ такой, что $\mathcal{D} \notin L_1$, $\mathcal{D} \notin L_2$, т.е. $\operatorname{im} \mathcal{D} \neq \operatorname{im} \mathcal{A}$, $\ker \mathcal{D} \neq \ker \mathcal{A}$. Но тогда в силу задачи 55.21 $\operatorname{rg}(\mathcal{A} + \mathcal{D}) = 2$.

55.30. Нет (см. задачу 55.13).

55.31. Да. Указание. Показать, что если для ненулевых векторов x, y выполнено $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu y$, то $\lambda = \mu$.

55.32. Указание. Построить базис $e_1, \ldots, e_n$ в V так, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ образовывали базис $\ker \mathcal{A}$, и рассмотреть матрицу оператора в этом базисе.

55.33. Указание. Использовать предыдущую задачу.

55.34. Указание. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в V. Тогда вектор $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ принадлежит ядру функционала f_k тогда и только тогда, когда $\alpha_1 f_k(e_1) + \ldots + \alpha_n f_k(e_n) = 0$. Рассмотреть систему таких соотношений с $k = \overline{1, n}$.

55.35. Указание. Воспользоваться результатом задачи 55.34.

55.36. См. указание к задаче 55.35.

55.37. См. указание к задаче 55.35.

55.38. $\ker(\mathcal{I} - \mathcal{P}) = \operatorname{im} \mathcal{P}$, $\operatorname{im}(\mathcal{I} - \mathcal{P}) = \ker \mathcal{P}$.

§56

56.1. а) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ 51 & -11 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 27 & -25 \\ 31 & -28 \end{bmatrix}$.

56.2. $$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

56.3. а) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -4 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$.

56.4. а) $\mathcal{O}$; б) $\mathcal{O}$; в) $\begin{bmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

56.6. Нет, неверно.

56.9. Указание. Показать, что $\ker \mathcal{P} \cap \operatorname{im} \mathcal{P} = \{\theta\}$ и $\mathcal{P}(\operatorname{im} \mathcal{P}) = \operatorname{im} \mathcal{P}$.

56.10. Указание. а) Использовать задачу 56.9.

56.12. Матрица порядка $n+1$: $\begin{bmatrix} O & A \\ O & O \end{bmatrix}$, где A – единичная матрица порядка $n - k + 1$ при $k \leq n$, и нулевая матрица при $k > n$.

56.13. а) $(\mathcal{AD})(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_1 t + 2a_2 t^2 + \ldots + n a_n t^n$; б) $(\mathcal{DA})(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_0 + 2a_1 t + \ldots + (n+1) a_n t^n$; в) $[\mathcal{D}, \mathcal{A}] = \mathcal{I}$.

56.14. Указание. Доказать по индукции, используя результат задачи 56.13, пункт в).

56.15. Указание. Показать, что след матрицы коммутатора всегда равен нулю.

56.16. Пусть $\mathcal{A}$ невырожден. Тогда $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{AB} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{BA} = \mathcal{I}$. Но $\operatorname{tr}(\mathcal{B} - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{BA}) = 0$, а $\operatorname{tr} \mathcal{I} \neq 0$.

56.21. Указание. Использовать результат задачи 55.32.

56.23. Указание. Использовать результат задачи 56.9.

56.25. Указание. Использовать результат задачи 56.9.

56.26. Указание. Использовать результат задач 56.8 и 56.9.

56.27. Указание. Использовать результат задачи 56.9.

56.28. Указание. б)⇒а) Домножить равенство $\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_k = \mathcal{I}$ на $\mathcal{A}_i$ и воспользоваться результатом задачи 56.9. а)⇒в) Учесть, что в любом базисе e: $\operatorname{rg}(\mathcal{A}_i)_e = \operatorname{tr}(\mathcal{A}_i)_e$. в)⇒б) Показать, что $V = \operatorname{im} \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{im} \mathcal{A}_k$. Из равенства $\mathcal{A}_j x = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_j x + \ldots + \mathcal{A}_k \mathcal{A}_j x$ вывести, что $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\mathcal{A}_i^2 = \mathcal{A}_i$.

56.29. Указание. Использовать перестановочность оператора $\mathcal{A}$ с любым проектором.

56.30. Указание. Использовать результаты задач 55.31 и 56.29.

56.31. Указание. а) Перейти к матрицам операторов; б,в) применить теорему о ранге и дефекте.

56.32. Указание. а) Использовать соотношение $(\mathcal{BA})V = \mathcal{B}(\operatorname{im} \mathcal{A})$.

56.33. Указание. В силу пункта б) задачи 56.32 справедливо соотношение $\dim(\operatorname{im} \mathcal{A}^k \cap \ker \mathcal{A}) = \operatorname{def} \mathcal{A}^{k+1} - \operatorname{def} \mathcal{A}^k$.

56.34. Указание. Воспользоваться соотношением из пункта б) задачи 56.32.

56.35. Указание. Использовать соотношения: $\operatorname{rg}(\mathcal{BAC}) = \operatorname{rg}(\mathcal{AC}) - \dim(\operatorname{im} \mathcal{AC} \cap \ker \mathcal{B})$, $\operatorname{rg}(\mathcal{BA}) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}) - \dim(\operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B})$.

56.36. Указание. Если $\mathcal{A}^2 \neq \mathcal{O}$, то использовать результат задачи 55.31.

56.37. Указание. а) Использовать неравенство Фробениуса из задачи 56.35.

56.38. Указание. Перейти к матрицам операторов в некотором базисе пространства V.

56.39. Указание. Построить оператор $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ так, чтобы включение $\ker \mathcal{A} \subset \ker \mathcal{A}^2$ было строгим.

56.40. Указание. Воспользоваться результаты задач 56.39 и 56.34.

56.41. Указание. а) Для операторов $\mathcal{A} + \mathcal{I}$ и $\mathcal{A} - \mathcal{I}$ воспользоваться результатами задач 55.23 и 56.37, пункт б).

56.44. У к а з а н и е. Пусть $\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathcal{L}(e_1)$. Проанализировать матрицу оператора $\mathcal{AB}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

56.45. $n(n-r)$. **56.46.** $n(n-r)$.

56.47. У к а з а н и е. Учесть, что матрицы $\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ O & \lambda I \end{bmatrix}$, где A – произвольная матрица порядка m, перестановочны.

56.48. Ранг равен nr, дефект равен $n(n-r)$.

56.53. Оператор, ставящий в соответствие каждой функции ее единственную первообразную, принадлежащую данному пространству.

56.54. $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.

56.56. У к а з а н и е. Выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства так, чтобы векторы $e_2, \ldots, e_n$ образовывали базис $\ker \mathcal{A}$, и рассмотреть матрицы операторов $\mathcal{I} - \mathcal{A}$ и $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ в этом базисе.

56.57. У к а з а н и е. Использовать соотношение из пункта а) задачи 56.31.

56.62. У к а з а н и е. Пусть $\mathcal{F}$ вырожден, тогда существует ненулевая матрица A такая, что $\mathcal{F}A = O$. Положим $r = \operatorname{rg} A$, тогда $0 < r < n$ и существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$. В таком случае для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ выполнено: $|PAQ + X| \cdot |PQ|^{-1} = |A + P^{-1}XQ^{-1}| = |\mathcal{F}(A + P^{-1}XQ^{-1})| = |\mathcal{F}(P^{-1}XQ^{-1})| = |X| \cdot |PQ|^{-1}$, т.е. $|PAQ + X| = |X|$. Но это неверно, если, например, $X = \begin{bmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{bmatrix}$.

56.63. У к а з а н и е. Если $x \in \ker \mathcal{A}$ ненулевой, то $f(\mathcal{A})x \neq \theta$ вопреки условию, что $f(t)$ – аннулирующий многочлен.

56.64. У к а з а н и е. Учесть, что $\dim \mathcal{L}(V, V) = n^2$.

56.65. У к а з а н и е. Использовать результат предыдущей задачи.

56.67. Да, если $\dim V = \dim W$; нет, если $\dim W > \dim V$.

56.71. У к а з а н и е. Выбрать базисы e в V и f в W, образующие каноническую пару базисов для оператора $\mathcal{A}$.

56.72. У к а з а н и е. Использовать построение задачи 56.71.

56.73. У к а з а н и е. Использовать построение задачи 56.71.

56.74. У к а з а н и е. Использовать построение задачи 56.71.

56.76. а,б,в) Нет; д) нет при $d \neq 1$; г,е) да.

Ким Г. Д., Крицков Л. В.
АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:
Теоремы и задачи.
Том II (1)

ИКД "Зерцало-М"
Лицензия № 003601 от 20 ноября 2000 г.
Подписано в печать 28.01.2003.
Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 11,0.
Тираж 2000 экз. Заказ № 7470

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ППП "Типография "НАУКА"
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-94373-068-0

9 785943 730689