

费定晖
郭大钧

周学圣编演
邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析 习题集题解

山东科学技术出版社



Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(二)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(二)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东莒县印刷厂印刷

*

787mm×1092mm 32开本 17.75印张 384千字

1999年11月第2版第8次印刷

印数: 210 601—220 600

ISBN 7—5331—0100—6

0·6 定价: 15.10元

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (2)/费定
晖编.—2版—济南:山东科学技术出版社, 1999.9
ISBN 7-5331-0100-6

I. Б… II. 费… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. 0
17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43961 号

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。

如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目 录

第二章 单变量函数的微分学	1
§ 1. 显函数的导函数	1
§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数	111
§ 3. 导函数的几何意义	123
§ 4. 函数的微分	143
§ 5. 高阶的导函数和微分	158
§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理	228
§ 7. 函数的增大与减小. 不等式	260
§ 8. 凹凸性. 拐点	290
§ 9. 未定形的求值法	307
§ 10. 台劳公式	336
§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值	363
§ 12. 依据函数的特征点作函数图形	401
§ 13. 函数的极大值与极小值问题	500
§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线	525
§ 15. 方程的近似解法	541

第二章 单变量函数的微分学

§ 1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

有意义, 则称为导函数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数.

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) (图 2.1).

2° 求导函数的基本法则 若 c 为常数且函数 $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ 都有导函数, 则

$$(1) c' = 0; (2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w';$$

$$(4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

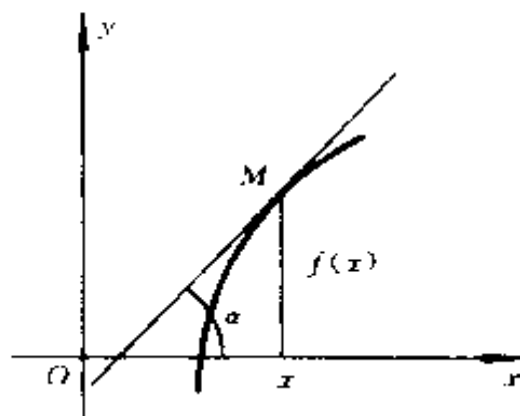


图 2.1

3° 基本公式 若 x 为自变数^{*}, 则

$$I. (x^n)' = nx^{n-1} (n \text{ 为常数});$$

$$II. (\sin x)' = \cos x; \quad III. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$IV. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad V. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$VI. (\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$VII. (\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$VIII. (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$IX. (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$X. (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \quad (e^x)' = e^x;$$

$$XI. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$XII. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad XIII. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$XIV. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad XV. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧的导函数 表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中, 一些明显的定义域要求, 例如本节公式 V 中要求 $x \neq k\pi$ (k 整数), VI 中要求 $|x| < 1$ 等等, 以及例如尔后 § 5 中相应的限制, 一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数 若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下, 函数 $y = f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999;$

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009;$

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设:

(a) $y = ax + b$; (b) $y = ax^2 + bx + c$; (c) $y = a^x$.

若变量 x 得到增量 Δx , 求增量 Δy .

解 (a) $\Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x;$

$$(b) \Delta y = [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c]$$

$$- [ax^2 + bx + c]$$

$$= (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2;$$

$$(c) \Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

824. 证明:

$$(a)\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b)\Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

证 (a) $\Delta[f(x) + g(x)]$
 $= [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]$
 $= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]$
 $= \Delta f(x) + \Delta g(x),$

于是,

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b)\Delta[f(x)g(x)] \\ = [f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)] - [f(x)g(x)] \\ = [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) \\ + [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x) \\ = \Delta f(x)g(x + \Delta x) + \Delta g(x)f(x),$$

于是,

$$\Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

同样,我们还可将(b)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x + \Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y = x^2$ 上的二点 $A(2, 4)$ 和 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ 引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设:

(a) $\Delta x = 1$; (b) $\Delta x = 0.1$; (c) $\Delta x = 0.01$;

(d) Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$,

(a) $k_{AA'} = 5$; (b) $k_{AA'} = 4.1$;

(c) $k_{AA'} = 4.01$; (d) $k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 设:

(a) $h = 0.1$; (b) $h = 0.01$; (c) $h = 0.001$, 计算此系数的值.

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么?

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \frac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$,

(a) $\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$;

(b) $\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$;

(c) $\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是,

$$l|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间, x 为以米计的距离. 求在 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设: (a) $\Delta t = 1$; (б) $\Delta t = 0.1$; (в) $\Delta t = 0.01$, 计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么?

解 平均速度 $\bar{v} = \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t$

$$= 210 + 5\Delta t (\text{米/秒}),$$

$$(a) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 (\text{米/秒});$$

$$(б) \bar{v} = 210.5 (\text{米/秒});$$

$$(в) \bar{v} = 210.05 (\text{米/秒}).$$

于是,

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 (\text{米/秒}).$$

828. 根据导函数的定义, 直接求下列函数的导函数:

$$(a) x^2; (б) x^3; (в) \frac{1}{x}; (г) \sqrt{x}; (д) \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \operatorname{tg} x; (ж) \operatorname{ctg} x; (з) \operatorname{arc} \sin x; (и) \operatorname{arc} \cos x;$$

$$(к) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

解 (a) $y = x^2,$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

(6) $y = x^3,$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

(B) $y = \frac{1}{x},$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(\Delta x + x)} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

(r) $y = \sqrt{x},$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

$$(d) y = \sqrt[3]{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).$$

$$(e) y = \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}$$

$$= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(к) y = \operatorname{ctg} x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \Delta x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta x} \\ &= \frac{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\Delta x (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)} \\ &= -\frac{\operatorname{csc}^2 x}{\Delta x (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{csc}^2 x}{\Delta x (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)} \\ &= -\operatorname{csc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$(з) y = \arcsin x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x + \Delta x)^2} x]}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x + \Delta x)^2}]}{(x + \Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x + \Delta x)^2}} \\ &= \frac{\arcsin t}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin t}{t} \\
& \cdot \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\
& \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$;

(ii) $y = \arcsin x$,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin[(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{\Delta x} \\
&= \frac{\arcsin t}{t} \\
& \cdot \frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2x + \Delta x)}{(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

(κ) $y = \arcsin \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \arcsin \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{1}{1+x(x+\Delta x)} \right\} = \frac{1}{1+x^2},$$

其中利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$.

829. 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 \\ &\quad + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\ &\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9). \end{aligned}$$

于是,

$$f'(1) = -8; f'(2) = f'(3) = 0.$$

830. 设:

$$f(x) = x^2 \sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

$$\text{解 } f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2).$$

于是,

$$f'(2) = 4.$$

831. 设:

$$f(x) = x + (x-1) \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

解 方法一:

若用复合函数求导法,可得

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是,

$$f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

方法二:

若按定义作,注意到当 $x = 1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}},$$

即得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}} \right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微分,求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

解 设 $\Delta x = x - a$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$. 于是,

$$\begin{aligned} \text{得} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a). \end{aligned}$$

833. 证明:若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之,若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在,则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x). \end{aligned}$$

反之,就不一定对了.例如,对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

在任一有理点是不连续的,当然其导数也不存在.但由于 $x + \frac{1}{n}$ 仍为有理数,故当 x 为有理数时,

$$\chi \left(x + \frac{1}{n} \right) - \chi(x) = 1 - 1 = 0,$$

从而,极限(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\chi \left(x + \frac{1}{n} \right) - \chi(x) \right] = 0$$

存在.

利用导函数表,求下列函数的导函数:

834. $y = 2 + x - x^2$. 问 $y'(0)$; $y' \left(\frac{1}{2} \right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于甚么?

解 由于 $y'(x) = 1 - 2x$, 故得

$$y'(0) = 1; y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; y'(1) = -1;$$

$$y'(-10) = 21.$$

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时:

(a) $y'(x) = 0$; (b) $y'(x) = -2$; (c) $y'(x) = 10$?

解 $y'(x) = x^2 + x - 2$.

(a) 令 $y'(x) = 0$, 得 $x^2 + x - 2 = 0$. 于是, $x = -2$ 或 $x = 1$;

(b) 令 $y'(x) = -2$, 得 $x^2 + x = 0$. 于是, $x = -1$ 或 $x = 0$;

(c) 令 $y'(x) = 10$; 得 $x^2 + x - 12 = 0$. 于是, $x = -4$ 或 $x = 3$.

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

解 $y' = 10a^3x - 5x^4$.

837. $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

解 $y' = \frac{a}{a + b}$.

838. $y = (x - a)(x - b)$.

解 $y' = x - a + x - b = 2x - a - b$.

839. $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$.

解 $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3$
 $+ 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3) \\
&\quad + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)] \\
&= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).
\end{aligned}$$

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha)$
 $+ \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha)$
 $= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

解 $y' = mnx^{m-1}(1 + mx^n) + mnx^{n-1}(1 + nx^m)$
 $= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3$
 $- 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$
 $- 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$
 $= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x$
 $+ 15x^2 + 14x^3)$
 $= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x$
 $+ 7x^2)(1+x+x^2)^2$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) (x \neq 0)$.

844. 证明公式

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

$$= \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数之导函数:

845. $y = \frac{2x}{1-x^2}$

解 $y' = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2}$
 $= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} (|x| \neq 1)$

846. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

解 由于 $y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1$, 故

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

847. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}$$

$$= \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}, (|x| \neq 1).$$

$$848. y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}.$$

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^3(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1).$$

$$849. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}$$

$$= \frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$$

$(x \neq -1).$

$$850. y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

解

$$y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]$$

$(x \neq -1).$

$$851. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{解 } y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0).$$

$$852. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right) (x > 0).$

853. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$

解 $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} (x > 0).$

854. $y = x\sqrt{1+x^2}.$

解 $y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$

855. $y = (1+x) \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}.$

解 $y' = \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}$
 $+ (1+x) \left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} \right.$
 $\left. + \frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \right]$
 $= \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$
 $(x \neq \sqrt[3]{-3}).$

856. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}.$

解 $y' = \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n)\sqrt[m+n]{[(1-x)^m(1+x)^n]^{m+n-1}}}$
 $= \frac{(n-m) - (n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}} (|x| \neq 1).$

857. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} (|x| < |a|). \end{aligned}$$

$$858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \\ &= \frac{3x^2(1-x^3) + 3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} \\ &= \frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

$$859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{(1+x^2)(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &\quad \left[\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2x \right] \\ &= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$$860. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \\ &= \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \\ & \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$861. y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1 + \sqrt[3]{x})^2} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}\right)^2}} \\ & \quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8). \end{aligned}$$

$$862. y = \cos 2x - 2\sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -2\sin 2x - 2\cos x \\ &= -2\cos x(1 + 2\sin x). \end{aligned}$$

$$863. y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -2x\cos x - (2 - x^2)\sin x + 2\sin x \\ & \quad + 2x\cos x \\ &= x^2\sin x. \end{aligned}$$

$$864. y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x).$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -2\sin x \cos x \cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad - 2\sin x \cos x \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x) \\
&= -\sin 2x [\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)] \\
&= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= -\sin 2x \cos(\cos 2x).
\end{aligned}$$

$$865. y = \sin^n x \cos nx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= n\sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n\sin^n x \sin nx \\
&= n\sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) \\
&= n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x.
\end{aligned}$$

$$866. y = \sin(\sin(\sin x)).$$

$$\text{解 } y' = \cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)].$$

$$867. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{2\sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^4 x^2} \\
&\quad (x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$868. y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{-2\sin^3 x - 4\sin x \cos^2 x}{4\sin^4 x} \\
&= -\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x} (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$869. y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x) \\ &= \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$870. y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{(\cos x + x\sin x)^2} [(x\sin x - \cos x \\ &\quad + \cos x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \sin x \\ &\quad + x\cos x)(\sin x - x\cos x)] \\ &= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2} \end{aligned}$$

$$871. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\csc^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{2}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$872. y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^6 x \\ &\quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$873. y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^6 x}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{8}{3}(\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x) \\ &\quad + \frac{8}{3}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x) \\ &= -\frac{8}{3\sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \end{aligned}$$

$$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$874. y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{2}{a} \sec^2 \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{2}{a} \csc^2 \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos^3 \frac{x}{a}} - \frac{\cos \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a}} \right) \\ &= \frac{2}{a} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{a} - \cos^4 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}} \\ &= \frac{16 \left(\sin^2 \frac{x}{a} - \cos^2 \frac{x}{a} \right)}{a \left(2 \sin \frac{x}{a} \cos \frac{x}{a} \right)^3} = \frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \\ &(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$875. y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)].$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \\ &\quad \cdot \{-2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\sin(\operatorname{tg}^3 x)\} \\ &\quad \cdot [3\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x] \\ &= -3\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2\operatorname{tg}^3 x) \\ &\quad \cdot \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \\ &(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$876. y = e^{-x^2}.$$

解 $y' = -2xe^{-x^2}$.

877. $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \quad (x \neq 0)$.

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

解 $y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$.

879. $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}$.

解 $y' = -e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right]$
 $+ e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \cos x - x \sin x \right]$
 $+ \frac{(1+x)^2}{2} \sin x - (1+x) \cos x$
 $= x^2 e^{-x} \sin x$.

880. $y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)$.

解 $y' = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} e^x \operatorname{csc}^2 \frac{x}{2}$
 $= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi; k \text{ 为整数})$.

881. $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$.

解

$$y' = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x) - 3^x \ln 3 (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)}{3^{2x}}$$

$$= -\frac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}$$

$$882. y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} [a(a \sin bx - b \cos bx) \\ &\quad + (ab \cos bx + b^2 \sin bx)] \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

$$883. y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$$

$$\text{解 } y' = e^x [1 + e^{e^x} (1 + e^{e^{e^x}})].$$

$$884. y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$$

解 两边取对数,得

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两端同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$885. y = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

$$\text{解 } y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x \cdot a^{a^x} \ln^2 a.$$

$$886. y = \lg^3 x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 3 \lg^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} 2x \lg e \\ &= \frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2 \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

或按 $y = (\lg e \cdot \ln x^2)^3 = 8 \lg^3 e \cdot \ln^3 |x|$ 求导数, 有

$$y' = 24 \lg^3 e \cdot \left(\frac{1}{x} \ln^2 |x| \right)' (x \neq 0).$$

*) $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$, 以后不再说明.

887. $y = \ln[\ln(\ln x)].$

解 $y' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} (x > e),$

888. $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)].$

解 $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x}$
 $\quad \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$
 $\quad = \frac{6}{x \ln x \cdot \ln(\ln^3 x)} (x > e).$

889. $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x)^2}$
 $\quad = \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} (x > -1).$

890. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

解 $y' = \frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]'$
 $\quad = \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^4-1} (|x| > 1).$

891. $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

$$\text{解 } y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^4),$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 \\ &= \frac{1}{x(1+x^4)^2} (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$892. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{2\sqrt{6}} [\ln|x\sqrt{3} - \sqrt{2}| - \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{2}|]$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 2} \left(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \right). \end{aligned}$$

$$893. y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$$

$$(0 < k < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \right) \\ &= \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$894. y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{2(1 + \sqrt{x+1})} (x > -1).$$

895. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

解 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

896. $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$

解 $y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $- \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 $= \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

*) 利用 895 题的结果,下同,不再说明.

897. $y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$

解 $y' = \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$
 $+ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- 2 \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$
 $= \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}).$

898. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2 \sqrt{x^2 + a^2}} \\ &+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + a^2}. \end{aligned}$$

$$899. y = \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x \sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \right) \\ &= \frac{1}{a - bx^2} \left(|x| < \sqrt{\frac{a}{b}} \right). \end{aligned}$$

$$900. y = \frac{2 + 3x^2}{x^4} \sqrt{1 - x^2} + 3 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{6x^5 - 4x^3(2 + 3x^2)}{x^8} \sqrt{1 - x^2} \\ &- \frac{x(2 + 3x^2)}{x^4 \sqrt{1 - x^2}} + \frac{3}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ &\cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) - \frac{3}{x} \\ &= -\frac{8}{x^5 \sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$901. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi, k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$902. y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\left(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

$$903. y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{csc}^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -\operatorname{ctg}^3 x \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$904. y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}\right). \end{aligned}$$

$$905. y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{2\sin^4 x} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$$

$$906. y = \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x} (0 \leq |a| < |b|).$$

解 当 $a = 0$ 时, $y = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$. 由于 $1 + \sin x$ 非负, 为使对数有意义, 必须有

$$\begin{cases} 1 + \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当 $(2k - \frac{1}{2})\pi < x < (2k + \frac{1}{2})\pi$ (k 为整数) 时, 上述不等式成立. 在此域内, 得

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

当 $a \neq 0$ 时, 记 $y = \ln u(x)$, 而

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\sin x}{\frac{a}{b} + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos\varphi_0\cos x + \sin\varphi_0\sin x}{\cos\varphi_0 + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos\varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x) \geq 0$. 为保证 y 可导, 首先必须有 $u(x) > 0$, 故应有 $v_1(x) \neq 0$ (从而 $v_1(x) > 0$), 进而应有 $v_2(x) > 0$. 于是, y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值, 记成

$$R = \{x | v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\},$$

则

$$R = \{x | \cos x + \cos \varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0; \\ k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin(x-\varphi_0)}{1+\cos(x-\varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\sin x \cos \varphi_0 + \cos x \sin \varphi_0}{1 + \cos x \cos \varphi_0 + \sin x \sin \varphi_0} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\frac{a}{b} \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}}{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}, \end{aligned}$$

其实此结果也包含了 $a = 0$ 时的情形.

907. $y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) \\
 &\quad + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right) \\
 &= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

$$908. y = \frac{1}{4x^4}\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^5}\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} \\
 &= \frac{1}{x^5}\ln x \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

$$909. y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{3}{2} \cdot 2(1 - \sqrt[3]{1+x^2}) \left(-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right) \\
 &\quad + \frac{3}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \\
 &= \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$910. y = \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)} \left[-\frac{1}{x^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$= - \frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}}{\left(1 + x \ln \frac{1}{x}\right) \left[1 + x \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right]} \quad (x > 0).$$

911. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$

解 $y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$
 $+ x \left[\frac{1}{x} \cos(\ln x) + \frac{1}{x} \sin(\ln x) \right]$
 $= 2 \sin(\ln x) \quad (x > 0).$

912⁺. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x.$

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$
 $- \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$
 $= \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \quad (0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

913. $y = \arcsin \frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (|x| < 2).$

914. $y = \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}).$$

915. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2}{a}.$

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2 + x^4} (a \neq 0).$

916. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$
 $= \frac{1}{x^2 + 2} \quad (x \neq 0).$

917. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}.$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
 $= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0).$

918. $y = x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \cos x.$

解 $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \cos x$
 $- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$
 $= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \cos x (|x| < 1).$

919. $y = x \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0).
 \end{aligned}$$

$$920. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).
 \end{aligned}$$

$$921. y = \arcsin(\sin x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x) \\
 &\quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).
 \end{aligned}$$

$$922. y = \arccos(\cos^2 x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}} \\
 &= \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi; k \text{ 为整数}).
 \end{aligned}$$

923. $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$.

解
$$y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

924. $y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.

解
$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

925. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

解
$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1).$$

926. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)$.

解

$$y' = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= 1 \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}).$$

$$927. y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{a + b \cos x}. \end{aligned}$$

$$928. y = \operatorname{arc\,sin} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} \\ &= -\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1 + x^2} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$929. y = \frac{1}{\operatorname{arc\,cos}^2(x^2)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{2}{\operatorname{arc\,cos}^3(x^2)} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{1 - x^4} \cdot \operatorname{arc\,cos}^3(x^2)} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$930. y = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(x^3).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{x^2}{1 + x^6} = \frac{1 + x^4}{1 + x^6}.$$

$$931. y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \operatorname{arc\,tg}(\sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - 2\cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x) \\ &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \\ &= -2\cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x). \end{aligned}$$

$$932. y = \ln \left(\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x} - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1). \end{aligned}$$

$$933. y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b \left(1 + \frac{x^2}{b^2} \right)} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(x+a)(b^2 + x^2)} \quad (x > -a). \end{aligned}$$

$$934. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

$$935. y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{1+x^3} \quad (x \neq -1).
 \end{aligned}$$

$$936. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}\right)^2} \\
 &\quad \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2 - 1) - 2x^2\sqrt{2}}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{1}{1+x^4} \quad (|x| \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$937. \quad y = x(\operatorname{arc} \sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x - 2x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= (\operatorname{arc} \sin x)^2 + \frac{2x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad - \frac{2x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 2 \\
 &= (\operatorname{arc} \sin x)^2 \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$938. \quad y = \frac{\operatorname{arc} \cos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= -\frac{\arccos x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$939. y = \arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1 + (x^2 - 1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &+ \frac{x \ln x}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1).
 \end{aligned}$$

$$940. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) \\
 &= \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$941. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{12} \left(\frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}\right)^2} \left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2 - 1)^2} \right] \\
&= \frac{x^5}{1 + x^6} \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

942. $y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x^6.$

解 $y' = \frac{6x^5(1 + x^{12}) - 12x^{17}}{(1 + x^{12})^2} + \frac{6x^5}{1 + x^{12}}$

$$= \frac{12x^5}{(1 + x^{12})^2}.$$

943⁺. $y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

解 $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot (1 - \sqrt[3]{x})}$

$$- \frac{1}{2(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right)$$

$$+ \sqrt{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{(1 - x)\sqrt[3]{x}} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0).$$

944. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)^2}$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1 + \sqrt{1-x^2})^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

945. $y = \text{arc ctg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$

解 $y' = -\frac{1}{1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2} - \frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0 < x < a).$$

946. $y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2\text{arc sin} \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} - \frac{3-x}{2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1| < \sqrt{2}).$$

947. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解 $y' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} + x} \cdot \left[1 + \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \right] \right.$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} - 1 \right) \Bigg| \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right)^2} \\
& \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} - \sqrt[4]{1+x^4} \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (x \neq 0).
\end{aligned}$$

948. $y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x)$.

解 $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2\operatorname{tg} x \sec^2 x$

$$= \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$$

949. $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$$+ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

解 $y' = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \left(- \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$- \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

($0 < |x| < 1$).

950. $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2.$

解 $y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$
 $- \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$
 $= \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$

951. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right)$
 $= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

952. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$
 $= \frac{1}{2(1+x^2)}.$

953. $y = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right).$

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \alpha \cos x (1 - \cos \alpha \cos x) - \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 x}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2} \\
&= \frac{1 - \cos \alpha \cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos \alpha)^2}} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot (\cos x - \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2} \\
&= \frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha \cos x}
\end{aligned}$$

($\cos x \neq \cos \alpha$, 即 $x \neq \alpha + 2k\pi$, k 为整数).

$$954. y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}} \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{3} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \sqrt{3} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2+2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
955. y &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{1+x^4}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} \\
& - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}} \right. \\
& \left. \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2} \right) \right\} \\
& = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1).
\end{aligned}$$

$$956. \quad y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[\left(\sqrt{1-x^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) (1+x^2) - 2x^2 \sqrt{1-x^2} \right] \\
& + \frac{3}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right)} \\
& \cdot \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
& = \frac{4}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

$$957^+ . y = \operatorname{arc} \cos(\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x^2 - \cos x^2)^2}} \\
 &\quad \cdot 2x(\cos x^2 + \sin x^2) \\
 &= -\frac{2x(\sin x^2 + \cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}} \\
 &\quad \left(0 < |x| < \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}; k = 0, 1, 2, \dots\right).
 \end{aligned}$$

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1 - \sin^2(x^2)}} + \frac{2x\sin(x^2)}{\sqrt{1 - \cos^2(x^2)}} \\
 &= 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)] \\
 &\quad \left(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}; k = 0, 1, 2, \dots\right).
 \end{aligned}$$

959. $y = e^{\operatorname{arcsin} x} [\cos(\operatorname{arcsin} x) + \sin(\operatorname{arcsin} x)]$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= e^{\operatorname{arcsin} x} \left\{ \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}} [\cos(m \operatorname{arcsin} x) \right. \\
 &\quad \left. + \sin(\operatorname{arcsin} x)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}} [\cos(m \operatorname{arcsin} x) \right. \\
 &\quad \left. - \sin(\operatorname{arcsin} x)] \right\} \\
 &= \frac{2m}{\sqrt{1 - x^2}} e^{\operatorname{arcsin} x} \cos(\operatorname{arcsin} x)
 \end{aligned}$$

$$(|x| < 1).$$

$$960. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) \\ &= \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^{x^x}(x^x \ln x)' \\ &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^x \cdot x^{x^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right). \end{aligned}$$

$$962. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} (a > 0, x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= x^{x^a} \left(ax^{a-1} \ln x + \frac{x^a}{x} \right) \\ &\quad + x^{a^x} \left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x} \right) \\ &\quad + a^{x^x} \cdot \ln a \cdot x^x (1 + \ln x) \\ &= x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) \\ &\quad + x^x \cdot a^{x^x} \ln a (1 + \ln x). \end{aligned}$$

$$963. y = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0).$$

$$\text{解 } y' = \left(e^{\frac{1}{x} \ln x} \right)' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] \\ &\quad + (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] \\ &= (\sin x)^{\cos x + 1} [\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)] \\ &\quad - (\cos x)^{\sin x + 1} [\operatorname{tg}^2 x - \ln(\cos x)] \\ &\quad \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right). \end{aligned}$$

$$965^{+*}. y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}. \\ y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \{ [x \ln(\ln x)]' - (\ln^2 x)' \} \\ &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right\} \\ &= \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x + 1}} \{ x \ln x \cdot \ln(\ln x) + x - 2 \ln^2 x \}. \end{aligned}$$

$$966. y = \lg_x e.$$

$$\text{解 由 } y = \lg_x e \quad \text{推得 } y = \frac{1}{\ln x}.$$

于是,

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{x} (\lg_x e)^2 (x > 0, x \neq 1).$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明,中译本基本是按俄文第二版翻译的.俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$967. y = \ln(\operatorname{ch}x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2x}.$$

$$\text{解 } y' = \operatorname{th}x - \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x} = \operatorname{th}^3x.$$

$$968. y = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x} - \ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\operatorname{sh}^3x - 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^4x} + \frac{1}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} \cdot \operatorname{cth}\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{2}{\operatorname{sh}^3x} (x > 0). \end{aligned}$$

$$969. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th}x).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2x} = \frac{1}{\operatorname{ch}2x}.$$

$$970. y = \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}} \left(-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 971. y &= \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th}\frac{x}{2}\right) \\ &\quad (0 \leq |b| < a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{b}{a} + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{th}^2\frac{x}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a(b + a\operatorname{ch}x)} = \frac{a + b\operatorname{ch}x}{b + a\operatorname{ch}x}. \end{aligned}$$

972. 引入中间变量 $u = \cos^2 x$ 求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

的导函数.

解 $u = \cos^2 x, y = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}),$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

而

$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^4 x}},$$

$$u'_x = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

于是,

$$y'_x = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导函数:

973⁺. $y = (\arccos x)^2 [\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}]$.

解 设 $u = \arccos x$, 则 $y = u^2 \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right)$.

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= 2u \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right) + u^2 \left(\frac{2 \ln u}{u} - \frac{1}{u} \right) \\ &= 2u \ln^2 u = 2 \arccos x \cdot \ln^2(\arccos x), \end{aligned}$$

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

于是,

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arccos x \\ &\quad \cdot \ln^2(\arccos x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$974^+. y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt[3]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[3]{1+x^4} + 1}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1}.$$

解 设 $u = \sqrt[3]{1+x^4}$, 则

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tgu} + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) \\ &= \frac{1}{1-u^4} = -\frac{1}{x^4}, \end{aligned}$$

$$u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[3]{(1+x^4)^3}},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{x \sqrt[3]{(1+x^4)^3}} \quad (x \neq 0).$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \operatorname{arc} \sin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

解 设 $u = e^{-x^2}$, 则

$$y = \frac{u \operatorname{arc} \sin u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-u^2).$$

由于

$$y'_u = \frac{\left(\operatorname{arc} \sin u + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2 \operatorname{arc} \sin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$= \frac{u}{1-u^2}$$

$$= \frac{\operatorname{arc} \sin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{arc} \sin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x = -2xe^{-x^2},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1 - e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

($x \neq 0$).

976. $y = \frac{a^x}{1 + a^{2x}} - \frac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}} \arcsin(a^{-x})$.

解 设 $u = a^x$, 则

$$y = \frac{u}{1 + u^2} - \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \arcsin(u^{-1}).$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{(1 + u^2) - 2u^2}{(1 + u^2)^2} \\ &\quad - \frac{-2u(1 + u^2) - 2u(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} \arcsin(u^{-1}) \\ &\quad - \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \cdot \frac{1}{u^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)} \\ &= \frac{4u \arcsin(u^{-1})}{(1 + u^2)^2} = \frac{4a^x \cdot \arcsin(a^{-x})}{(1 + a^{2x})^2}, \end{aligned}$$

$$u'_x = a^x \ln a,$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{4a^{2x} \ln a}{(1 + a^{2x})^2} \arcsin(a^{-x})$$

($a > 0$).

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形, 设:

(a) $y = |x|$; (b) $y = x|x|$; (c) $y = \ln|x|$.

解 (a) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$ (图 2.2).

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \text{或写成 } y' = \frac{|x|}{x}.$$

在 $x = 0$ 时 y' 不存在(图 2.3).

$$(6) y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (\text{图 2.4}).$$

$$y' = \begin{cases} 2x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -2x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{而且易见有 } y'|_{x=0} = 0,$$

故 $y' = 2|x|$ (图 2.5).

*) 以下各题,对于分界点的导数,不再单独讨论.

$$(8) y = \ln|x| \quad (\text{图 2.6}).$$

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (\text{图 2.7}).$$

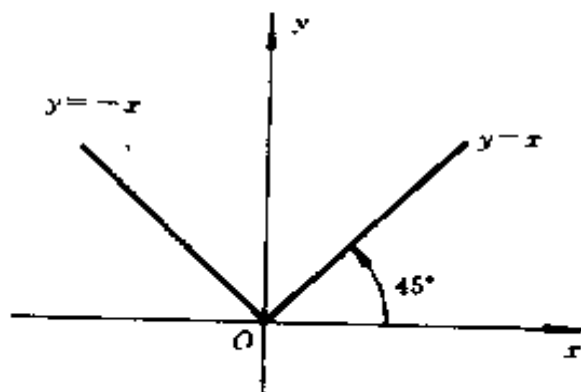


图 2.2

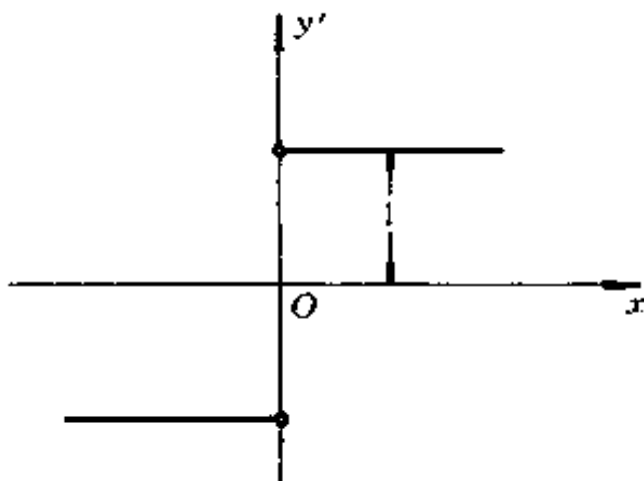


图 2.3

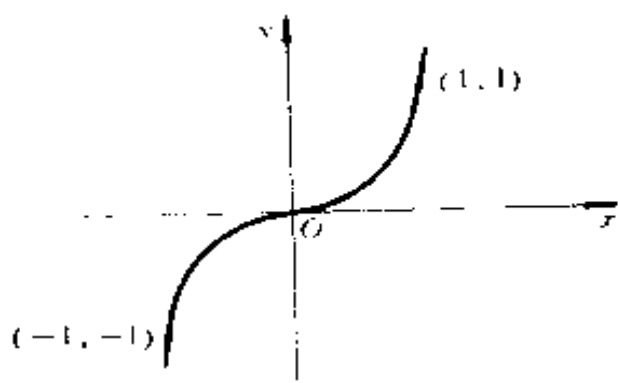


图 2.4

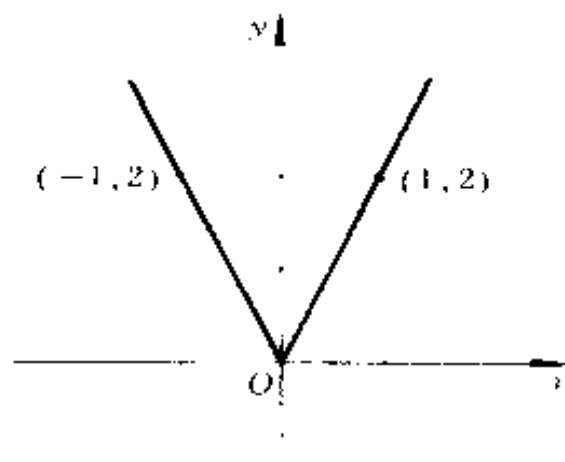


图 2.5

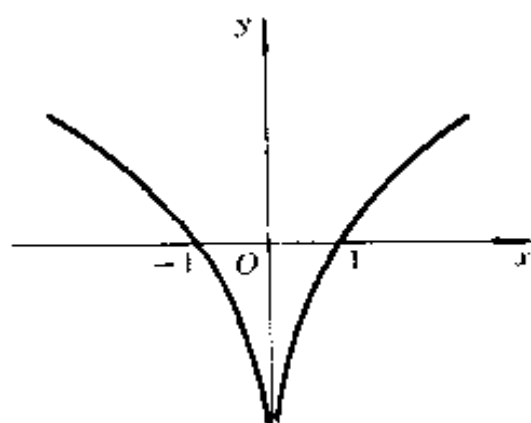


图 2.6

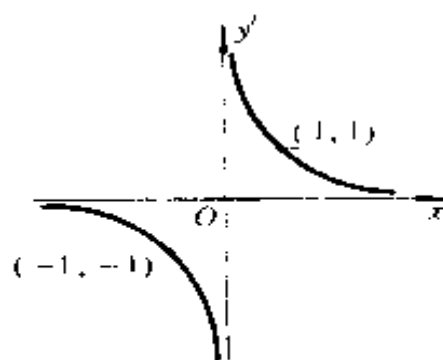


图 2.7

978. 求下列函数的导函数:

(a) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; (6) $y = |\sin^3 x|$;

(b) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$; (r) $y = [x] \sin^2 \pi x$.

解 (a) $y' = \frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^3} [2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2]$
 $= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$
 $(|x| \neq 1);$

(b) $y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x$
 $= \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$

(c) $y' = \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \right] \cdot \left(-\left(\frac{|x|}{x \cdot x^2} \right) \right)$
 $= \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$

(d) 对于 $y = [x]$ 有 $y' = 0$
 $(x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

于是, 当 $x \neq k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 有

$$\{[x] \sin^2 \pi x\}' = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x]$$

$$= \pi [x] \sin 2\pi x.$$

容易直接验证当 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

$$979. y = \begin{cases} 1-x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \quad (\text{图 2.8}) \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 显然 $y' = \begin{cases} -1 & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x-3 & \text{当 } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

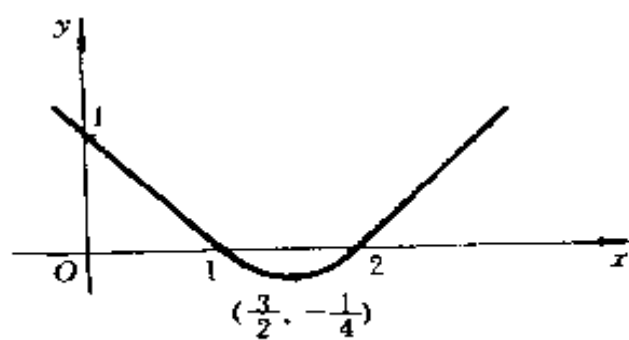


图 2.8

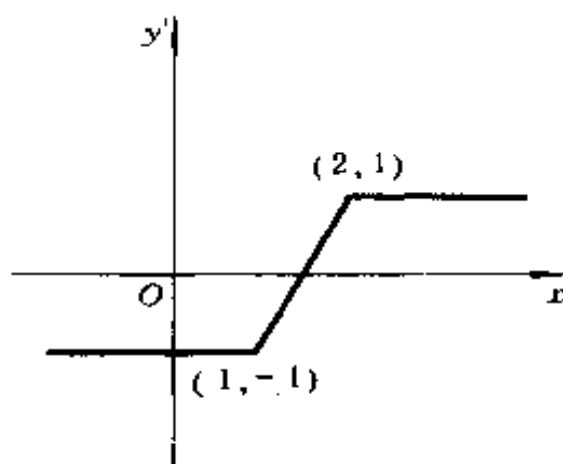


图 2.9

当 $x = 1$ 时, 右导数

$$y'_+ |_{x=1} = (2x - 3) |_{x=1} = -1,$$

左导数

$$y'_- |_{x=1} = -1.$$

因此 $x = 1$ 的导数存在, 且 $y' |_{x=1} = -1$. 同理, 可得 $y' |_{x=2} = 1$. 于是

$$y' = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x - 3, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases} \quad (\text{图 2.9})$$

注: 在下面 980 题到 983 题中, 求分段定义函数的导数时, 在分段点, 都要先求其左、右导数. 若左、右导数存在而且相等, 则导数存在. 为简便计, 我们只写出结果, 而省去了(在分段点)求左、右导数的过程.

$$980. y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & \text{当 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{在线段 } [a, b] \text{ 之外.} \end{cases} \quad (\text{图 2.10})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{当 } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(图 2.11)

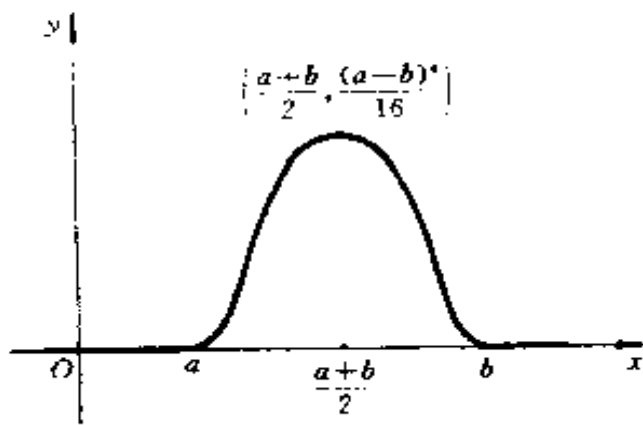


图 2.10

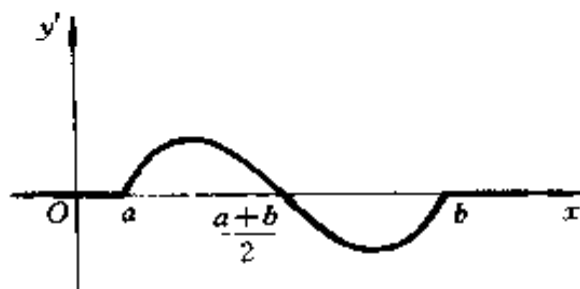


图 2.11

$$981. y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.12})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < 0; \\ \frac{1}{1+x} & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.13})$$

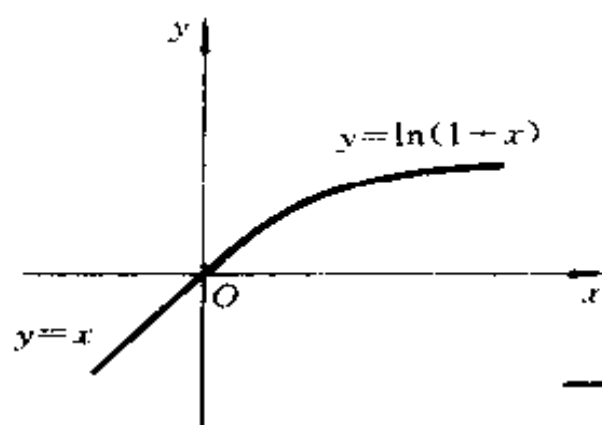


图 2.12

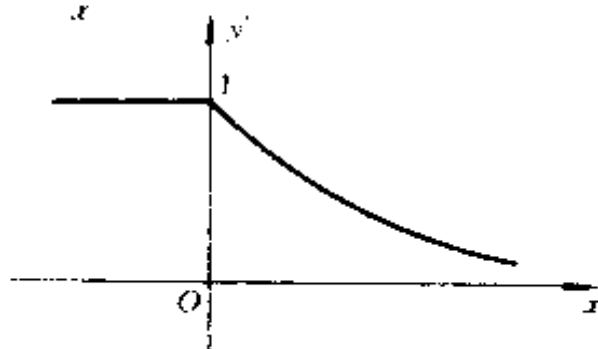


图 2.13

$$982. y = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.14})$$

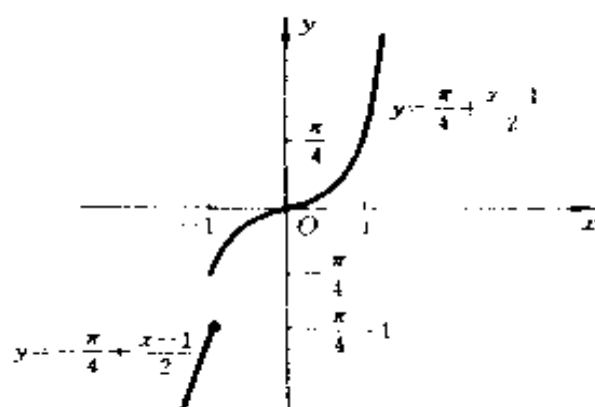


图 2.14

解
$$y = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{当 } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.15})$$

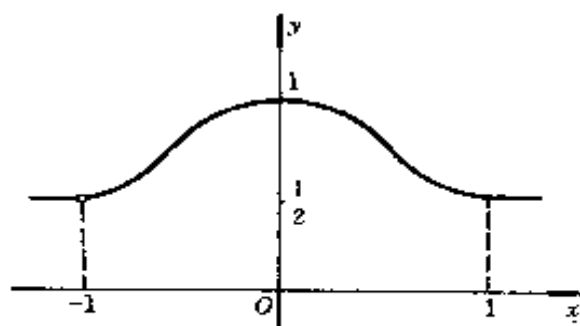


图 2.15

983.
$$y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.16})$$

解
$$y = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \text{当 } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.17})$$

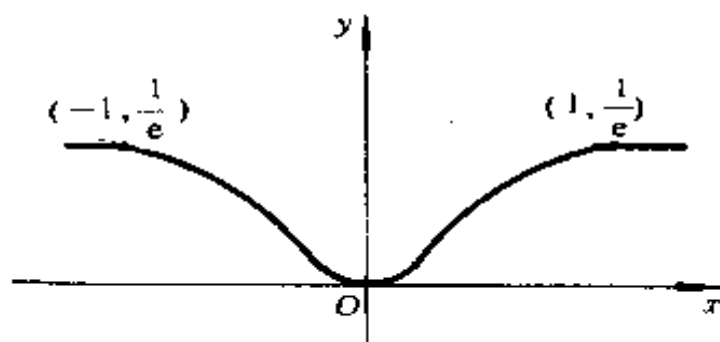


图 2.16

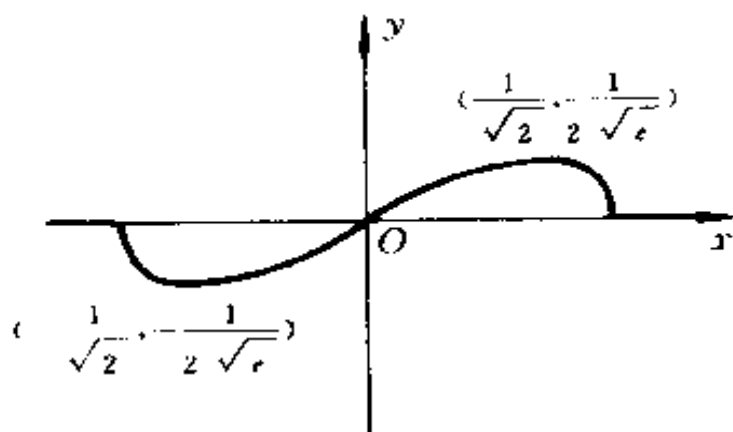


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数：

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y , 求其对数的导函数：

(a) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (b) $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

(в) $y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n}$;

(r) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

解 (a) 由 $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln y &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \\ &= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)} \quad (0 < |x| < 1); \end{aligned}$$

(6) 由 $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y = 2\ln|x| - \ln|1-x| + \frac{1}{3}\ln|3-x|$$

$$- \frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)} - \frac{2}{3(3+x)}$$

$$= \frac{54 - 36x + 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

($x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3$);

(b) 由于 $y = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内, 故应设

$\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} > 0$, 从而有

$$\ln y = \ln \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln|x - a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx}\ln y = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - a_i} \quad (x \in R),$$

其中 $R = \left\{ x \mid \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} > 0 \right\}$;

(r) 由 $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y = n \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数. 求函数 y 的导函数,

若:

$$(a) y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}; (b) y = \arctg \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(B) y = \sqrt[n]{\psi(x)} \quad [\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0];$$

$$(r) y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x) \quad [\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0].$$

解 (a) $y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$
($\varphi'(x) + \psi^2(x) \neq 0$).

$$(b) y' = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}$$
$$= \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$$

($\psi(x) \neq 0$).

(B) 由 $y = \sqrt[n]{\psi(x)}$ 得

$$\ln y = \frac{1}{\varphi(x)} \ln \psi(x).$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x) - \varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是,

$$y' = \sqrt[n]{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}.$$

(r) 由 $y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x)$ 得

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)},$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} \\
 &= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)} \\
 &\quad - \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}.
 \end{aligned}$$

986. 求 y' , 设:

(a) $y = f(x^2)$; (b) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

(c) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$; (r) $y = f\{f[f(x)]\}$,

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数.

解 (a) $y' = 2x f'(x^2)$;

$$\begin{aligned}
 (b) y' &= 2 \sin x \cos x f'(\sin^2 x) \\
 &\quad - 2 \sin x \cos x f'(\cos^2 x) \\
 &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)];
 \end{aligned}$$

(c) $y' = e^{f(x)} [f'(x) f(e^x) + e^x f'(e^x)]$;

(r) $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$.

987. 证明 n 阶行列式微分法:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

证 证法一：从行列式的定义出发予以证明。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \cdot f_{nj_n}(x)] \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^n f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{j_1}(x) & \frac{d}{dx} f_{j_2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{j_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

*) 其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

证法二: 利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} [f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)] \\ &= \left[\frac{d}{dx} f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx} f_{12}(x) \cdot f_{21}(x) \right] \\ & \quad + \left[\frac{d}{dx} f_{22}(x) \cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx} f_{21}(x) \cdot f_{12}(x) \right] \\ &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} f_{11}(x) & \frac{d}{dx} f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ & \quad + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx} f_{21}(x) & \frac{d}{dx} f_{22}(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

知等式(1) 对于 $n = 2$ 时成立.

今假定等式(1) 对于 $n = k$ 时成立, 即

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} \\
= & \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

要证明等式(1)对于 $n = k + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{i,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+1,1}(x) & f_{k+1,2}(x) & \cdots & f_{k+1,k+1}(x) \end{vmatrix} \\
= & \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1,j}(x) \cdot \\
& \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots f_{1,j-1}(x) f_{1,j+1}(x) \cdots f_{1,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) \cdots f_{i,j-1}(x) f_{i,j+1}(x) \cdots f_{i,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+1,1}(x) \cdots f_{k+1,j-1}(x) f_{k+1,j+1}(x) \cdots f_{k+1,k+1}(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \frac{d}{dx}$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{1j}(x) \cdots f_{1j-1}(x) f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \dots \\ f_{k+1j}(x) f_{i1}(x) \cdots f_{ij-1}(x) f_{ij+1}(x) \cdots f_{ik+1}(x) \\ \dots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \cdot$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{11}(x) \cdots f_{1j-1}(x) f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \dots \\ \frac{d}{dx} f_{k+1j}(x) f_{i1}(x) \cdots f_{ij-1}(x) f_{ij+1}(x) \cdots f_{ik+1}(x) \\ \dots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]$$

$$+ f_{k+1j}(x) \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{11}(x) \cdots f_{1j-1}(x) f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \dots \\ f_{i1}(x) \cdots f_{ij-1}(x) f_{ij+1}(x) \cdots f_{ik+1}(x) \\ \dots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{ccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{array} \right] + \\
&+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} f_{k+1j}(x) \cdot \sum_{i=1}^k \\
&\left[\begin{array}{cccc} f_{11}(x) \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{11}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{1j-1}(x) & \frac{d}{dx} f_{1j+1}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) \cdots & f_{kk+1}(x) \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{array} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} f_{k+1j}(x) \\
&\left[\begin{array}{cccc} f_{11}(x) \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{11}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{1j-1}(x) & \frac{d}{dx} f_{1j+1}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) \cdots & f_{kk+1}(x) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k-11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k-1k+1}(x) \end{vmatrix} + \\
&+ \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{i(k+1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{i(k+1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k-11}(x) & \cdots & f_{k-1k+1}(x) \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

故等式(1)对于 $n = k + 1$ 时也成立.

于是,由数学归纳法知,等式(1)对于一切自然数 n 均成立.

988. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

解 用上题结果,有

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3) \\
 &= 3(x^2 + 5).
 \end{aligned}$$

989. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \\
 &\quad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2.
 \end{aligned}$$

990. 已知函数的图形, 近似地作出其导函数的图形.

解 先由给定曲线 $y = f(x)$ 上一点 M , 作出曲线 $y' = f'(x)$ 上的对应点 M' . 为清楚起见, 作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$, 取相同的单位, x 轴与 x' 轴平行, y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上(如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y = f(x)$, 在曲线上任取一点 $M(x, f(x))$, 并作曲线在点 M 处的切线 MN . 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1, 0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 y' 轴于点 Q , 于是

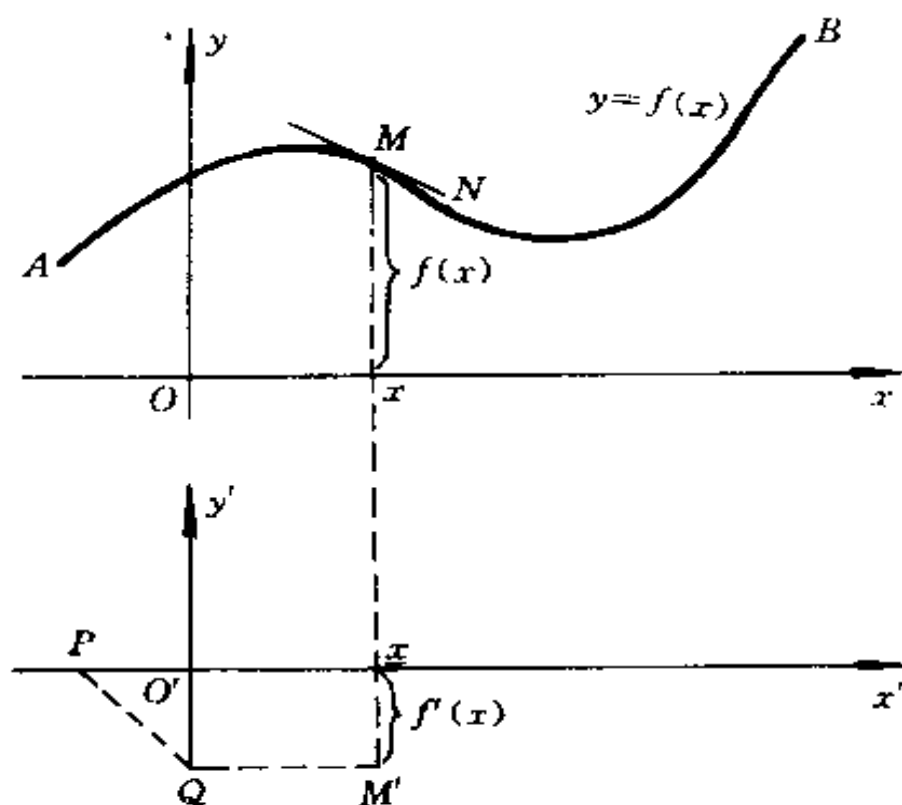


图 2.18

$$O'Q = \operatorname{tg} \alpha = f'(x),$$

即线段 $O'Q$ 是对应于在点 x 的导函数 $f'(x)$. 再过点 Q 引平行 x 轴的直线, 交过点 $(x, 0)$ 且垂直于 x 轴的直线于点 M' , 则点 M' 就是曲线 $y' = f'(x)$ 上对应于曲线 $y = f(x)$ 上点 M 的点.

由此, 我们就可由已给曲线 $y = f(x)$ 作出曲线 $y' = f'(x)$, 按上述方法, 在曲线 $y = f(x)$ 上取若干点:

$$M_i(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n),$$

且在 Oxy' 系 (相当于 $O'x'y'$ 系, 这是为了方便起见, 分开画) 内作出对应点:

$$M'_i(x_i, f'(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n).$$

最后用光滑曲线连接 M'_1, M'_2, \dots, M'_n 各点, 此即已给曲线 $y = f(x)$ 对应的导函数 $y' = f'(x)$ 的图形, 如图 2.19 所示.

991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

而

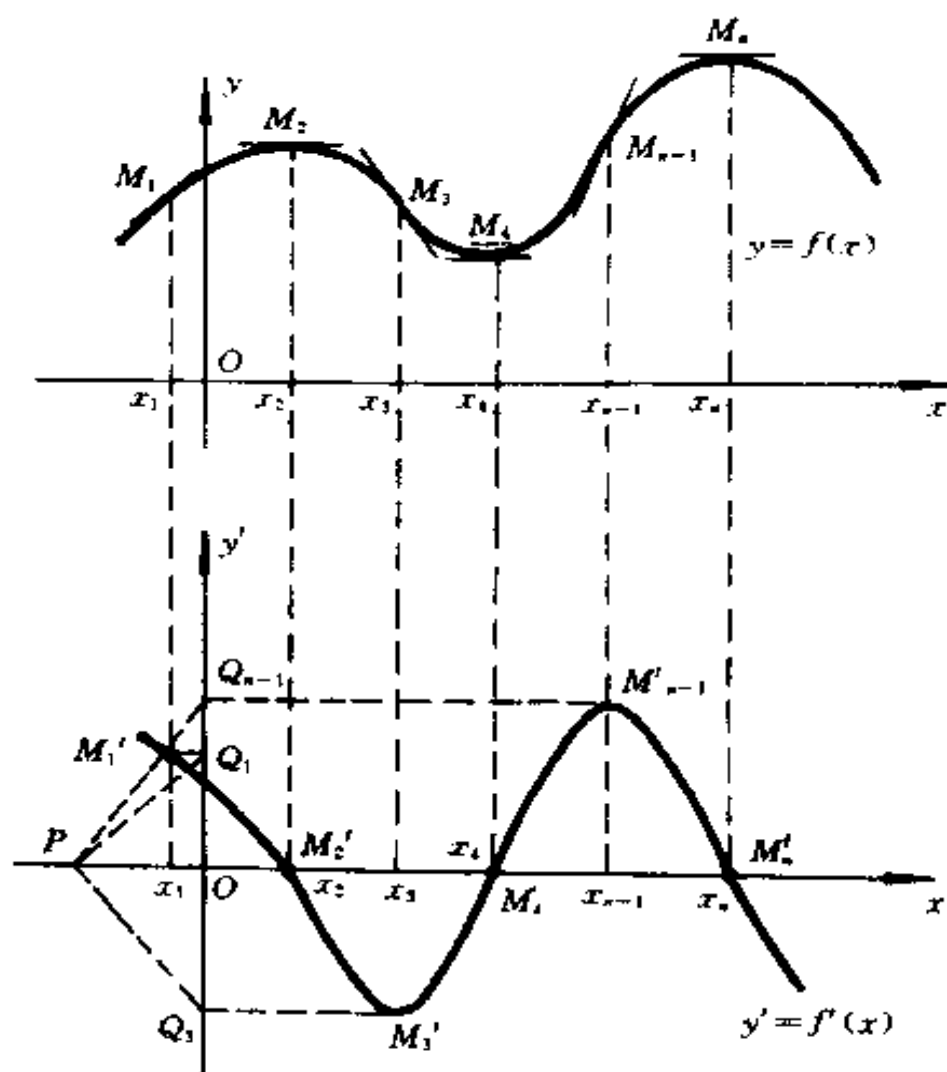


图 2.19

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 中处处存在. 但当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处是间断的, 这就说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

(a) 在 $x = 0$ 处是连续的; (b) 在 $x = 0$ 处可微分;

(B) 在 $x = 0$ 处其导函数是连续的?

解 (a) 当 $n > 0$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 此时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的

(当 $n = \frac{p}{q}$ (p, q 互质) 且 q 为偶数时, 只考虑在 $x = 0$ 处右连续).

(b) 当 $n > 1$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

于是, $f'(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是可微的;

(B) 当 $n > 2$ 时, 由于

$$f(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

而由 (b) 可得 $f'(0) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. 这就说

明当 $n > 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

$$(m > 0)$$

有 (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数;

(6) 在此域上有无界的导函数.

解 (a) 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta) (\delta > 0)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= n|x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{m}{|x|^{m+1}} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot |x|^n \cdot \cos \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{|x|}{x} \left[n|x|^{n-1} \sin \frac{1}{|x|^m} \right. \\ &\quad \left. - m|x|^{n-(m+1)} \cos \frac{1}{|x|^m} \right]. \end{aligned}$$

由于 $\frac{|x|}{x}, \sin \frac{1}{|x|^m}, \cos \frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数, 于是当 $n \geq m+1$ 时, $f'(x)$ 为有界函数 (易知此时 $f'(0) = 0$).

(6) 在此域上, 当 $n - (m+1) < 0$ (即 $n < m+1$) 时 $f'(x)$ 无界. 另一方面, 同 992 题(6) 一样, 当 $n > 1$ 时 $f'(0)$ 才存在, 因而所求的条件为

$$1 < n < m+1 \quad (m > 0).$$

994. 设:

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的, 求 $f'(a)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x), \end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a)$. 于

是, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \varphi(a)$, 即
 $f'(a) = \varphi(a)$.

995. 设:

$$f(x) = |x - a| \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数及 $\varphi(a) \neq 0$, 证明此函数在 a 点没有导数.

单侧导函数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于甚么?

解
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \varphi(a + \Delta x)$$

$$= \begin{cases} \varphi(a + \Delta x), & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时,} \\ -\varphi(a + \Delta x), & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} [-\varphi(a + \Delta x)] = -\varphi(a),$$

即

$$f'_-(a) = -\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} [\varphi(a + \Delta x)] = \varphi(a),$$

即

$$f'_+(a) = \varphi(a).$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$, 故 $f'_-(a) \neq f'_+(a)$, 因此 $f(x)$ 在 a 点没有导数.

996. 举出在已知点: a_1, a_2, \dots, a_n 没有导数的连续函数的例子.

解 我们已知 $y = |x - a|$ 在 $x = a$ 处连续而无导数. 利用这一点, 我们作一个函数

$$y - f(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|,$$

它在 a_1, a_2, \dots, a_n 点均连续, 而在这些点均无导数.

997. 证明: 函数

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上有不可微分的点, 但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

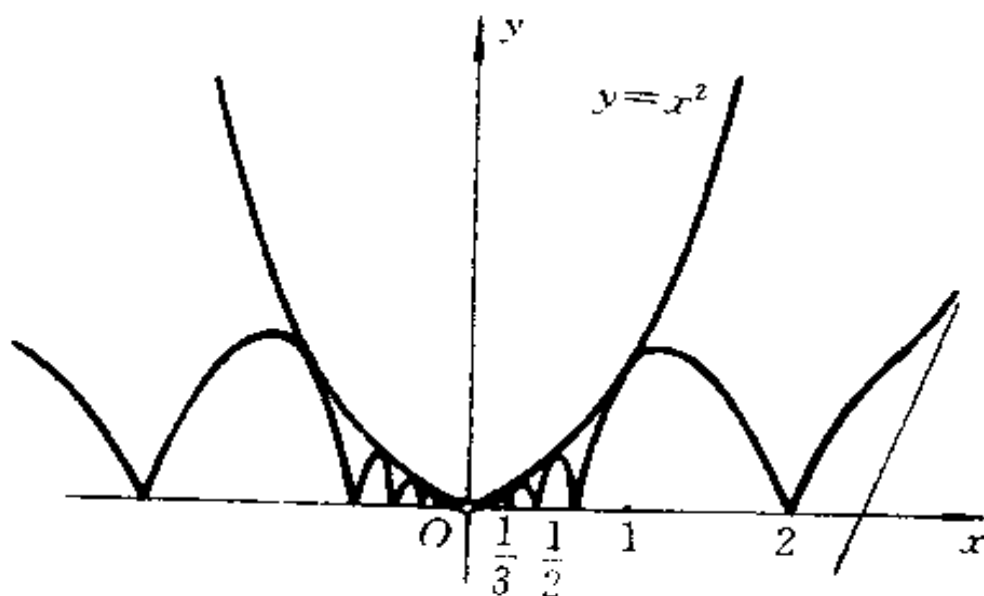


图 2.20

证 对于函数 $f(x)$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$, 即在 $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x = 0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ (其

中 $\delta > 0$) 中, 函数 $f(x)$ 总有不可微分的点. 事实上, 令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

则当 n 充分大时, 总可使 $0 < x_n < \delta$, 从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n , 有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad \text{及} \quad f'_+(x_{2n}) = -\pi.$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是, 函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方, 包括原点; 当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时, $f(x) = 0$, 且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

998. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

证
$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} \Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

于是, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

即

$$f'(0) = 0.$$

其次,对于任一点 $x \neq 0$,分两种情形讨论函数的可微性:

(1) x 为有理数. 取一无理数叙列 $\{x_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 则有

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{0 - x^2}{x_n - x} = \infty.$$

由此可知,函数 $f(x)$ 在任一有理点 ($\neq 0$) 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数叙列 $\{x_n'\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = x$, 则有

$$\lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = \lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{x_n'^2}{x_n' - x} = \infty.$$

由此可知,函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

综上所述,函数 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性:

(a) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$

(b) $y = |\cos x|;$

(c) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$

(d) $y = \arcsin(\cos x);$

$$(e) y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 (a) 当 $x \neq 1$ 或 $x \neq 2$ 或 $x \neq 3$ 时,函数均可微. 现在我们来考察在 1, 2, 3 这三点的可微性.

1. 当 $x = 1$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} |(\Delta x - 1)^2(\Delta x - 2)^3|,$$

故 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -8.$

因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在, 由此可知 y 在 $x = 1$ 点不可微;

2. 当 $x = 2$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 1)(\Delta x - 1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而 y 在 $x = 2$ 点可微;

3. 当 $x = 3$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 2)(\Delta x + 1)^2 \Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而 y 在 $x = 3$ 点可微.

(6) $y = |\cos x|$ 在 $x = \frac{2k-1}{2}\pi$ (k 为整数) 点不可微分.

(B) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 只可能在 $x = \pm \pi$ 的点不可微分.

现在我们来考察在 $x = -\pi$ 及 $x = \pi$ 时函数 y 的可微性.

1. 当 $x = \pi$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin \Delta x \sin \Delta x |2\pi \Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x = \pi$ 点可微.

2. 同理可证函数 y 在 $x = -\pi$ 点也可微.

于是, 函数 $y = (\pi^2 - x^2) \sin^2 x$ 处处可微分.

(r) $y = \arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x| = 1$ 的点不可微分, 即在 $x = k\pi$ (k 为整数) 的点不可微分.

(a) 函数 y 对于 $|x| \neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x| = 1$ 点的可微性.

1. 当 $x = 1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\Delta x + 2)^2, & \text{当 } \Delta x < 0; \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0; \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, 即函数 y 在 $x = 1$ 点可微.

2. 当 $x = -1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\begin{cases} \frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x} = -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时,} \\ \frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4} = -\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x = -1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$.

设:

1000. $f(x) = |x|.$

解 当 $x \neq 0$ 时, 易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以,

$$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1.$$

1001. $f(x) = [x] \sin \pi x.$

解 当 $x \neq$ 整数时,

$$f'(x) = f'_+(x) = \pi [x] \cos \pi x;$$

当 x 为整数时, 从定义出发得

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{[k + \Delta x] \sin \pi (k + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{k \cos k \pi \sin(\pi \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k \pi (-1)^k, \end{aligned}$$

同法可得 $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k.$

1002. $f(x) = x \left\lfloor \cos \frac{\pi}{x} \right\rfloor (x \neq 0), f(0) = 0.$

解 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时 (即使 $\cos \frac{\pi}{x} \neq 0$ 的 x 值),

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= f'_+(x) \\ &= \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \frac{\left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{\cos \frac{\pi}{x}} \sin \frac{\pi}{x} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x} \right); \end{aligned}$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时, 从定义出发易得

$$\begin{aligned} f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) &= -\frac{2k+1}{2}\pi, \\ f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) &= \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= 1; \\ f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}} \right] = -1. \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2k\pi} (k = 1, 2, \dots)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
 f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin[2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}{2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2}} \\
 &\quad \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x} + 1} \\
 &= +\infty;
 \end{aligned}$$

同理, 可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi}) = -\infty (k = 1, 2, \dots);$$

$$f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \mp\infty (k = 1, 2, \dots).$$

1004. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$1005. f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}};$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = -1 \end{aligned}$$

同理可求得 $f'_+(0) = 1$.

$$1006. f(x) = |\ln|x|| (x \neq 0).$$

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(x) = f'_+(x) &= \frac{|\ln|x||}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} \\ &= \frac{1}{x} \frac{|\ln|x||}{\ln|x|}, \end{aligned}$$

分两种情况:

1° 当 $0 < |x| < 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = -\frac{1}{x};$$

2° 当 $|x| > 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{x};$$

当 $|x| = 1$ 时,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\ln|1 + \Delta x||}{\Delta x} \\
&= - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} |\ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}| \\
&= - \ln e = -1,
\end{aligned}$$

同理可求得 $f'_-(-1) = -1, f'_+(\pm 1) = 1$.

1007. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(x) = f'_+(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&\cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} \\
&= \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2);
\end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta x)^2} \\ & \cdot \frac{1}{\Delta x} \\ & = 1. \end{aligned}$$

同理可求得

$$f'_-(-1) = -1, f'_+(1) = -1, f'_+(-1) = 1.$$

1008. $f(x) = (x - 2)\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2} (x \neq 2), f(2) = 0.$

解 当 $x \neq 2$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_+(x) \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2} \\ &\quad + \frac{x - 2}{1 + \left(\frac{1}{x - 2}\right)^2} \left[-\frac{1}{(x - 2)^2}\right] \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2} - \frac{x - 2}{(x - 2)^2 + 1}; \end{aligned}$$

当 $x = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

同理可求得 $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}.$

1009. 证明: 在 $x \neq 0$ 时函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 在 $x = 0$ 时 $f(0) = 0$, 在此点连续, 但在此点既无左侧导数, 又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

其次, 由于

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零, 此极限均不存在, 因此在点 $x = 0$, 函数 $f(x)$ 既无左侧导数, 也无右侧导数.

1010. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x = x_0$ 处连续而且可微分, 应当如何选取系数 a 和 b ?

解 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) = ax_0 + b$.
当

$$x_0^2 = ax_0 + b$$

时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0) = 2x_0, f'_+(x_0) = a$, 故当

$$a = 2x_0$$

时, 函数在点 x_0 处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b,$$

即 $b = -x_0^2$.

于是, 所求的系数为

$$a = 2x_0, b = -x_0^2.$$

1011. 设:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 为左方可微分的. 应当选择如何的系数 a 和 b , 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

解 $F(x_0) = F(x_0 - 0) = f(x_0)$,

$$F(x_0 + 0) = ax_0 + b. \text{ 当}$$

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0) = f'_-(x_0)$, $F'_+(x_0) = a$, 故当

$$a = f'_-(x_0)$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a = f'_-(x_0), \\ f(x_0) = ax_0 + b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a = f'_-(x_0), b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0).$$

1012. 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y = A(x - a)(x - b)x - c$$

在区域 $a \leq x \leq b$ 上把两个半直线:

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a)$$

及

$$y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线,

$$y' = A[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时,它们就平滑地联接起来,此时应有相等的斜率.于是,有

1°. 在点 $x = a$ 处,

$$A(a-b)(a-c) = k_1; \quad (1)$$

2°. 在点 $x = b$ 处,

$$A(b-a)(b-c) = k_2. \quad (2)$$

联立(1)和(2)式,解之得

$$A = \frac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}, c = \frac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}.$$

1013. 用抛物线 $y = a + bx^2$ ($|x| \leq c$) (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ ($|x| > c$) 的部分,使所得的为一平滑曲线.

解 显见 $c > 0$, 否则在点 $x = c$ 处就不可能形成一平滑曲线. 此时, 在点 $x = c$ 处两曲线的切线斜率相等, 且有相同的纵坐标. 于是, 有

$$(a + bx^2)' \Big|_{x=c} = \left(\frac{m^2}{|x|} \right)' \Big|_{x=c}$$

及

$$a + bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\frac{m^2}{c^2}, \\ a + bc^2 = \frac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之,得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知,在点 $x = -c$ 处,按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y = a + bx^2$ 与曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线.

1014. 若:(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数,而函数 $g(x)$ 在这点没有导数;(b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数,可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 能. 因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$, 上式右端第一项的极限存在,而第二项的极限不存在. 因而当 $\Delta x \rightarrow 0$, 左端的极限也不存在(否则差 $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在,与 $g(x)$ 不可导相矛盾),这说明 $F(x)$ 在点 x_0 没有导数.

(b) 不能. 例如,

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点 $x = 0$ 处都没有导数,但它们的和 $F(x) =$

$f(x) + g(x) = x$ 在点 $x = 0$ 处有导数且为 1.

1015. 若: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (6) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数, 可否断定他们的积

$$F(x) = f(x)g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 不能. 例如,

$f(x) = x$, 在 $x = 0$ 处有导数,

$g(x) = |x|$, 在点 $x = 0$ 没有导数,

而它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = x|x|$$

在点 $x = 0$ 处有导数. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0 \cdot |0|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0,\end{aligned}$$

即有 $F'(0) = 0$.

(6) 不能. 例如,

$$f(x) = |x|, g(x) = |x|,$$

在点 $x = 0$ 它们都没有导数, 但它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = (|x|)^2 = x^2,$$

在点 $x = 0$ 处有导数, 且 $F'(0) = 2x|_{x=0} = 0$.

1016. 若: (a) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数; (6) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 有导数; (B) 函数 $f(x)$

于点 $x = g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数, 则函数

$$F(x) = f[g(x)]$$

于已知点 $x = x_0$ 的可微性怎样?

解 (a) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如, 考察函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 及点 x_0 如下:

1° $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0) = 0$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = (|x|)^2 = x^2$, $F'(0) = 0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

2° $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0) = 1$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$,
 $F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(b) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如,

1° $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0)$ 不存在, $g'(0)$ 存在, 且等于零; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x^2| = x^2$, $F'(0)$ 存在, 且等于零.

2° $f(x) = |x|$, $g(x) = x$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$, $F'(0)$ 不存在.

(b) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在, 例如,

1° $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 易知 $F(x) = f[g(x)] = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| \equiv x$.
因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

$2^\circ f(x) = |x|, g(x) = |x|$, 点 $x = 0, g(0) = 0$.
 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$,
 $F'(0)$ 也不存在.

1017. 在函数

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线? 作出这图形.

解 $y' = 1 + \frac{\cos x}{3 \sqrt[3]{\sin^2 x}} (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$.

当 $x = k\pi$ 时, 容易直接算出

$$\begin{aligned} y' |_{x=k\pi} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\pi + \Delta x + \sqrt[3]{\sin(k\pi + \Delta x)} - k\pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{(-1)^k \cdot \sin \Delta x}{(\Delta x)^2} \cdot \Delta x} \right) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

故当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时有垂直切线.

当 $x = k\pi$ 时,

$$y = k\pi;$$

当 $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ 时,

$$y = x \pm 1,$$

其图形如图 2.21 所示.

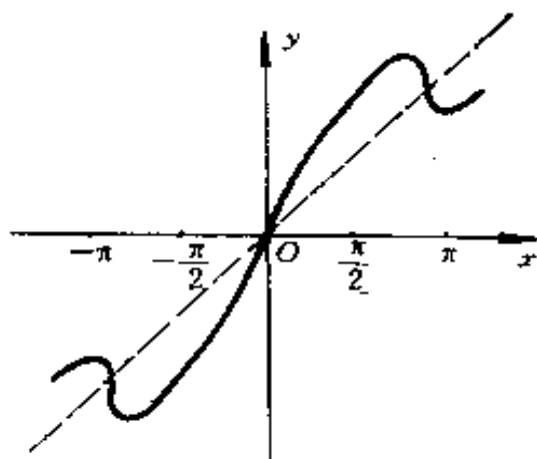


图 2.21

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点

可否有: (a) 有穷的导数; (b) 无穷的导数?

解 (a) 不能, 否则由此可推出其连续性.

(b) 能, 例如,

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在 $x = 0$ 点不连续, 但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \rightarrow +\infty (\Delta x \rightarrow 0).$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

$$(1) \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty; \quad (2) \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty?$$

解 (1) 一般地说, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$. 例如, 对

于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x},$$

显然有 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$. 但是, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$,

对于特殊的一串数 $x_n = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k = 1, 2, \dots$) 有

$f'(x_n) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$, 因而 $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \infty$ 不

成立.

(2) 必有 $\lim_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, 故 $f(x)$ 在

点 $x = a$ 的右近旁保持定号, 从而必有 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$, 显然可设前者成立(否则, 考察函数 $-f(x)$ 即化为前者). 再通过对自变量作代换 $t = a + b - x$ 可知, 我们只须证明下面的命题:

“若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (A, B) 上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow B-0} f(x) = +\infty, \quad (1)$$

则必有

$$\lim_{x \rightarrow B-0} |f'(x)| = +\infty. \quad (2)''$$

现在给出上述命题的证明如下:

由(1), 对于任给 $M_0 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使当 $x \in [B - \delta_0, B)$ 时, 有

$$f(x) \geq M_0 (B_0 \leq x < B, \text{ 其中 } B_0 = B - \delta_0).$$

记 $P = (B_0, f(B_0))$, 有 $f(B_0) \geq M_0$. 为证(2), 我们采用反证法. 设存在 $K > 0$, 使

$$|f'(x)| \leq K (x \in [B_0, B)),$$

则将引出矛盾. 论证如下:

今过 P_0 作斜率为 $2K$ 的直线

$$l: Y - f(B_0) = 2K(x - B_0). \quad (3)$$

它与 $x = B$ 垂线相交于一点 Q , 其纵坐标为

$$y_Q = f(B_0) + 2K(B - B_0) = f(B_0) + 2K\delta_0,$$

记 $M_1 = f(B_0) + 2K\delta_0$, 则 $y_Q = M_1$, 它是 l 直线在 $[B_0, B)$ 上的最大值.

对 M_1 而言, 由(1)可知, 存在 $x_2 \in (B_0, B)$ 使

$f(x_2) > M_1$, 即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面, 由在 $x = B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性, 在 $x = B_0$ 右侧邻域内, 对于任给 $\epsilon_1 > 0$ (取 $\epsilon_1 < \frac{K}{2}$), 存在 δ , 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| < \epsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| \\ & \leq |f'(B_0)| + \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B) \right| \\ & < K + \epsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K. \end{aligned}$$

即有在 r 曲线 $y = f(x)$ 上: 当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \quad (4)$$

今取 $x_1 > B_0$ 使 $x_1 < x_2, x_1 < B_0 + \delta$.

于是, 由(3)式和(4)式知

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(B_0) & < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0) \\ & < 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0), \end{aligned}$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点 $(x_1, f(x_1))$ 位于直线 l 之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in (x_1, x_2)} \{x | G(x) > 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0, G(x_2) > 0$, 易见 c 是存在的, 而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geq x > c$, 则有 $G(x) > 0$, 即在 c 点附近且 $x > c$ 时, 有

$$f(x) > Y(x).$$

从而

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$, 故又有(当 $x > c$, 且在 c 附近时):

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c}.$$

上式两边取极限(让 $x \rightarrow c + 0$), 并注意到函数的可微性, 有 $f'(c + 0) = f'(c)$, 于是有

$$f'(c) \geq Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$, 这个不等式与 $|f'(x)| \leq K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了(2)的证明, 从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理, 则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定. 例如:

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

它在 $(0, b)$ ($b > 0$) 上可微分, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = +\infty,$$

然而

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) - \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在?

解 不能. 例如, 函数

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在 $(0, +\infty)$ 上可微分, $f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$,

且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

然而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在.

1022. 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 由此可否推出有穷的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在?

解 不能. 例如,

$$f(x) = \cos(\ln x),$$

它由 $(0, +\infty)$ 上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

然而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分?

解 一般地说不行. 例如, 在 $(-\infty, 0)$ 上有

$$2x \leq x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分, 因为在 $(-\infty, 0)$ 上不等式

$$2 \leq 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式.

解 设 $\bar{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, (1)

$$\bar{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \quad (2)$$

则 $(\bar{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n$,

$$(\bar{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

另一方面, 由(1)式得

$$\bar{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于 $(\bar{P}_n)' = P_n$, 即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = P_n,$$

于是, 得

$$P_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\bar{Q}_n = x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于 $(\bar{Q}_n)' = Q_n$, 所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \quad (3)$$

而

$$P_n' = \left[\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \right]' = \frac{[-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n](1-x)^2 + 2(1-x)[1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将 P_n 及 P_n' 代入(3)式, 即得

$$Q_n = \frac{1+x - (n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

的公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x \right. \\ &\quad \left. + \dots + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

即

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

又因

$$\begin{aligned} T_n &= (S_n)' = \\ &= \frac{\left(n \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x + (n+1) \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
= & \frac{n \left(\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{nx}{2} + \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
& \frac{\sin \frac{nx}{2} \left(\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
= & \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

所以,

$$T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式:

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式:

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (1)$$

两端分别求导数,即得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \\
 & -\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \\
 & \quad \cdots -\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n} \\
 = & \frac{\cos x \sin\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n}\sin x \cos\frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2\frac{x}{2^n}}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

(2) ÷ (1) 得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \\
 & = \operatorname{ctg}x - \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n},
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \\
 & = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg}x
 \end{aligned}$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数,而可微分的奇函数的导函数为偶函数.

对这个事实加以几何解释.

证 设 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x) = f(-x)$.

两端微分之,得

$$f'(x) = -f'(-x), \text{即 } f'(-x) = -f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数.

同理可证:可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明:凡对称于 Oy 轴的图形,其对称点

的切线也关于 Oy 轴对称；凡关于原点对称的图形，其对称点的切线互相平行。

1028. 求证可微分的周期函数，其导函数仍为具有相同周期的周期函数。

证 设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 T ，则

$$f(x+T) = f(x).$$

两端微分之，得

$$f'(x+T) = f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数。

1029. 若圆半径以 2 厘米 / 每秒的等速度增加，则当圆半径 $R = 10$ 厘米时，圆面积增加的速度如何？

解 设圆面积为 S ，则 $S = \pi R^2$ ，

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{R=10} = 2\pi R \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=10} = 40\pi (\text{平方厘米 / 每秒}),$$

故当 R 为 10 厘米时，圆面积的增加速度为 40π 平方厘米 / 每秒。

1030. 长方形的一边 $x = 20$ 米，另一边 $y = 15$ 米，若第一边以 1 米 / 秒的速度减少，而第二边以 2 米 / 秒的速度增加，问这长方形的面积和对角线变化的速度如何？

解 面积 $S = xy$ ，对角线 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($x > 0, y > 0$)。对 t 求导数，即得

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

及

$$\frac{dl}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

按题设, 有 $x = 20, y = 15, \frac{dx}{dt} = -1, \frac{dy}{dt} = 2$, 代入上面两式, 得

$$\frac{dS}{dt} = 20 \cdot 2 + (-1) \cdot 15 = 25,$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{-20 + 2 \cdot 15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 0.4.$$

于是, 该长方形的面积的变化率为 25 平方米 / 每秒, 而对角线的变化率为 0.4 米 / 每秒.

1031. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发. A 船往北, B 船往东. 若 A 船的速度为 30 千米 / 每小时, B 船的速度为 40 千米 / 每小时, 问二船间的距离增加的速度如何?

解 记时间为 t (小时), A 与 B 离码头的距离分别为 $30t$ 与 $40t$ (千米), 注意成直角情形, 故两船间的距离为

$$d(t) = \sqrt{(30t)^2 + (40t)^2} = 50t,$$

故两船间的距离增加的速度为

$$d'(t) = 50 \text{ 千米 / 每小时}.$$

1032. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2; \\ 2x - 2, & \text{若 } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y = f(x)$, 轴 Ox 及过点 x ($x \geq 0$) 而垂直于 Ox 的直线三者围成的面积. 作出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导函数 $S'(x)$, 并作出函数 $y = S'(x)$ 的图形.

解 当 $x \in [0, 2]$ 时, $S(x) = \frac{1}{2}x^2$;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{2} (x-2)[2 + (2x-2)] \\ &= x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

从而有

$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \\ 2x - 2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (\text{图 2.22})$$

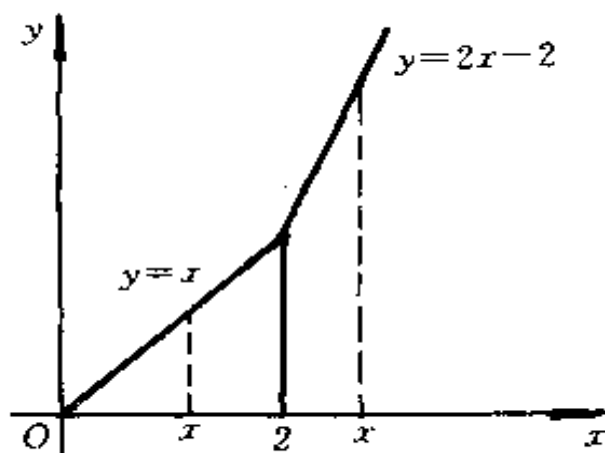


图 2.22

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 、轴 Ox 及通过点 O 和 $x (|x| \leq a)$ 而垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积. 作出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导函数 $S'(x)$, 并作其导函数 $y = S'(x)$ 的图形.

解 $S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成, 其中 $\sin \alpha = \frac{|x|}{a}$, 故当 $0 < |x| \leq a$ 时,

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{|x|}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{|x|}{x} \\
 &= \frac{|x| \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x \quad (0 < |x| \leq a).
 \end{aligned}$$

函数 $y = S(x)$ 的图形如图 2.23 所示. 函数 $y = S'(x)$ 的图形就是以原点为中心, a 为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段, 但不包括 $(0, a)$ 点及 $(0, -a)$ 点, 图形省略.

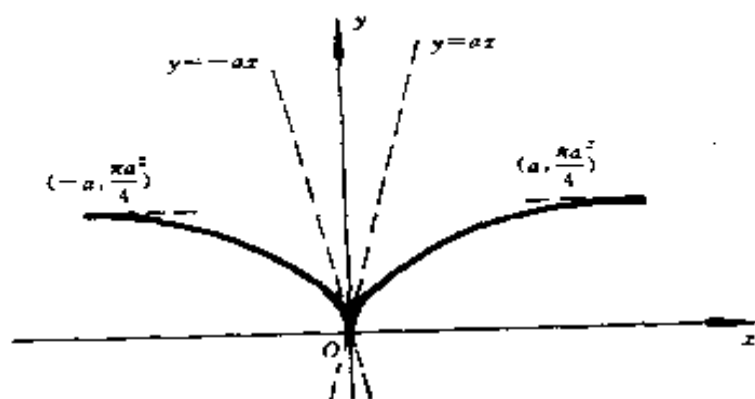


图 2.23

§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数

1° 反函数的导函数 若具有导函数 $f'(x) \neq 0$ 的可微分的函数 $y = f(x) (a < x < b)$ 有单值连续的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则此反函数也可

微分,且有公式

$$x'_{y'} = \frac{1}{y'_x}$$

成立.

2° 用参变数表示的函数的导函数 若方程组:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (a < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数,且 $\varphi'(t) \neq 0$, 确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在,且可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3° 隐函数的导函数 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导函数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得:

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 是当作变量 x 的复合函数.

1034. 证明由方程 $y^3 + 3y = x$ 定义的单值函数 $y = y(x)$ 存在,并求它的导函数 y'_x .

证 对函数 $x = f(y) = y^3 + 3y$ 有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0$$

其中 y 为任意实数,故 $f(y)$ 是严格增大的(在 $-\infty < y < +\infty$),因此存在单值的反函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$),且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

1035. 证明由方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) 确定的单值函数

$y = y(x)$ 存在, 并求其导函数 y'_x .

证 对于函数 $x = f(y) = y - \varepsilon \sin y$ 有

$$f'(y) = 1 - \varepsilon \cos y > 0 \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增大的, 从而反函数 $y = y(x)$ 存在且是单值的, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

1036. 设:

(a) $y = x + \ln x \quad (x > 0)$; (6) $y = x + e^x$;

(b) $y = \operatorname{sh} x$; (r) $y = \operatorname{th} x$.

求它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域, 并求它们的导函数.

解 (a) 由 $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0)$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(6) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(b) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

其中因为 $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$, 所以, $e^x + e^{-x} =$

$$2\sqrt{1+y^2}.$$

(r) 由 $y'_x = \frac{1}{(\operatorname{ch}x)^2} > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-1 < y < 1$. 由于

$$y^2 = \operatorname{th}^2x = \frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x} = \frac{\operatorname{ch}^2x - 1}{\operatorname{ch}^2x},$$

而 $\operatorname{ch}^2x = \frac{1}{y'_x} = x'_y$, 于是, 反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设:

$$(a)y = 2x^2 - x^4; \quad (b)y = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$(B)y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各枝, 求它们的导函数并作其图形.

解 (a) $x^4 - 2x^2 + y = 0$.

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1),$$

$$x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

由 $y = 2x^2 - x^4$, 微分得

$$1 = 4x \frac{dx}{dy} - 4x^3 \frac{dx}{dy},$$

所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x - 4x^3}$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{图 2.24}).$$

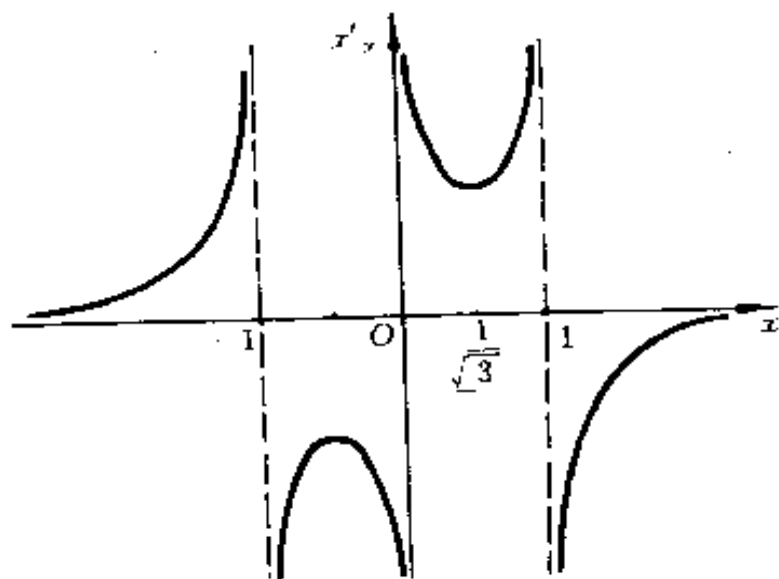


图 2.24

$$(6) \frac{x^2}{1+x^2} = y, \text{ 即 } x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad (0 \leq y < 1),$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

$$\text{由 } y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{及 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \text{ 有}$$

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{(1+x^2)^2}{2x}$$

$$= \frac{x^3}{2y^2}$$

当 $x_i \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{dx_i}{dy} \rightarrow$$

$$(\operatorname{sgn} x_i) \cdot (+\infty)$$

($i = 1, 2$) (图 2.25)

(B) y

$$= 2e^{-x} - e^{-2x},$$

解出 e^{-x} , 得 e^{-x}

$$= 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y})$$

($-\infty < y \leq 1$),

$$x_2 = -\ln(1 - \sqrt{1-y})$$

$$= \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{y}$$

($0 < y \leq 1$).

由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$, 对 y 求导数, 得

$$1 = -2e^{-x} \frac{dx}{dy} + 2e^{-2x} \frac{dx}{dy},$$

所以,

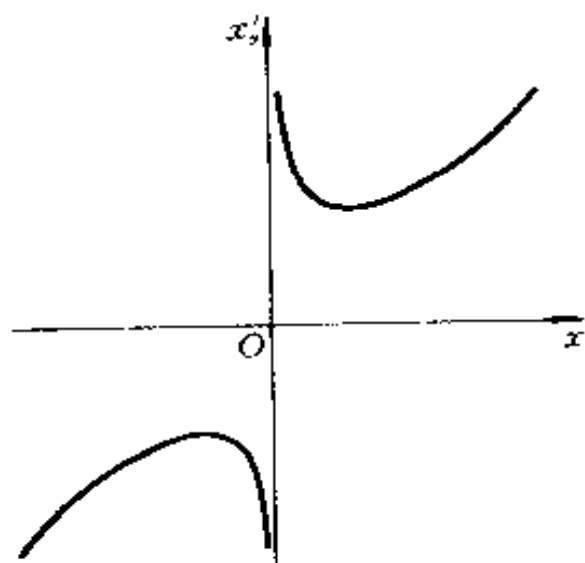


图 2.25

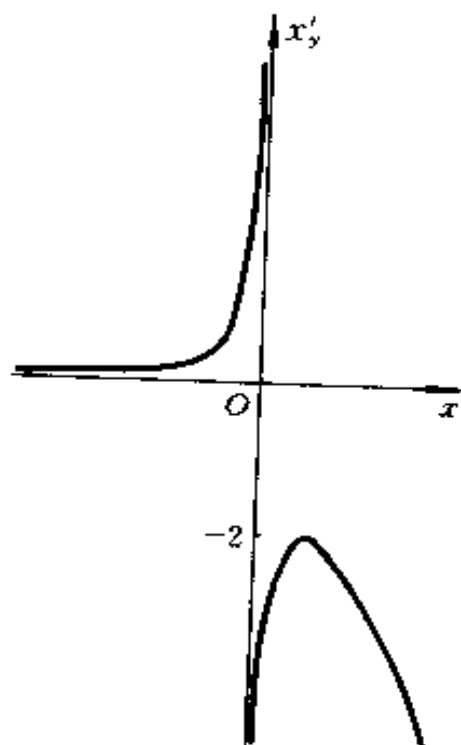


图 2.26

$$\frac{dx_i}{dy} = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{2x})}$$

($i = 1, 2$) (图 2.26).

1038. 作出函数 $y = y(x)$ 的略图, 并求其导函数 y'_x , 设: $x = -1 + 2t - t^2, y = 2 - 3t + t^3$. 当 $x = 0$ 及 $x = -1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么? 在何点 $M(x, y)$ 的导函数 $y'_x(x) = 0$?

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = -\frac{3}{2}(1 + t).$$

当 $t = -1$, 即 $x = -4, y = 4$ 时, $y'_x(x) = 0$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$, 此时 $y'_x(x) = -3$;

当 $x = -1$ 时, $t = 0$ 或 $t = 2$, 此时 $y'_x(x) = -\frac{3}{2}$

或 $y'_x(x) = -\frac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t < -1$ 时, $\frac{dy}{dx} > 0$, 函数值 y 随自变量增加而增加, 曲线上升.

当 $t > -1$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 曲线下降.

图形如图 2.27 所示.

求导函数 y'_x (参数是正数). 设:

$$1039. x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},$$

$$y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}.$$

解 $\frac{dy}{dt}$

$$= -\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}},$$

$$\frac{dx}{dt} =$$

$$-\frac{1}{6\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{(1 - \sqrt{t})^2}},$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1).$$

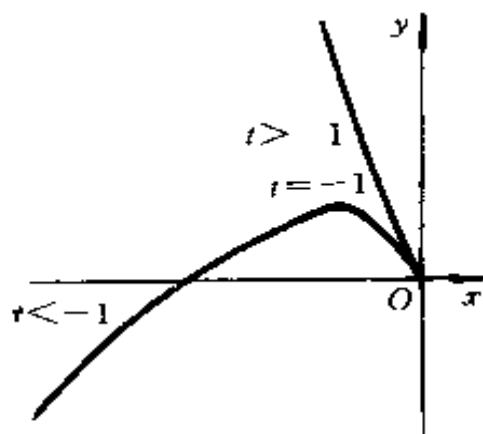


图 2.27

$$1040. x = \sin^2 t, y = \cos^2 t.$$

解 $\frac{dy}{dt} = -2\cos t \sin t, \frac{dx}{dt} = 2\sin t \cos t,$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos t \sin t}{2\cos t \sin t} = -1 \quad (0 < x < 1).$$

$$1041. x = a \cos t, y = b \sin t.$$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt} \quad (0 < |t| < \pi).$

$$1042. x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t.$$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t} = \frac{b}{a} \operatorname{ctht} \quad (t \neq 0).$

$$1043. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t}$

$$= -\operatorname{tg}t \left(t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

1044. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}$
 $= \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$

1045. $x = e^{2t} \cos^2 t, y = e^{2t} \sin^2 t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}(\sin^2 t + \sin t \cos t)}{2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t \cos t)}$
 $= \frac{\sin t \cdot \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t \cdot \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$
 $= \operatorname{tg}t \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数}; \right.$
 $\left. t \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \right).$

1046. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

解 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}}} \left(-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$
 $= \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$
 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{1+t^2}}}$
 $\cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgnt}}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgnt} \quad (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但它的导函数不能用普通的公式求得.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时, x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$, y 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$. 于是,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{t=0} &= \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} \\ &= \begin{cases} 3\Delta t, & \Delta t > 0, \\ \Delta t, & \Delta t < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微, 因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在. 所以, 导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 的值不能从普通公式求得.

求下列隐函数的导函数 y'_x :

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$. 当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时, y' 等于甚么?

解 对 x 微分, 得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是,

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} (x \neq y).$$

$$y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=4}} = \frac{5}{2}, \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049. $y^2 = 2px$ (抛物线).

解 对 x 微分, 得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是,

$$y'_x = \frac{p}{y} (y \neq 0).$$

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y} (y \neq 0).$$

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (抛物线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} (x > 0, y > 0).$$

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053. $\text{arc tg } \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (对数螺线).

解 对 x 微分, 得

$$-\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2 + y^2}.$$

于是,

$$y'_x = \frac{x + y}{x - y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求 y'_x , 设:

(a) $r = a\varphi$ (阿基米得螺线);

(b) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (心脏形线);

(c) $r = ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$ 表极坐标.

解 $x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi$, 其中 $r = r(\varphi)$. 于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + r \cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos\varphi - r \sin\varphi}. \quad (1)$$

(a) $\frac{dr}{d\varphi} = a$, 代入(1)式得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a \sin\varphi + a \varphi \cos\varphi}{a \cos\varphi - a \varphi \sin\varphi} \\ &= \text{tg}(\varphi + \text{arc tg}\varphi). \end{aligned}$$

(b) $\frac{dr}{d\varphi} = -a \sin\varphi$, 代入(1)式得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-a\sin^2\varphi + a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi} \\
&= \frac{\cos 2\varphi + \cos\varphi}{\sin 2\varphi + \sin\varphi} \\
&= \frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \\
&= -\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2} \left(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3} \right).
\end{aligned}$$

(B) $\frac{dr}{d\varphi} = mae^{m\varphi}$, 代入(1)式得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi + ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi - ae^{m\varphi}\sin\varphi} \\
&= \frac{m\sin\varphi + \cos\varphi}{m\cos\varphi - \sin\varphi} \\
&= \operatorname{tg}\left(\varphi + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

§ 3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程 可微分的函数 $y = f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x, y)$ (图 2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是:

$$Y - y = y'(X - x)$$

及

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 X, Y 为切线或法线上的流动坐标, 而 $y' = f'(x)$ 为切点处导函数的值.

2° 切线长和法线长 PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线. 设 $\operatorname{tga} = y'$ (图 2.28). 我们得下列的值:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, PN = |yy'|,$$

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

3° 切线与切点的向径间的夹角 若 $r = f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM 所成的角(图 2.29), 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. 写出曲线 $y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$ 上 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(3, 0)$ 诸点处的切线和法线方程.

解 由于

$$y' = \sqrt[3]{3 - x} - \frac{x + 1}{3 \sqrt[3]{(3 - x)^2}},$$

所以, 在 A 点的切线方程为

$$y - 0 = y'|_{x=-1}(x + 1), \text{ 即 } y = \sqrt[3]{4}(x + 1);$$

法线方程为

$$y - 0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x + 1),$$

$$\text{即 } y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x + 1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y - 3 = y'|_{x=2}(x - 2), \text{ 即 } y = 3;$$

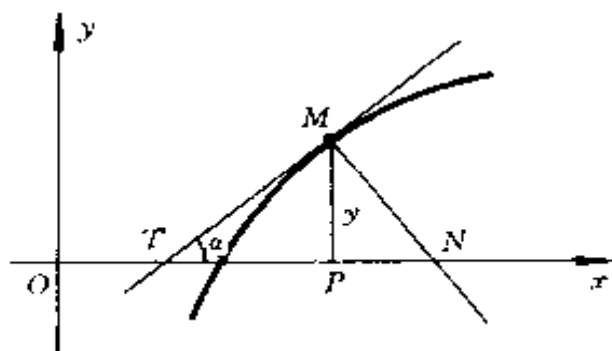


图 2.28

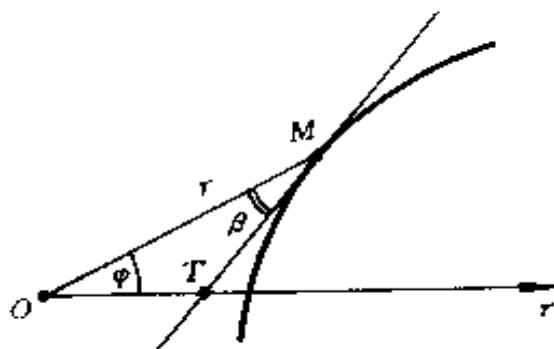


图 2.29

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点, 由于 y' 为无穷, 故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线 (a) 平行于 Ox 轴; (b) 平行于第一象限角的平分线?

解 由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以, 有

$$(a) \text{ 令 } y' = 0, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}, y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

故在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 处其切线平行于 Ox 轴;

(b) 令 $y' = 1$, 则 $x = 0, y = 2$, 故在点 $(0, 2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线.

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等.

解 如图 2.30 所示, 显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$. 由于 $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$, 故在点 A, B 处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned}
 k_A &= y' |_{x=x_1} = 2ax_1 - a(x_1 + x_2) \\
 &= a(x_1 - x_2) = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\pi - \beta),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

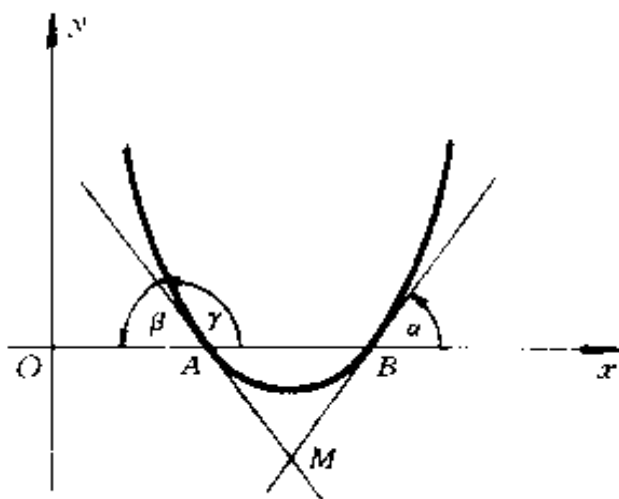


图 2.30

$$\begin{aligned}
 k_B &= y' |_{x=x_2} = 2ax_2 - a(x_1 + x_2) \\
 &= a(x_2 - x_1) = \operatorname{tga},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

由(2)式得

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2).
 \tag{3}$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

上求出“曲线的坡度”(即是 $|y'|$) 大于 1 的区域.

解 由于 $y' = 2\cos x$, 故要 $|y'| > 1$, 只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi,$$

此即所求的区域.

1059. 函数 $y = x$ 及 $y_1 = x + 0.01 \cdot \sin 1000\pi x$ 二者相差不大于 0.01, 则这些函数的导函数的差的最大值为何? 作出对应的图形.

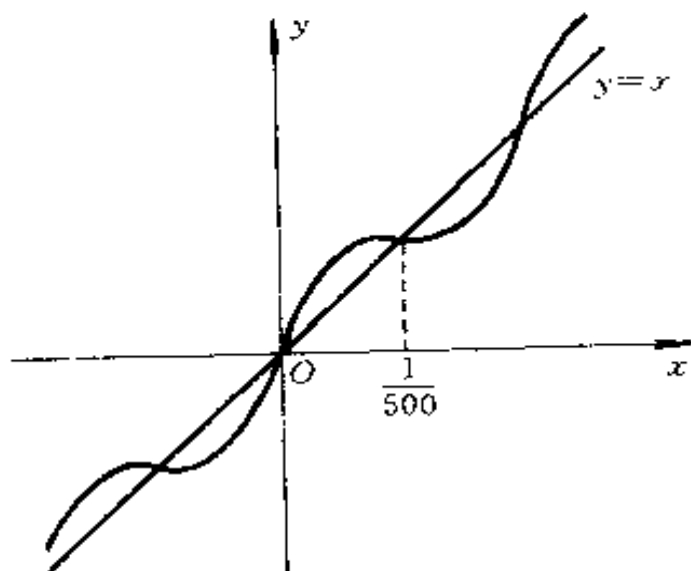


图 2.31

解 导函数差的最大值

$$\max |y' - y_1'| = \max |10\pi \cdot \cos 1000\pi x| = 10\pi \approx 31.4.$$

由此可见, 两函数相差甚微时(图 2.31), 其导函数却可相差很大.

如图 2.32 所示.

1060. 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

解 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴的交点为 $(1, 0)$, 设曲线与 Ox 轴的相交角为 α , 则

$$\operatorname{tg} \alpha = y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1,$$

故交角 α 为 45° .

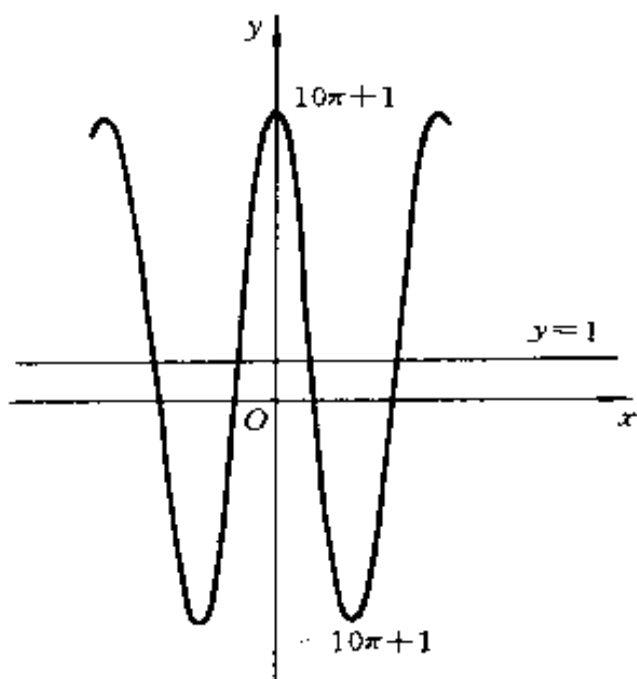


图 2.32

1061. 曲线 $y = x^2$ 及 $x = y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$. 由于导数为

$$y' = 2x \text{ 及 } y' = \frac{1}{2y},$$

故在 $(0,0)$ 点两曲线的交角显然为 90° .

在 $(1,1)$ 点两切线的斜率分别为

$$k_1 = 2 \text{ 及 } k_2 = \frac{1}{2},$$

故其交角 θ 的正切为

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

1062. 曲线 $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 相交的角如何?

解 先求交点. 解

$$\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \cos x, \end{cases}$$

得 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k 为整数).

其次, 求两曲线在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处切线的斜率:

$$k_1 = (\sin x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_2 = (\cos x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处, 交角 θ (今取锐角, 即 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 满足

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right| \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 32'.$$

1063. 当如何选择参数 n , 以使曲线

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx \quad (n > 0)$$

与 Ox 轴相交所成的角大于 89° ?

解 曲线 $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx$ 与 Ox 轴的交点为 $(k\pi, 0)$ (k 为整数). 不妨取 $0 \leq x < \pi$, 则交点为 $O(0, 0)$. 交角的正切为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n}{1 + n^2 x^2} \Big|_{x=0} = n.$$

$\theta > 89^\circ$, 相当于 $\operatorname{tg}\theta > \operatorname{tg}89^\circ = 57.29$, 即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线: (a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处,

(6) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

解 (a) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2}} \cdot a^2 \right] \\ &= -|a|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2}} \cdot a^2 = |a|. \end{aligned}$$

所以, 于点 $x = 0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2|a|}{|a|^2 - 1}, \text{ 即 } \theta = 2\arcsin \frac{1}{|a|}.$$

(6) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1, \end{aligned}$$

同理, $y', (1) = -1$. 因此, 左、右切线的斜率互为负倒数, 所以, 夹角为 90° .

1065. 证明对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β , 由于

$$r = ae^{m\varphi}, r' = ame^{m\varphi},$$

所以 $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$, 它为一常数, 故 β 为一常量.

1066. 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x, y)$ 的次切线长为 l_T , 如图 2.33 中的 $|PT|$, 则

$$\begin{aligned} l_T &= \left| \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} \right| = \left| \frac{y}{y'} \right| \\ &= \left| \frac{ax^n}{nax^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{n} \right|. \end{aligned}$$

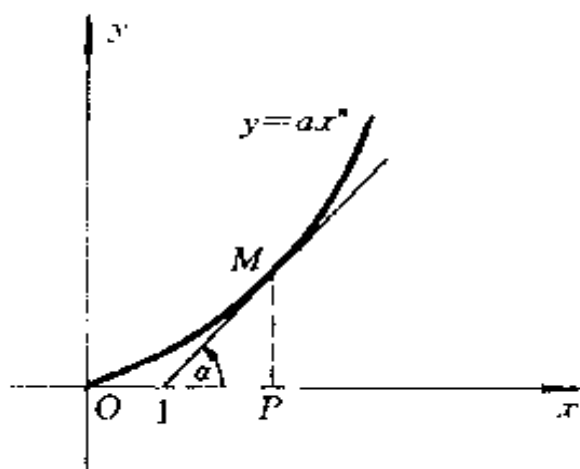


图 2.33

由此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线 $y = ax^n$ 上任一点 $M(x, y)$, 由此点向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 再在 Ox 轴上取点 T , 使 $|PT| = \frac{|x|}{n}$ (当然, 只是在 P 的一侧取点 T , 若在此点 $yy' > 0$, 则在 P 点的左侧取 T ; 若在此点 $yy' < 0$, 则在 P 点的右侧取 T . 以后不再说明), 然后联接 MT , 则 MT 就是所求的切线.

1067. 证明抛物线 $y^2 = 2px$ 的 (a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍; (6) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证 (a) 次切线长为

$$l_T = |PT| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{y}{\frac{p}{y}} \right| \\ = \left| \frac{y^2}{p} \right| = \left| \frac{2px}{p} \right| = 2|x|,$$

所以,次切线长为切点横坐标的两倍.

$$(6) \text{ 次法线长为 } l_N = |PN| = |yy'| = \left| y \cdot \frac{p}{y} \right| = |p|,$$

所以,次法线长为一常量.

由此,抛物线的切线可以这样作:由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P . 由于 $yy' = p$, 故当 $p > 0$ ($p < 0$) 时,在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T , 如图 2.34, 使 $|PT| =$

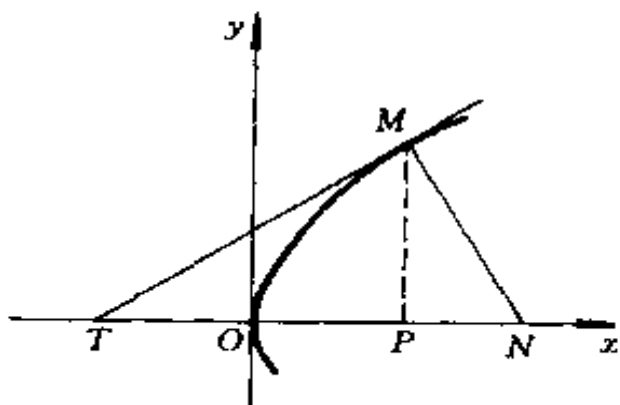


图 2.34

$2|x|$, 联结 MT , 此即所求的切线.

1068. 证明指数曲线 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为

$$l_T = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{a^x}{a^x \ln a} \right| = \frac{1}{|\ln a|}.$$

从而 l_T 为常量.

由此,该曲线的切线可以这样作:对于曲线 $y = a^x$ 上任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P . 由于当 a

> 1 时 $yy' > 0$, 当 $0 < a < 1$ 时 $yy' < 0$, 故在 Ox 轴上点 P 的左侧 (当 $a > 1$ 时) 或右侧 (当 $0 < a < 1$ 时) 取点 T , 使 $|PT| = \frac{1}{|\ln a|}$, 联接 MT , 此即所求的切线 (图 2.35).

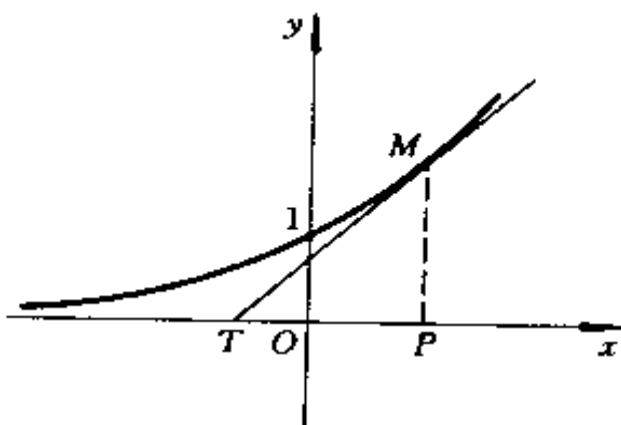


图 2.35

1069. 求悬链线

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$\begin{aligned} & |MN| \\ &= |y| \sqrt{1 + y'^2} \Big|_{(x_0, y_0)}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} y' &= a \cdot \frac{1}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \\ \sqrt{1 + y'^2} &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \left| \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right| \\ &= \left| \frac{y}{a} \right|, \end{aligned}$$

故

$$|MN| = |y_0| \cdot \left| \frac{y_0}{a} \right| = \frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN| = \frac{y_0^2}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$) 处, 其切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2} \text{ 及 } l_y = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是, 切线在两坐标轴间的部分长为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

由于,

$$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0 \sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0 \sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{x_0^2 y_0^2} (\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\ &= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

故 $l = a$, 即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 则系数 a, b, c 间的关系如何?

解 由方程 $y = ax^2 + bx + c$ 求得导数 $y' = 2ax + b$. 要抛物线与 Ox 轴相切, 需 $y' = 0$, 所以

$$2ax + b = 0,$$

即

$$x = -\frac{b}{2a}; \quad (1)$$

另一方面, 切点的横坐标满足:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

即

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式, 得

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此即所求的 a, b, c 间的关系.

1072. 在甚么条件下, 三次抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y = x^3 + px + q$ 求得 $y' = 3x^2 + p$. 要此曲线与 Ox 轴相切, 必须满足

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0. & (2) \end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2 + p) = -q$, 两端平方, 则

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2. \quad (3)$$

以(1)式代入(3)式, 得

$$-\frac{p}{3} \cdot \left(-\frac{p}{3} + p\right)^2 = q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

解 按题意, 我们有

$$(ax^2)' = (\ln x)',$$

即

$$x^2 = \frac{1}{2a} \quad (a \neq 0),$$

从而 $y = a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$.

同时, 由于在切点相切, 其纵坐标也必需相等, 所以

$$\ln x = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \sqrt{e}.$$

最后得到

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y = f(x) \quad [f(x) > 0]$$

及 $y = f(x)\sin ax,$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数, 于公共点彼此相切.

证 解曲线方程

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x)\sin ax, \end{cases}$$

得 $\sin ax = 1, x = \frac{(4k+1)\pi}{2a}$ (k 为整数), 这就是两曲线交点的横坐标. 两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned} k_1 &= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right), \\ k_2 &= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right) \sin \left(\frac{4k+1}{2} \pi \right) \\ &\quad + a \cos \left(\frac{4k+1}{2} \pi \right) f \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right) \\ &= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right). \end{aligned}$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切.

1075. 证明双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网, 就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2x - 2yk_1 = 0$, 所以,

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足: $y + xk_2 = 0$, 所以,

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x} \right) = -1.$$

因此, 两双曲线交成直角, 故此两曲线族形成一正交网.

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

及 $y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$

形成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a - x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点 $y^2 = 4a(a - x)$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2yk_1 = -4a$, 所以,

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 的切线的斜率 k_2 满足: $2yk_2 = 4b$, 所以,

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \quad (1)$$

但点 $P(x, y)$ 同时在这两条抛物线上, 故

$$4a(a - x) = 4b(b + x).$$

于是, $x = a - b$, 所以

$$y^2 = 4a(a - a + b) = 4ab. \quad (2)$$

以(2)式代入(1)式, 得知在交点处, 两切线的斜率满足

$$k_1 k_2 = -1,$$

故此两切线直交. 由此可知, 该两抛物线族形成正交网.

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于(a) $t = 0$, (b) $t = 1$ 各点处的切线和法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t),$$

所以,有

(a) 当 $t = 0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}.$$

切线方程为

$$y = \frac{3}{2}x, \text{即 } 3x - 2y = 0,$$

法线方程为

$$y = -\frac{2}{3}x, \text{即 } 2x + 3y = 0.$$

(6) 当 $t = 1$ 时,

$$x = 1, y = 2, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - 2 = 3(x - 1), \text{即 } 3x - y - 1 = 0,$$

法线方程为

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1), \text{即 } x + 3y - 7 = 0.$$

1078. 写出曲线

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

在(a) $t = 0$, (6) $t = 1$, (B) $t = \infty$ 各点的切线与法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2t - 4t^3 + t^4}{2 + 2t - 4t^3 - t^4},$$

所以,有

(a) 当 $t = 0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(6) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(B) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

(意即: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -1$).

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\Big|_{t=t_0} &= \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\Big|_{t=t_0} \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\Big|_{t=t_0} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

于是,切线方程为

$$y - a(1 - \cos t_0) = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2} \cdot [x - a(t_0 - \sin t_0)],$$

化简得

$$y - 2a = (x - at_0)\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

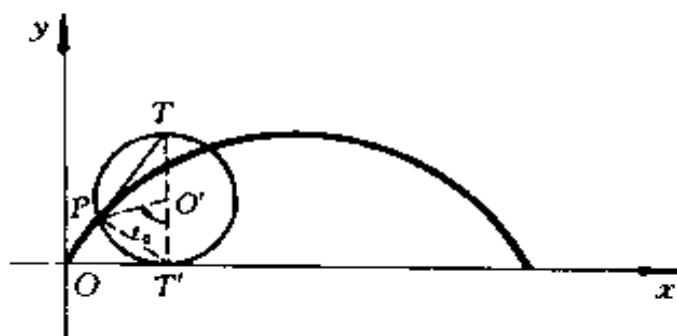


图 2.36

由此可知,切线通过点 $(at_0, 2a)$, 其斜率为 $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$. 如图 2.36 中所示, $\angle T'O'P = t_0$, 而

$$O'I' = \widehat{T'P} = at_0, T'T = 2a,$$

故 T 点的坐标为 $(at_0, 2a)$, 它在切线上. 其次, 联接 PT 及 PT' , 则 $PT' \perp PT$,

$$\begin{aligned}k_{PT} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle PTT' \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t_0}{2} \right) \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

这样, PT 就通过点 $(at_0, 2a)$, 且其斜率为 $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$, 所以,

直线 PT 即为所求的切线. 于是摆线的切线可以这样作: 先联接切点与滚动的圆的接触点(即点 P), 然后, 过 P 作其垂直线, 此即所求的切线.

1080. 证明曳物线

$$\begin{aligned}x &= a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \operatorname{cost} \right), \\y &= a \operatorname{sint} \quad (a > 0, 0 < t < \pi)\end{aligned}$$

有一定长的切线段.

证 切线段的长 $= \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x}$, 而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \operatorname{cost}}{a \left(\frac{1}{\operatorname{sint}} - \operatorname{sint} \right)} = \frac{\operatorname{sint}}{\operatorname{cost}},$$

所以

$$\begin{aligned}\left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x} &= \left| \frac{a \operatorname{sint}}{\operatorname{sint}} \right| \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sin}^2 t}{\operatorname{cos}^2 t}} \\&= |a| |\operatorname{cost}| \cdot \frac{1}{|\operatorname{cost}|} \\&= |a|,\end{aligned}$$

这是一个常量, 故曳物线有定长的切线段.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4).$

解 由于

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以,切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6), \text{即 } 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6), \text{即 } 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082. $xy + \ln y = 1, M(1, 1)$.

解 先求 y' . 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x + y}, \quad y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2},$$

故切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1), \text{即 } x + 2y - 3 = 0;$$

法线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1), \text{即 } 2x - y - 1 = 0.$$

§ 4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变数为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$, 则此增量的线性主部称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx$$

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y' = f'(x)$, 且有

$$dy = y'dx. \quad (1)$$

若自变数 x 为另一自变数的函数, 公式(1)于这种情形下仍然有效 (一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计 为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$, 当 $|\Delta x|$ 充分小时, 它的相对误差可以任意地小.

特别情形, 若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$, 则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来:

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]' \Delta x| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \right|.$$

1083. 设:

$$(a)\Delta x = 1, (b)\Delta x = 0.1, (B)\Delta x = 0.01,$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出: (1) $\Delta f(1)$, (2) $df(1)$, 并比较它们.

$$\begin{aligned} \text{解 } \Delta f(1) &= f(1 + \Delta x) - f(1) \\ &= (\Delta x + 1)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1) \end{aligned}$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下:

	Δx	$\Delta f(1)$	$df(1)$
		$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(a)	$\Delta x = 1$	5	1
(б)	$\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в)	$\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出,当 Δx 值愈小时, $\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小.

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒来度量, x 以公尺来度量. 设 (a) $\Delta t = 1$ 秒, (б) $\Delta t = 0.1$ 秒, (в) $\Delta t = 0.001$ 秒, 对 $t = 2$ 秒的时刻, 求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx , 并作比较.

解 $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x_t' |_{t=2} \cdot \Delta t = 10t |_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(a) 当 $\Delta t = 1$ 秒时,

$$\Delta x = 25 \text{ 公尺}, dx = 20 \text{ 公尺};$$

(б) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时,

$$\Delta x = 2.05 \text{ 公尺}, dx = 2 \text{ 公尺};$$

(B) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时,

$$\Delta x = 0.020005 \text{ 公尺}, dx = 0.02 \text{ 公尺}.$$

由上可以看出,当 Δt 愈小时, $\Delta x - dx$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分:

$$1085. y = \frac{1}{x}.$$

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{x^2}, dy = -\frac{1}{x^2}dx (x \neq 0).$$

$$1086. y = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2},$$

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

$$1087. y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2},$$

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} (|x| \neq |a|).$$

$$1088. y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$1089. y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (|x| < |a|).$$

1090. (a) $d(xe^x)$; (б) $d(\sin x - x \cos x)$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; (г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$; (е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(ж) $d \ln(1-x^2)$; (з) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$;

(и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]$

解 (a) $d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x+1)dx$;

(б) $d(\sin x - x \cos x) = (\sin x - x \cos x)' dx$
 $= x \sin x dx$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4} dx \quad (x \neq 0)$;

(г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} dx$
 $= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx \quad (x > 0)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

(е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx$
 $= \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1)$;

$$(*) d\ln(1-x^2) = -\frac{2xdx}{1-x^2} \quad (|x| < 1);$$

$$\begin{aligned} (3) d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &\quad \cdot \frac{|x|}{x} dx \\ &= \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H) d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right) \\ &= \left[\frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos x} \right] dx \\ &= \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数} \right). \end{aligned}$$

设 u, v, w 为 x 的可微分的函数. 求函数 y 的微分, 设:

1091. $y = uvw.$

解 $dy = uvdu + uvdv + uvdw.$

1092. $y = \frac{u}{v^2}.$

解 $dy = \frac{v^2 du - 2uv dv}{v^4}$
 $= \frac{v du - 2u dv}{v^3} \quad (v \neq 0).$

1093. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$

解 $dy = -\frac{1}{2(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2udu + 2v dv)$

$$= \frac{udu + vdv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (u^2 + v^2 > 0).$$

1094. $y = \arctg \frac{u}{v}$.

解 $dy = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{vdu - u dv}{v^2}$
 $= \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0, v \neq 0).$

1095. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

解 $dy = \frac{2udu + 2v dv}{2(u^2 + v^2)}$
 $= \frac{udu + v dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0).$

1096. 求

(a) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9)$; (6) $\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^+$;

(B) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; (r) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

(D) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

解 (a) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9)$
 $= \frac{d}{dx^3}[x^3 - 2(x^3)^2 - (x^3)^3]$
 $= 1 - 4x^3 - 3x^6;$

(6) 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 故不妨设 $x > 0$, 则

$$\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2x} \sin x}{x^2} \\
 &= \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3},
 \end{aligned}$$

显然,上述结果对于 $x < 0$ 也是正确的 ($x \neq 0$).

$$\begin{aligned}
 \text{(B)} \quad \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} &= \frac{\cos x dx}{-\sin x dx} \\
 &= -\operatorname{ctg} x \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(r)} \quad \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} &= \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)} \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right) \\
 &= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x \\
 &\quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(D)} \quad \frac{d(\operatorname{arc} \sin x)}{d(\operatorname{arc} \cos x)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = -1 \\
 &\quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

1097. 有半径为 $R = 100$ 厘米及圆心角 $\alpha = 60^\circ$ 的扇形. 若(a) 其半径 R 增加 1 厘米; (b) 角 α 减小 $30'$, 则扇形面积的变化若干? 求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2} R^2 \alpha$, 其增量

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= \frac{\alpha}{2} [(R + \Delta R)^2 - R^2] \\
 &= \alpha R \Delta R + \frac{1}{2} \alpha (\Delta R)^2,
 \end{aligned}$$

或

$$\Delta A = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha dR,$$

或

$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\alpha.$$

增量是精确的解,微分是近似的解.

(a) 当 $R = 100, \alpha = \frac{\pi}{3}, \Delta R = 1$ 时,

$$\Delta A = \frac{\pi}{6} (200 + 1) = 105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7 \text{ 平方厘米(增加)}.$$

(6) 当 $\Delta \alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360} \right) = -43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360} \right) \\ &= -43.6 \text{ 平方厘米(减少)}. \end{aligned}$$

1098. 单摆振动的周期(以秒计算)按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以厘米计, $g = 981$ 厘米/每秒² 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 0.05 秒, 对摆长 $l = 20$ 厘米的长度需要作多少修改?

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将 $dT = 0.05$, $g = 981$, $l = 20$ 代入上式, 即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

利用函数之微分代替函数的增量, 求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$, 则

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1.02} &= f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \\ &= 1 + 0.0066, \end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100. $\sin 29^\circ$.

解 设 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, 则

$$\sin 29^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = 0.4849.$$

1101. $\cos 151^\circ$.

解 设 $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, 则

$$\cos 151^\circ \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = -0.8748.$$

1102. $\text{arc tg} 1.05$.

解 设 $f(x) = \text{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, 则

$$\begin{aligned} \text{arctg} 1.05 &\approx \text{arc tg} 1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.8104(\text{弧度}) = 46^\circ 26'. \end{aligned}$$

1103. $\lg 11$.

解 $\lg 11 = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \lg 1.1$.

设 $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, 则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1 + \frac{0.1}{\ln 10} = \frac{0.1}{2.3026} = 0.0434.$$

于是

$$\lg 11 \approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 间的关系式 $A \ll B$ 表示 A 与 B 相比较时, A 为高阶无穷小).

利用这个公式近似地计算:

(a) $\sqrt{5}$; (б) $\sqrt{34}$; (в) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比较.

证 设 $f(y) = \sqrt{y}$, $y_0 = a^2$, $\Delta y = x$, 则

$$\sqrt{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \Delta y$$

(当 $|\Delta y| \ll \sqrt{y_0}$ 时).

于是,

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}, \text{ (当 } |x| \ll a \text{ 时)}$$

(a) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$

查表: $\sqrt{5} = 2.24;$

(б) $\sqrt{34} = \sqrt{6^2 - 2} \approx 6 - \frac{2}{2 \cdot 6} = 5.833,$

查表: $\sqrt{34} = 5.831;$

(в) $\sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{2 \cdot 11} = 10.9546,$

查表： $\sqrt{120} = 10.9545$.

1105. 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} (a > 0).$$

其中 $|x| \ll a$. 利用此公式近似地计算：

(a) $\sqrt[3]{9}$; (b) $\sqrt[4]{80}$; (B) $\sqrt[7]{100}$;

(r) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y) = \sqrt[n]{y}$, $y_0 = a^n$, $\Delta y = x$, 则

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n + x} &\approx \sqrt[n]{a^n} + \frac{x}{n \sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}} \\ &= a + \frac{x}{na^{n-1}} (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}). \end{aligned}$$

(a) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 2.083$,

查表： $\sqrt[3]{9} = 2.080$;

(b) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1} \approx 3 - \frac{1}{4 \cdot 3^3} = 2.9907$,

查表： $\sqrt[4]{80} = 2.9905$;

(B) $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} \approx 2 - \frac{28}{7 \cdot 2^6} = 1.938$,

查表： $\sqrt[7]{100} = 1.931$;

(r) $\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx 2 - \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1.9953$,

查表： $\sqrt[10]{1000} = 1.9953$.

1106. 正方形的边 $x = 2.4$ 米 ± 0.05 米. 由此计算所得正方

形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A = x^2$. 于是, 面积的相对误差为

$$\begin{aligned}\delta_A &= \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{2x\Delta x}{x^2} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \\ &= 2 \cdot \frac{0.05}{2.4} = 4.2\%;\end{aligned}$$

而绝对误差为

$$|\Delta A| = |2.45^2 - 2.4^2| = 0.24 \text{ 平方米.}$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%, 问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 从而

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = V \frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = 3 \left| \frac{dR}{R} \right|.$$

因而, 半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V \leq \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ (其中 l 为摆长, T 为摆振动的全周期) 以求重力加速度. 当测量 (a) 摆长 l , (b) 周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何?

解 (a) $\delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{dl}{l} \right|$, 于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

$$(6) \delta_g = \left| \frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l} \right| = 2 \left| \frac{dT}{T} \right|, \text{ 于是}$$

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期的相对误差的 2 倍.

1109. 求数 $x(x > 0)$ 的常用对数的绝对误差, 设此数的相对误差等于 δ .

解 设 $f(x) = \ln x$, 若数 δ 很小, 则有

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta.$$

因而, 所要求的绝对误差

$$\left| \lg(x + \Delta x) - \lg x \right| = \left| \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right|$$

$$= \left| \lg(1 + \delta) \right| = \frac{1}{\ln 10} \ln(1 + \delta) \approx 0.43\delta.$$

1110. 证明: 根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$d(\lg \operatorname{tg} \varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi \cos \varphi},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| \cdot |d(\lg \operatorname{tg} \varphi)|; \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi \ln 10},$$

于是

$$\begin{aligned} |d\varphi| &= \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \\ &\quad \cdot |d(\lg \sin \varphi)|. \end{aligned} \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式的右端,由于假设确定 $\lg \sin \varphi$ 与 $\lg \operatorname{tg} \varphi$ 时,具有同样的误差,而 $\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \geq 1 \geq |\cos \varphi|$, 故由(2)式所确定的 $|d\varphi|$ 不比(1)式的 $|d\varphi|$ 小. 这就证明了求角度时用正切对数表更为精确.

§ 5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义 函数 $y = f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots).$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变数,则应有:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

在这种情形下,下列公式正确

$$d^n y = y^n dx^n \text{ 及 } y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2° 基本公式:

$$I. (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0), (e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$II. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$III. (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$IV. (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$V. (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3° 莱布尼兹公式 若函数 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导函数 (可微分 n 次), 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v, C_n^i$ 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地对于微分 $d^n(uv)$ 得:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i} u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$.

求 y'' , 设:

$$1111. y = x \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解 } y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = \frac{4x \sqrt{1+x^2} - \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$
 $= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

($|x| < 1$).

1113. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$

1114. $y = \operatorname{tg}x.$

解 $y' = \frac{1}{\cos^2 x},$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arc} \operatorname{tg}x.$

解 $y' = 1 + 2x\operatorname{arctg}x,$

$$y'' = 2\operatorname{arctg}x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

1116. $y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\operatorname{arc} \sin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
&+ \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right) (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3x}{(1-x^2)} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

1117. $y = x \ln x$.

解 $y' = 1 + \ln x$, $y'' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$).

1118. $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$,

$$y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} \quad (f(x) > 0).$$

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$
 $+ x \cdot \frac{1}{x} [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]$
 $= 2\cos(\ln x)$,
 $y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x}$ ($x > 0$).

1120. 设 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$. 又

$$y' = e^{\sin x} [\cos x \cos(\sin x)$$

$$- \cos x \sin(\sin x)].$$

于是,

$$y'(0) = e^0[1 - 0] = 1.$$

而

$$\begin{aligned} y'' &= e^{\sin x} [\cos^2 x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad - \sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)] \\ &= e^{\sin x} \{-2\cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x [\sin(\sin x) - \cos(\sin x)]\}, \end{aligned}$$

于是,

$$y''(0) = e^0\{0 + 0\} = 0.$$

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为可微分二次的函数. 求 y'' ,
设:

1121. $y = u^2.$

解 $y' = 2uu',$

$$y'' = 2u'^2 + 2uu'' = 2(u'^2 + uu'').$$

1122. $y = \ln \frac{u}{v},$

解 $y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$

$$y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2} (uv > 0).$$

$$1123. y = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$y'' = \frac{(uu'' + u'^2 + vv'' + v'^2) \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{(uu' + vv')^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2}$$

$$= \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - v'u)^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2 + v^2 > 0).$

$$1124. y = u^v (u > 0).$$

$$\text{解 } y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right],$$

$$y'' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right)^2$$

$$+ u^v \left[v'' \ln u + \frac{u'v'}{u} \right. \\ \left. + \frac{(u'v' + vu'')u - vu'^2}{u^2} \right]$$

$$= u^v \left[\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right)^2 + v'' \ln u \right. \\ \left. + \frac{2u'v'}{u} + \frac{v}{u^2} (uu'' - u'^2) \right].$$

设 $f(x)$ 为可微分三次的函数. 求 y'' 及 y''' , 设:

$$1125. y = f(x^2).$$

$$\text{解 } y' = 2xf'(x^2),$$

$$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2),$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2) \\
 &= 12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2).
 \end{aligned}$$

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\quad - \frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\quad - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).
 \end{aligned}$$

1127. $y = f(e^x)$.

解 $y' = e^x f'(e^x)$,

$$y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

1128. $y = f(\ln x)$.

解 $y' = \frac{1}{x} f'(\ln x)$,

$$y'' = -\frac{1}{x^2} f'(\ln x) + \frac{1}{x^2} f''(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$\begin{aligned}
y''' &= -\frac{2}{x^3} [f''(\ln x) - f'(\ln x)] \\
&\quad + \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - f''(\ln x)] \\
&= \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)] \\
&\quad (x > 0).
\end{aligned}$$

1129. $y = f[\varphi(x)]$, 其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数.

解 $y' = \varphi'(x)f'[\varphi(x)],$

$$y'' = \varphi'^2(x)f''[\varphi(x)] + \varphi''(x)f'[\varphi(x)],$$

$$y''' = \varphi'^3(x)f'''[\varphi(x)]$$

$$+ 2\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)]$$

于是,

$$d^2y = \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132. $y = \frac{\ln x}{x}.$

解 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$

于是,

$$d^2y = \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2 \quad (x > 0).$$

1133. $y = x^x.$

解 $y' = x^x(1 + \ln x),$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right],$$

于是,

$$d^2y = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2 \quad (x > 0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数, 求 d^2y , 设:

1134. $y = uv.$

解 $dy = u dv + v du,$

$$\begin{aligned} d^2y &= d(u dv) + d(v du) \\ &= u d^2v + 2dudv + v d^2u. \end{aligned}$$

1135. $y = \frac{u}{v}.$

解 $dy = \frac{v du - u dv}{v^2},$

$$d^2y = \frac{v^2(dvdu + vd^2u - dudv - ud^2v) - 2vdv(vdu - udv)}{v^4}$$

$$= \frac{v(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - udv)}{v^3} \quad (v \neq 0)$$

1136. $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数).

解 $dy = mu^{m-1}v^n du + nu^m v^{n-1} dv,$

$$d^2y = m(m-1)u^{m-2}v^n du^2$$

$$+ mu^{m-1}(v^n d^2u + nv^{n-1} dudv)$$

$$+ mnu^{m-1}v^{n-1} dudv$$

$$+ nu^m(n-1)v^{n-2}dv^2 + nu^m v^{n-1} d^2v$$

$$= u^{m-2}v^{n-2} \{ [m(m-1)v^2 du^2$$

$$+ 2mnuvdudv + n(n-1)u^2 dv^2]$$

$$+ uv(mvd^2u + nud^2v) \}.$$

1137. $y = a^x$ ($a > 0$).

解 $dy = a^x \ln a dx,$

$$d^2y = a^x \ln^2 a \cdot du^2 + a^x \ln a \cdot d^2u$$

$$= a^x \ln a (\ln a \cdot du^2 + d^2u) \quad (a > 0).$$

1138. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

解 $dy = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2},$

$$d^2y = \frac{(u^2 + v^2)(du^2 + ud^2u + dv^2 + vd^2v) - 2(udu + vdv)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(v^2 - u^2)du^2 - 4uvdudv + (u^2 - v^2)dv^2 + (u^2 + v^2)(ud^2u + vd^2v)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &\quad (u^2 + v^2 > 0). \end{aligned}$$

1139. $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$.

解 $dy = \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2}$,

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) - 2(udu + vdv)(vdu - udv)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) + 2uv(dv^2 - du^2) + 2(u^2 - v^2)dudv}{(u^2 + v^2)^2} \\ &\quad (v \neq 0). \end{aligned}$$

求以参数给出的函数 $y = y(x)$ 的导函数 y'_x , y''_x , y'''_x , 设:

1140. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

解 $y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(t + 1)$,

$$y''_x = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 - 2t} = \frac{3}{4(1 - t)}$$

$$\begin{aligned} y'''_x &= \frac{\frac{dy''_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{4(1 - t)^2}}{2 - 2t} \\ &= \frac{3}{8(1 - t)^3} (t \neq 1). \end{aligned}$$

1141. $x = a \cos t, y = a \sin t.$

解 $y'_x = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctgt},$

$$y''_x = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-a \sin t} = -\frac{1}{a \sin^3 t},$$

$$y'''_x = \frac{\frac{3 \cos t}{a \sin^4 t}}{-a \sin t} = -\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}$$

($t \neq k\pi, k$ 为整数).

1142. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

解 $y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$

$$y''_x = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}},$$

$$y'''_x = \frac{\frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin^5 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}}$$

($t \neq 2k\pi, k$ 为整数).

1143. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t.$

解 $y'_x = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right), \\
y_x'' &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right) e^t (\cos t - \sin t)} \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}, \\
y_x''' &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \left[-\cos^{-3}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) + 3\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \right]}{e^t (\cos t - \sin t)} \\
&= \frac{e^{-2t} (2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数} \right).
\end{aligned}$$

1144. $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

解 $y_x' = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y_x'' = \frac{1}{f''(t)},$$

$$y_x''' = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2} = -\frac{f(t)}{[f''(t)]^3}$$

($f''(t) \neq 0$).

1145. 设函数 $y = f(x)$ 是可微分若干次的. 求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导函数 $x', x'', x''', x^{(4)}$ (设这些导函数都存在).

解 $x' = \frac{1}{y'},$

$$\begin{aligned}
x'' &= -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dy} \\
&= -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3}, \\
x''' &= -\frac{y''' \cdot \frac{1}{y'} y'^3 - 3y'^2 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} \cdot y''}{y'^6} \\
&= -\frac{y' y''' - 3y''^2}{y'^5}, \\
x^{(4)} &= -\frac{y'^5 \left(\frac{y''}{y'} y''' + y^{(4)} - 6y'' y''' \cdot \frac{1}{y'} \right)}{y'^{10}} \\
&\quad - \frac{5y'^4 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} (y' y''' - 3y''^2)}{y'^{10}} \\
&= -\frac{y'^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7} \quad (y' \neq 0).
\end{aligned}$$

求由下列隐函数给出的 $y = y(x)$ 的 y'_x , y''_x 及 y'''_x :

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y' , y'' 及 y''' 等于甚么?

解 $y' = -\frac{x}{y},$

$$\begin{aligned}
y'' &= -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} \\
&= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},
\end{aligned}$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3,4)$ 点, 得

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147. $y^2 = 2px.$

解 $y' = \frac{p}{y}, y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3},$

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4}y' = \frac{3p^3}{y^5} (y \neq 0).$$

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1.$

解 对 x 微分, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \quad (1)$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \quad (2)$$

将(1)式两端再对 x 微分, 得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \quad (3)$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式, 得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}. \quad (4)$$

将(3)式两端对 x 微分, 得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \quad (5)$$

将(2)式及(4)式代入(5)式, 得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5} (x \neq 2y).$$

求 y'_x 及 y''_x , 设:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4.$

解 对 x 微分, 得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad (1)$$

再对 x 微分, 得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得

$$y' = \frac{2x^3 y}{1 + y^2},$$

$$y'' = \frac{2x^2 y}{(1 + y^2)^3} [3(1 + y^2)^2 + 2x^4(1 - y^2)].$$

1150. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} (a > 0).$

解 取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

对 x 微分, 得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

于是

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

将上式对 x 微分, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x \cdot \frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3} \quad (x \neq y, x \neq 0). \end{aligned}$$

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leq x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a, b 及 c , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{若 } x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在, 所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0),$$

也即

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} [a(x-x_0)^2 \\ &+ b(x-x_0) + c] = f(x_0). \end{aligned}$$

于是, $c = f(x_0)$. 其次, 由 $F'(x_0-0) = F'(x_0+0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x-x_0) + b] \Big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''(x_0-0) = F''(x_0+0)$ 得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度. 在 $t = 2$ 的时刻, 速度与加速度等于甚么?

解 速度

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t, v|_{t=2} = 0;$$

而加速度

$$j = \frac{d^2s}{dt^2} = -10, j|_{t=2} = -10.$$

1153. 点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 均匀地运动, 每 T 秒走完一圈. 求点 M 在 Ox 轴上的射影之速度 v 及加速度 j , 设 $t = 0$ 时点的位置为 $M_0(a, 0)$.

解 设 M 点的坐标为 (x, y) , 由于 $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$, 从而

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t,$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

1154. 质点 $M(x, y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去. 建立(空气的阻力略去不计)运动的方程并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道. 最大的高度和射程等于多少?

解 若不考虑空气的阻力,则有

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程,得

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

即轨道为一抛物线. 速度

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha}, \end{aligned}$$

而加速度

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{0 + (-g)^2} = g. \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

在最大高度处, $\frac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

于是,最大高度为

$$\begin{aligned}
 H_{\max} &= \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha \\
 &= \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \\
 &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.
 \end{aligned}$$

上式也可从 $\frac{dy}{dt} = 0$, 解出 $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, 再以 t 值代入 y 的表达式而得到. 在最大射程处有: $y = 0$. 于是

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

解得

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

从而, 最大射程为 $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

1155. 点运动的方程为

$x = 4\sin \omega t - 3\cos \omega t$, $y = 3\sin \omega t + 4\cos \omega t$, (ω 为常数). 求运动的轨道, 速度与加速度的大小.

解 由于

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 16\sin^2 \omega t + 9\cos^2 \omega t \\
 &\quad - 24\sin \omega t \cos \omega t + 9\sin^2 \omega t \\
 &\quad + 16\cos^2 \omega t + 24\sin \omega t \cos \omega t \\
 &= 25(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 25.
 \end{aligned}$$

所以, 运动的轨道为一以原点为中心, 5 为半径的圆.

其次,速度与加速度的大小分别为

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(4\omega\cos\omega t + 3\omega\sin\omega t)^2 + (3\omega\cos\omega t - 4\omega\sin\omega t)^2} \\
 &= 5|\omega|, \\
 j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t + 3\omega^2\cos\omega t)^2 + (-4\omega^2\cos\omega t - 3\omega^2\sin\omega t)^2} \\
 &= 5\omega^2.
 \end{aligned}$$

求下列指定的阶的导函数:

1156. $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$; 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式, 最高次数为 6 次, 因而

$$y^{(6)} = 1 \cdot 2^2 \cdot 1^3 \cdot 6! = 4 \cdot 6! = 2880,$$

$$y^{(7)} = 0.$$

1157. $y = \frac{a}{x^m}$; 求 y''' .

解 $y' = -amx^{-m-1},$

$$y'' = am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y''' = -am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$

$$= -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} (x \neq 0).$$

1158. $y = \sqrt{x}$; 求 $y^{(10)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(10)} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}\right) \left(-\frac{9}{2}\right) \\ &\quad \left(-\frac{11}{2}\right) \left(-\frac{13}{2}\right) \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{17}{2}\right) x^{-\frac{19}{2}} \\ &= -\frac{17!!}{2^{10} \cdot x^9 \sqrt{x}} (x > 0), \end{aligned}$$

其中 $17!! = 1 \cdot 3 \cdots 17$.

1159. $y = \frac{x^2}{1-x}$; 求 $y^{(8)}$.

$$\text{解 } y = \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x} = -(x+1) + \frac{1}{1-x},$$

$$y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$y''' = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4},$$

.....

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} (x \neq 1).$$

1160. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; 求 $y^{(100)}$.

解 $y = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, 利用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= \sum_{i=0}^{100} C_{100}^i (1+x)^{(i)} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100-i)} \\ &= (1+x) \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{100}^1 \cdot \left[(1-x) \cdot \frac{1}{2} \right]^{(99)} \\
& = (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{\frac{201}{2}} \\
& \quad + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{\frac{199}{2}} \\
& = \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} (x < 1).
\end{aligned}$$

1161. $y = x^2 e^{2x}$; 求 $y^{(20)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y^{(20)} & = x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2xC_{20}^1 \cdot (e^{2x})^{(19)} \\
& \quad + 2C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} \\
& = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).
\end{aligned}$$

1162. $y = \frac{e^x}{x}$; 求 $y^{(10)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y^{(10)} & = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i e^x \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{(10-i)} \\
& = e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}},
\end{aligned}$$

其中 $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$ 及 $A_{10}^0 = 1$.

1163. $y = x \ln x$; 求 $y^{(5)}$.

$$\text{解} \quad y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x},$$

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} (x > 0).$$

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$; 求 $y^{(5)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{1 - \ln x}{x^2}, \\
y'' &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} \\
&= -\frac{3 - 2\ln x}{x^3} \\
y''' &= -\frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6} \\
&= \frac{11 - 6\ln x}{x^4}, \\
y^{(4)} &= \frac{-\frac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8} \\
&= -\frac{50 - 24\ln x}{x^5}, \\
y^{(5)} &= -\frac{-\frac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}} \\
&= \frac{274 - 120\ln x}{x^6} (x > 0).
\end{aligned}$$

1165. $y = x^2 \sin 2x$; 求 $y^{(50)}$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y^{(50)} &= x^2 (\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)} \\
&\quad + 2C_{50}^2 (\sin 2x)^{(48)} \\
&= 2^{50} x^2 \sin \left(2x + \frac{50}{2} \pi \right) \\
&\quad + 100x \cdot 2^{49} \sin \left(2x + \frac{49}{2} \pi \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2^{49} \cdot \sin\left(2x + \frac{48}{2}\pi\right) \\
& = 2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x \\
& \quad + \frac{1225}{2} \sin 2x).
\end{aligned}$$

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y''' .

解 $y''' = \cos 3x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'''$

$$\begin{aligned}
& + C_3^1 (\cos 3x)' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'' \\
& + C_3^2 (\cos 3x)'' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)' \\
& + (\cos 3x)''' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \\
& = -\frac{28}{3^3} (-3)^3 \cdot \frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \\
& \quad + 3(-3 \sin 3x) \cdot \left(\frac{4}{3^2} \right) (-3)^2 \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} + 3 \cdot (-3^2 \cos 3x) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \\
& \quad \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} + 3^3 \sin 3x \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}} \\
& = \frac{28 - 27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x
\end{aligned}$$

$$+ \frac{27(1-3x)^2 - 36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x \left(x \neq \frac{1}{3} \right).$$

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; 求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数和, 差与其积的互化公式, 将 y 化简得

$$y = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

于是,

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \sin \left(4x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot 6^{10} \sin \left(6x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \sin \left(2x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &= -2^{18} \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x - 2^8 \sin 2x. \end{aligned}$$

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; 求 $y^{(100)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(100)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(100)} + C_{100}^1 (\operatorname{sh} x)^{(99)} \\ &= x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

1169. $y = e^x \cos x$; 求 $y^{(4)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= e^x (\cos x - \sin x), \\ y'' &= e^x [(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)] \\ &= -2e^x \sin x, \\ y''' &= -2e^x (\sin x + \cos x), \\ y^{(4)} &= -2e^x [(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)] \end{aligned}$$

$$= -4e^x \cos x.$$

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; 求 $y^{(6)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x \\ &= \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \ln x. \\ y^{(6)} &= \frac{(-1)^5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \ln x)^{(6)} \\ &= -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x \\ &\quad + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x. \end{aligned}$$

于下列各例中, 视 x 为自变数, 求指定的阶的微分.

1171. $y = x^5$; 求 $d^5 y$.

$$\text{解 } d^5 y = 5! dx^5 = 120 dx^5.$$

1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 求 $d^3 y$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^3 y &= \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) x^{-\frac{7}{2}} dx^3 \\ &= -\frac{15}{8x^3 \cdot \sqrt{x}} dx^3 (x > 0). \end{aligned}$$

1173. $y = x \cos 2x$; 求 $d^{10} y$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^{10} y &= (x \cos 2x)^{(10)} dx^{10} \\ &= \left[2^{10} x \cos \left(2x + \frac{10\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10 \cdot 2^9 \cos\left(2x + \frac{9}{2}\pi\right) dx^{10} \\
& = -1024(x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}.
\end{aligned}$$

1174. $y = e^x \ln x$; 求 $d^4 y$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad d^4 y &= (e^x \ln x)^{(4)} dx^4 \\
&= e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.
\end{aligned}$$

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; 求 $d^6 y$.

$$\text{解} \quad d^6 y = (\cos x \cdot \operatorname{ch} x)^{(6)} dx^6 = 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^6.$$

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数, 于下列各例中求指定的阶的微分.

1176. $y = u^2$; 求 $d^{10} y$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad d^{10} y &= d^{10}(u \cdot u) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^{10-i} u \cdot d^i u \\
&= u d^{10} u + 10 d^9 u \cdot du + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u \cdot d^2 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (d^5 u)^2 \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u d^8 u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10dud^9u + ud^{10}u \\
& = 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u \\
& \quad + 240d^3ud^7u + 420d^4ud^6u + 252(d^5u)^2.
\end{aligned}$$

1177. $y = e^u$; 求 d^4y .

解 $dy = e^u du,$

$$d^2y = e^u du^2 + e^u d^2u,$$

$$d^3y = e^u [(du^3 + dud^2u) + d(du^2) + d^3u]$$

$$= e^u (du^3 + 3dud^2u + d^3u),$$

$$d^4y = e^u [(du^4 + 3du^2d^2u + dud^3u)$$

$$+ d(du^2 \cdot du) + 3d(dud^2u) + d^4u]$$

$$= e^u (du^4 + 6du^2d^2u + 3d^2u^2 + 4dud^3u$$

$$+ d^4u).$$

1178. $y = \ln u$; 求 d^3y .

解 $dy = \frac{1}{u} du,$

$$d^2y = -\frac{1}{u^2} du^2 + \frac{1}{u} d^2u,$$

$$d^3y = \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{2}{u^2} dud^2u - \frac{1}{u^2} d^2u du$$

$$+ \frac{1}{u} d^3u$$

$$= \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{3}{u^2} dud^2u + \frac{1}{u} d^3u.$$

1179. 视 x 为某个自变数的函数, 由函数 $y = f(x)$ 求 d^2y, d^3y 及 d^4y .

解 $dy = f'(x)dx$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx d^2x + f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned} d^4y &= f^{(4)}(x)dx^4 + 3f'''(x)dx^2 d^2x \\ &\quad + 3f'''(x)dx^2 d^2x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + dx d^3x + f''(x)dx d^3x + f'(x)d^4x \\ &= f^{(4)}(x)dx^4 + 6f'''(x)dx^2 d^2x \\ &\quad + 4f''(x)dx d^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + f'(x)d^4x. \end{aligned}$$

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y = f(x)$ 的导函数 y'' 及 y''' , 但不假定 x 为自变量.

解 $y' = \frac{dy}{dx},$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y''' = \frac{d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明: 函数

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明: 函数

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证 $y' = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x,$

$$y'' = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明: 函数

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, λ_1 及 λ_2 为常数, 满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

证 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x},$

$$y'' = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x},$$

于是,

$$\begin{aligned} & y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y \\ &= C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \\ &\quad - C_1 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} - C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - C_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ &\quad + C_1 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

1184. 证明: 函数

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意常数, n 为常数, 满足方程:

$$x^2 y'' + (1 - 2n)x y' + (1 + n^2)y = 0.$$

证 $y' = n x^{n-1} [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$

$$+ x^{n-1} [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)],$$

$$y'' = x^{n-2} \{ (n^2 - n - 1) [C_1 \cos(\ln x)$$

$$+ C_2 \sin(\ln x)] + (2n - 1) [C_2 \cos(\ln x)$$

$$- C_1 \sin(\ln x)]\},$$

于是,

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y \\ &= x^n \{(n^2 - n - 1)[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ (2n - 1)[C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)]\} \\ &+ (1 - 2n)x^n \{n[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)]\} \\ &+ (1 + n^2)x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

1185. 证明: 函数

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程

$$y^{(4)} + y = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } y' &= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{C_4}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& + \frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \Big), \\
y'' = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} & \left(\frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\
& - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& \left. - \frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\
& + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& \left. - \frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
= e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} & \left(C_2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \\
y^{(4)} = (y'')'' = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} & \left(-C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(- C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& = -y,
\end{aligned}$$

于是,

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明:若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数,则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证 每求一次导函数,均要乘以因子 $(ax+b)' = a$,
所以.

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, 求 $P^{(n)}(x)$.

$$\text{解 } P'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

$$P''(x) = a_0 n(n-1) x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$+ \cdots + a_{n-2}$$

.....

$$P^{(n)}(x) = n! a_0.$$

求 $y^{(n)}$, 设:

$$1188. y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2};$$

$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3};$$

利用数学归纳法,可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}} \\ \left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

事实上,对于 $n=2$ 等式成立,设对于 n 等式成立,则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n-1)}} \\ = \frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立,于是得证.

$$1189. y = \frac{1}{x(1-x)}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} \\ = n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right] \\ (x \neq 0, x \neq 1).$$

$$1190. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$(x \neq 1, x \neq 2).$

1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

解 $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \dots$
 $\left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-2)^n (1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$
 $= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left(x < \frac{1}{2}\right).$

1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$

解 $y = \frac{(x+1) - 1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \dots$$

$$\left(-\frac{3n-5}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$- \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \dots$$

$$\left(-\frac{3n-2}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-5)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x)$$

$$+ (3n-2)]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-5)(3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

$$(n \geq 2; x \neq -1).$$

1193. $y = \sin^2 x.$

解 $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x,$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)} \\ &= 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

1194. $y = \cos^2 x.$

解 $y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -(\sin 2x)^{(n-1)} \\ &= -2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

1195. $y = \sin^3 x.$

解 $y = \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 2x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x \\ &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1196. $y = \cos^3 x.$

解 $y = \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos x (1 + \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x$$

$$= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1197. $y = \sin ax \sin bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$- \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1198. $y = \cos ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x + \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1199. $y = \sin ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a+b)^n \sin\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{1}{2} (a-b)^n \sin\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1200. $y = \sin^2 a x \cos b x.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos b x (1 - \cos 2a x)$
 $= \frac{1}{2} \cos b x - \frac{1}{4} \cos (2a + b)x$
 $- \frac{1}{4} \cos (2a - b)x.$

$y^{(n)} = \frac{1}{2} b^n \cos \left(b x + \frac{n}{2} \pi \right)$
 $- \frac{1}{4} (2a + b)^n \cos \left[(2a + b)x + \frac{n}{2} \pi \right]$
 $- \frac{1}{4} (2a - b)^n \cos \left[(2a - b)x + \frac{n}{2} \pi \right].$

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x)$
 $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$

$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos \left(4x + \frac{n}{2} \pi \right).$

1202. $y = x \cos a x.$

解 $y^{(n)} = x (\cos a x)^{(n)} + n (\cos a x)^{(n-1)}$
 $= a^n x \cos \left(a x + \frac{n}{2} \pi \right)$
 $+ n a^{n-1} \cos \left(a x + \frac{n-1}{2} \pi \right)$
 $= a^n x \cos \left(a x + \frac{n}{2} \pi \right)$

$$+ na^{n-1} \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1203. $y = x^2 \sin ax.$

解
$$y^{(n)} = a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) \\ + 2na^{n-1} x \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ + n(n-1)a^{n-2} \sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right) \\ = a^n \left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) \\ - 2na^{n-1} x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$

解
$$y^{(n)} = (-1)^n (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \\ + 2(-1)^{n-1} (x+1)e^{-x} \cdot n \\ + (-1)^{n-2} n(n-1)e^{-x} \\ = (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x \\ + (n-1)(n-2)].$$

1205. $y = \frac{e^x}{x}.$

解
$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^k \\ = e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}.$$

1206. $y = e^x \cos x.$

解 $y' = e^x(\cos x - \sin x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1207⁺. $y = e^x \sin x.$

解 $y' = e^x(\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1208. $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}$

解 $y' = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx},$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n b^n (n-1)!}{(a+bx)^n} + \frac{b^n (n-1)!}{(a-bx)^n}$$

$$= \frac{(n-1)! b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} [(a+bx)^n$$

$$+ (-1)^{n-1} (a-bx)^n] \left(|x| < \left| \frac{a}{b} \right| \right).$$

1209. $y = e^{ax}P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(n)} &= e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) \\ &\quad + \cdots + P^{(n)}(x)]. \end{aligned}$$

1210. $y = x \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(n)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(n)} + n(\operatorname{sh} x)^{(n-1)} \\ &= \frac{x}{2} [e^x - (-1)^n e^{-x}] \\ &\quad + \frac{n}{2} [e^x - (-1)^{n-1} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)e^x - (-1)^n (x-n)e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\ &\quad - (-1)^n (x-n)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)] \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x+n) - (-1)^n (x-n)] \operatorname{ch} x \\ &\quad + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \operatorname{sh} x \}. \end{aligned}$$

1211. 求 $d^n y$, 设 $y = x^n e^x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^n y &= y^{(n)} dx^n \\ &= e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + n! \right] dx^n. \end{aligned}$$

1212. 求 $d^n y$, 设 $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{解 } d^n y = y^{(n)} dx^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{(n)} \ln x + n \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-1)} \right. \\
&\quad + C_n^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-2)} \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{x} (\ln x)^{(n)} \left. \right] dx^n \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n (x > 0).
\end{aligned}$$

1213. 证明等式:

$$\begin{aligned}
(1) & [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\
&= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)
\end{aligned}$$

及 (2) $[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)}$

$$= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

证 (1) $[e^{ax} \sin(bx + c)]'$

$$\begin{aligned}
&= e^{ax} [a \sin(bx + c) + b \cos(bx + c)] \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(bx + c) \right. \\
&\quad \left. + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(bx + c) \right] \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx + c + \varphi),
\end{aligned}$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,
 $[e^{ax} \sin(bx + c)]^n$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + 2\varphi),$$

.....

利用数学归纳法可证得

$$\begin{aligned} & [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + n\varphi). \end{aligned}$$

(2) 同理可证

$$\begin{aligned} & [e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(bx + c + n\varphi). \end{aligned}$$

1214. 求 $y^{(n)}$, 设:

$$(a) y = \operatorname{ch} ax \cos bx; \quad (b) y = \operatorname{ch} ax \sin bx;$$

$$(B) y = \operatorname{sh} ax \cos bx; \quad (r) y = \operatorname{sh} ax \sin bx.$$

解 (a) $y = \frac{1}{2} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{2} e^{-ax} \cos bx,$

利用 1213 题(2) 的结果, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \cos(bx + n\varphi) \\ &\quad + e^{-ax} \cos(bx + n\pi - n\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ e^{ax} \left[\cos \left(bx \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n}{2}\pi \right) \cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-ax} \left[\cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \cos \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \left. + \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right] \Big\} \\
& = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \cdot \cos \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) - \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \\
& \cdot \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \Big\} \\
& = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \cdot \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \\
& \quad \left. - \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \operatorname{sh} ax \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right]
\end{aligned}$$

同样方法可求得：

$$\begin{aligned}
(6) y^{(n)} & = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{ch} ax \right. \\
& \quad \cdot \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) + \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \operatorname{sh} ax \\
& \quad \left. \cdot \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Б) y^{(n)} & = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \left. + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Г) y^{(n)} & = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[-\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \left. + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right].
\end{aligned}$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

1215. 将函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中 p 为自然数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则

$$\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$$

其中 \bar{t} 为 t 的共轭复数.

于是

$$\begin{aligned} \sin^{2p} x &= \frac{1}{(2i)^{2p}} (t - \bar{t})^{2p} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k t^{2p-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= (-1)^p \frac{1}{(2i)^{2p}} C_{2p}^p + \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k \\ &\quad \cdot \cos(2p - 2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} (\sin^{2p} x)^{(n)} &= \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k (2p \\ &\quad - 2k)^n \cos \left[(2p - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} (p-k)^n \\ &\quad C_{2p}^k \cos \left[(2p - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right]. \end{aligned}$$

1216. 设:

$$(a) f(x) = \sin^{2p+1} x; \quad (b) f(x) = \cos^{2p} x;$$

$$(B) f(x) = \cos^{2p+1} x,$$

其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 (a) 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则

$$\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

$$\begin{aligned} \sin^{2p+1} x &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k [\cos(2p+1-2k)x \\ &\quad - 2k)x + i \sin(2p+1-2k)x] \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1 \\ &\quad - 2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \\ &\quad \cdot \sin\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right] \end{aligned}$$

类似 1215 题及本题(a)的方法, 可求得:

$$\begin{aligned} (b) f^{(n)}(x) &= (\cos^{2p} x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B) f^{(n)}(x) &= (\cos^{2p+1} x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]; \end{aligned}$$

$$- 2k)x + \frac{n}{2}\pi\}.$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$$

证明

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n + 1)\operatorname{arccctg}x].$$

证 将复数 $x + i$ 及 $x - i$ 化成下列形式:

$$x + i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$x - i = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

其中 $r = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \operatorname{arccctg}x$.

于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{x - i} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x + i} \right)^{(n)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x - i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x + i)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2 + 1)^{n+1}} [(x + i)^{n+1} \\ &\quad - (x - i)^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2 + 1)^{n+1}} \{r^{n+1} [\cos(n + 1)\theta \\ &\quad + i\sin(n + 1)\theta] - r^{n+1} [\cos(n + 1)\theta \\ &\quad - i\sin(n + 1)\theta]\} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{n+1}} r^{n+1} \sin(n + 1)\theta \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n + 1)\operatorname{arccctg}x], \end{aligned}$$

所以,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arctg} x].$$

1218. 求函数 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 的 n 阶导函数.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

利用 1217 题的结果, 得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin[n \operatorname{arctg} x] \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

求 $f^{(n)}(0)$, 设:

1219. (a) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$;

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (a) $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right)$.

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n! 2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}} \right].$$

所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}].$$

(b) $f(x) = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \\ &= \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad (n > 1). \end{aligned}$$

1220. (a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (b) $f(x) = \arctan x$;
 (B) $f(x) = \arcsin x$.

解 (a) $f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + 2nxa^{n-1}e^{ax}$
 $+ n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2};$$

(b) 利用 1218 题的结果, 得

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= 0 \text{ 及 } f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)! \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$(B) y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值, 则得

$$y'_0 = f'(0) = 1, y''_0 = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} \\ - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

在上式中, 令 $x=0$, 则有

$$y_0^{(n+2)} - n(n-1)y_0^{(n)} - ny_0^{(n)} = 0,$$

即

$$y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)}.$$

由于 $y_0'' = 0$, 故

$$y_0^{2k} = f^{(2k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

又由于 $y_0' = 1$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= (2k-1)^2 y_0^{(2k-1)} \\ &= (2k-1)^2 \cdot (2k-3)^2 y_0^{(2k-3)} \\ &= \dots \\ &= [1 \cdot 3 \cdots (2k-1)]^2 \\ &= [(2k-1)!!]^2 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

1221. (a) $f(x) = \cos(\text{arc sin } x)$;

(b) $f(x) = \sin(\text{arc sin } x)$.

解 (a) $y' = f'(x)$

$$= -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc sin } x),$$

$$y'' = -\frac{m^2}{1-x^2} \cos(\text{arc sin } x)$$

$$- \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\text{arc sin } x).$$

于是,

$$y_0' = f'(0) = 0, y_0'' = f''(0) = -m^2,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} \\ - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} + m^2y^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

令 $x = 0$, 即得

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于 $y_0' = 0$, 故 $y_0^{(2k-1)} = f^{(2k-1)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$;

又由于 $y_0'' = -m^2$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k)} &= f^{(2k)}(0) = \dots [m^2 - (2k-2)^2] y_0^{(2k-2)} \\ &= \{- [m^2 - (2k-2)^2]\} \\ &\quad \cdot \{- [m^2 - (2k-4)^2]\} y_0^{(2k-4)} \\ &= \dots \\ &= (-1)^{k-1} [m^2 - (2k-2)^2] \\ &\quad [m^2 - (2k-4)^2] \dots (m^2 - 2^2) y_0'' \\ &= (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \dots [m^2 - (2k-2)^2] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$(6) y' = f'(x) = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\operatorname{arcsin} x),$$

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \frac{m^2}{1-x^2} \sin(\operatorname{arcsin} x) \\ &\quad + \frac{mx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\operatorname{arcsin} x). \end{aligned}$$

于是,

$$y_0' = f'(0) = m, y_0'' = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0.$$

这与本题(a)所得的方程是一样的, 因而也有与(a)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于 $y_0'' = 0$, 故 $y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$;

又由于 $y'_0 = m$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= -[m^2 - (2k-1)^2]y_0^{(2k-1)} = \dots \\ &= (-1)^k m(m^2 - 1^2) \dots [m^2 - (2k-1)^2] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

1222. (a) $f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$; (b) $f(x) = (\operatorname{arc} \sin x)^2$.

解 (a) 仍以下标带“0”者表示在 $x = 0$ 时的导数值, 应用莱布尼兹公式及 1220 题(6)的结果, 即得

$$\begin{aligned} f^{(2k-1)}(0) &= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k-1)} \\ &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k)} \\ &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(i)} \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2i+1)} \\ &\quad \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k-2i-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! \\ &\quad \cdot (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!} \\ &\quad \cdot (2i)!(2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \\ &\quad \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k-2i-1} \right) \right) \\
& = (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2(k-i)-1} \\
& = (-1)^{k-1} (2k-1)! \cdot \\
& \quad 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2k-1} \right) (k=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

(6) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$ 或

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 2 \arcsin x,$$

对上式两边再求导,得

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) - 2 = 0.$$

应用莱布尼兹公式,得

$$\begin{aligned}
& (1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2n x f^{(n+1)}(x) \\
& - n(n-1) f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

在上式中令 $x=0$, 即得

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

由于 $f'(0) = 0$, 故

$$f^{2k-1}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

又由于 $f''(0) = 2$, 故

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) & = (2k-2)^2 (2k-4)^2 \dots 2^2 f''(0) \\
& = 2^{(2k-1)} [(k-1)!]^2 (k=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

1223. 设

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n - 1)$ 阶的连续导函数, 求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= (x - a)^n \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n (x - a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-2}^{n-2} n(n-1) \dots 3 (x - a)^2 \varphi'(x) \\ &\quad + n! (x - a) \varphi(x). \end{aligned}$$

于是, $f^{(n-1)}(a) = 0$.

按导数定义, 即得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [(x - a)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n (x - a)^{n-2} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-2}^{n-2} n(n-1) \dots 3 (x - a) \varphi'(x) \\ &\quad + n! \varphi(x)] \\ &= n! \varphi(a). \end{aligned}$$

1224. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

(n 为自然数) 于点 $x = 0$ 有一直到 n 阶的导函数, 而无 $(n + 1)$ 阶导函数.

证 由莱布尼兹公式, 当 $x \neq 0$ 时得

$$f^{(n)}(x) = \left(x^{2n} \sin \frac{1}{x} \right)^{(n)}$$

$$= \sum_{i=0}^m C_m^i (x^{2\pi})^{m-i} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}$$

首先指出, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \left[a_k x^{-(i+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + (-x^{-2})^i \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right), \\ &\quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

其中 a_k 是某些常数. 现用数学归纳法证明之:

当 $i = 1$ 时, 命题显然成立;

设当 $i = N$ 时, 命题成立, 要证命题对 $i = N + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[x^{-(N+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + \left[(-x^{-2})^N \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[-(N+k)x^{-(N+1+k)} \right. \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) + x^{-(N+k)} \\ &\quad \cdot (-x^{-2}) \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k+1}{2}\pi \right) \left. \right] \\ &\quad + \left[N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3}) \right. \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) + (-x^{-2})^{N+1} \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi \right) \left. \right] \\ &= \sum_{k=1}^{(N+1)-1} \left[b_k x^{-(N+1+k)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) + (-x^{-2})^{N+1} \\ & \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right), \end{aligned}$$

其中 b_k 是一些适当的常数. 于是, 命题对于一切自然数均成立.

因而, 我们有

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{i=0}^m C_m^i \cdot \frac{(2n)!}{(2n-m+i)!} x^{2n-m+i} \\ & \cdot \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right. \\ & \left. + (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2}\right) \right] (x \neq 0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{m\pi}{2}\right) \\ & + O(|x|^{2(n-m)+1} (x \rightarrow 0)) \\ & (m = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (*)$$

由于

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-1} \sin \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

故由 (*), 得知

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x^{2n-3} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right) + O(|x|^{2n-2}) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

一直推下去, 得

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-1)^{n-1} x \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + O(|x|^2) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right],
 \end{aligned}$$

在 $x = 0$ 近旁, $\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)$ 无界且振荡, 故

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right]$ 不存在, 因而 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在. 证毕

1225. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处是无穷次可微分的. 作出此函数的图形.

证 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出, 对于任何自然数 n , 均有

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式. 现用数学归纳法证明之:

当 $n = 1$ 时, 命题显然成立;

设当 $n = k$ 时命题成立, 即 $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right)$,

$P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n = k + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left[e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right) \right]', \\ &= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P_k' \left(\frac{1}{x} \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left\{ 2 \left(\frac{1}{x} \right)^3 P_k \left(\frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} \right)^2 P_k' \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1} \left(\frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式.

于是, 命题对于一切自然数 n 均成立.

现在, 证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是无穷次可微分的. 首先, 注意到

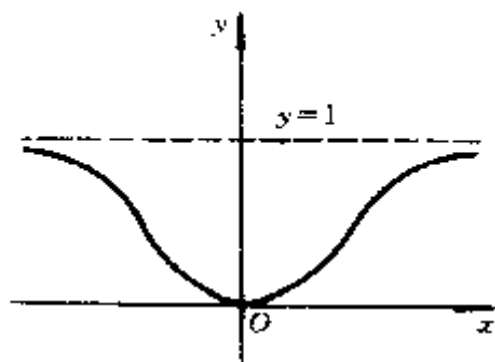


图 2.37

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(6). 仍用此法, 设 $f^{(n)}(0) = 0$, 则可证明 $f^{(n+1)}(0) = 0$. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ P_n^* \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} = 0,$$

($P_n^*(t) = t p_n(t)$ 也是 t 的多项式).

根据数学归纳法, 可知 $f^{(n)}(0) = 0$ 对于一切自然数 n 均成立, 即函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无穷次可微分, 且其各阶导数为零. 图象如图 2.37 所示.

1226. 证明: 契比协夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(\text{arc cos } x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

证 $T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc cos } x)$

$$(|x| < 1),$$

$$T_m''(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)} \cos(\text{arc cos } x) + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\text{arc cos } x).$$

于是,

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}} \cos(\text{arc cos } x) \\ &\quad + \frac{mx}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc cos } x) \\ &= -m^2T_m(x) + xT_m'(x), \end{aligned}$$

即

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

1227. 证明: 勒襄德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2 - 1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

证 设 $y = (x^2 - 1)^m$, 就有

$$y' = 2mx(x^2 - 1)^{m-1} \text{ 或 } (x^2 - 1)y' = 2mxy.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)y^{(m+2)} + 2(m+1)xy^{(m+1)} \\ & + m(m+1)y^{(m)} \\ & = 2mxy^{(m+1)} + 2m(m+1)y^{(m)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} - m(m+1)y^{(m)} \\ & = 0, \end{aligned}$$

两端再以 $\frac{1}{2^m m!}$ 乘之, 并以 $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} y^{(m)}$ 代入, 即得所要证明的等式

$$\begin{aligned} & (1-x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) \\ & = 0. \end{aligned}$$

1228. 契比协夫……拉格耳多项式定义如下:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的明显的表达式.

证明: $L_m(x)$ 满足方程

$$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0.$$

解 按莱布尼兹公式, 有

$$\begin{aligned} L_m(x) &= e^x \{ (-1)^m x^m e^{-x} + (-1)^{m-1} \\ & \quad C_m^1 m x^{m-1} e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x} + m!e^{-x}\} \\
& = (-1)^m x^m + (-1)^{m-1}C_m^1 m x^{m-1} \\
& \quad + \cdots + (-1)C_m^{m-1}m!x + m! \\
& = (-1)^m [x^m - m^2 x^{m-1} + \cdots \\
& \quad + (-1)^{m-1}m^2(m-1)!x + \\
& \quad (-1)^m m!]
\end{aligned}$$

其次, 设 $y = x^m e^{-x}$, 就有

$$y' = mx^{m-1}e^{-x} - x^m e^{-x},$$

于是,

$$xy' + (x - m)y = 0.$$

在上述等式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned}
& xy^{(m+2)} + (m+1)y^{(m+1)} + (x-m)y^{(m+1)} \\
& \quad + (m+1)y^{(m)} = 0
\end{aligned}$$

或

$$xy^{(m+2)} + (1+x)y^{(m+1)} + (m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 则由上式可得

$$xz'' + (1+x)z' + (m+1)z = 0. \quad (1)$$

由于 $L_m(x) = e^x \cdot z$, 故

$$L'_m(x) = e^x(z + z'), L''_m(x) = e^x(z + 2z' + z''),$$

于是

$$\begin{aligned}
& xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) \\
& = e^x \{x(z + 2z' + z'') + (1+x)(z + z') + mz\} \\
& = e^x \{xz'' + (x+1)z' + (m+1)z\}. \quad (2)
\end{aligned}$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0.$$

1229. 设 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分 n 次的函数.

$$\text{证明: } \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 与函数 $f(u)$ 无关.

证 由于

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x),$$

故命题当 $n = 1$ 时成立;

设当 $n = m$ 时命题成立, 即有

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u),$$

要证命题对于 $n = m + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u) \\ &= \sum_{k=1}^m \{ A'_k(x) f^{(k)}(u) \\ &\quad + A_k(x) f^{(k+1)}(u) \varphi'(x) \} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u), \end{aligned}$$

其中, $B_1(x) = A'_1(x)$, $B_k(x) = \varphi'(x) A_{k-1}(x) + A'_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots, m$), $B_{m+1}(x) = A_m(x) \varphi'(x)$, 它们均与 $f(u)$ 无关.

于是, 按数学归纳法得知

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u)$$

对于一切自然数 n 均成立.

1230. 证明: 对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导函数, 下面的公

式正确

$$\begin{aligned}\frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

证 当 $n=1$ 时公式成立,事实上,

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当 $n=m$ 时公式成立,要证公式对于 $n=m+1$ 时也成立.事实上,有

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ &= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\quad \cdot 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\quad \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\ &= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!} \right] (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\
& - (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!} \\
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots
\end{aligned}$$

这正是公式对于 $n = m + 1$ 时的情形. 于是, 按数学归纳法得知, 公式对于一切自然数 n 均成立.

1231. 契比协夫-厄耳米特多项式定义如下:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式.

证明: $H_m(x)$ 满足方程

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解 设 $y = e^{-x^2}$, 则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2}.$$

$$\begin{aligned}
y'' &= e^{-x^2} [(-2x)^2 - 2] \\
&= [(-1)^2(2x)^2 - 2] e^{-x^2},
\end{aligned}$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$\begin{aligned}
y^{(m)} &= \left[(-1)^m (2x)^m + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{m-2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right. \\
&\quad \left. \cdot (2x)^{m-4} + \dots \right] e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

于是, 得

$$\begin{aligned}
H_m(x) &= (-1)^m e^{x^2} y^{(m)} \\
&= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots,$$

又 $y' + 2xy = 0$.

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} + 2(m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 上式就是

$$z'' + 2xz' + 2(m+1)z = 0. \quad (1)$$

由 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} z$, 得

$$H'_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (2xz + z'),$$

$$H''_m(x) = (-1)^m e^{x^2} [(4x^2 + 2)z + 4xz' + z''].$$

从而有

$$\begin{aligned} & H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) \\ &= (-1)^m e^{x^2} \{ (4x^2 + 2)z + 4xz' + z'' - 4x^2z \\ &\quad - 2xz' + 2mz \} \\ &= (-1)^m e^{x^2} \{ z'' + 2xz' + 2(m+1)z \}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时, 由于 $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, 故等式成立.

设当 $n=k$ 时等式成立, 即有

$$(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对 $n=k+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} = [(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$\begin{aligned}
&= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]' \\
&= x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)} + (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&\quad + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

于是,按数学归纳法得知

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数 n 均成立.

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式,其中 $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 为 x 的某连续函数.

证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D + \lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼兹公式,有

$$\begin{aligned}
D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} &= [e^{\lambda x}u(x)]^{(k)} \\
&= \sum_{i=0}^k C_k^i (e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x)
\end{aligned}$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面,有

$$\begin{aligned} (D + \lambda)^k u(x) &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i D^{(k-i)} u(x) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

因而,得

$$D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} (D + \lambda)^k u(x).$$

于是,

$$\begin{aligned} f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} &= \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} \\ &= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n p_k(x) \cdot (D + \lambda)^k u(x) \\ &= e^{\lambda x} (D + \lambda) u(x), \end{aligned}$$

即

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D + \lambda) u(x).$$

1234. 证明:若干方程

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中,令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数,则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

证 记 $\delta = \frac{d}{dx}$,则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \text{ 或 } \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t} [-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] \\ &= e^{-2t} D(D-1)y, \end{aligned}$$

一般地,可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad (1)$$

事实上,设公式(1)对 $k=m$ 时成立,则有

$$\begin{aligned} \delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) \\ &= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t} [-me^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y \\ &\quad + e^{-mt} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t} D(D-1)\cdots[D \\ &\quad - (m+1) + 1]y, \end{aligned}$$

即公式(1)对 $k=m+1$ 时也成立. 于是,公式(1)对于一切自然数均成立.

于是,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \delta^{(k)} y \\ &= \sum_{k=0}^n a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D \\ &\quad - k + 1)y = 0, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0.$$

§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° **洛尔定理** 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$; (3) $f(a) = f(b)$, 则至少存在有一个数 c 于区间 (a, b) 内, 使

$$f'(c) = 0, \text{ 其中 } a < c < b.$$

2° **拉格朗日定理** 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (a, b) 内有有限的导函数, 则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3° **哥西定理** 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3) 当 $a < x < b$, $f'(x) + g'(x) \neq 0$; (4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a < c < b$.

1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

的正确性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续;

(2) $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 上处处存在;

(3) $f(1) = f(2) = 0$ 及 $f(2) = f(3) = 0$.

由洛尔定理, 应该有 $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$ 存在, 使 $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$. 下面, 我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) \\ &\quad + (x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

$$= 3x^2 - 12x + 11.$$

令 $f'(x) = 0$ 解之, 得 $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故可取

$$c_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3};$$

显然 $1 < c_1 < 2, 2 < c_2 < 3$, 且

$$f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0.$$

1236. 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

当 $x_1 = -1$ 及 $x_2 = 1$ 时为零, 但是当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \neq 0$. 说明与洛尔定理表面上的矛盾.

解 $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, 它在 $[-1, 1]$ 上恒不为零, 表

面上看是与洛尔定理矛盾的. 实际上不然, 原因是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在, 不满足洛尔定理的第二个条件, 故当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 可以有 $f'(x) \neq 0$.

1237. 设函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间 (a, b) 中的任意一点有有限的导函数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

证明:

$$f'(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 中的某点.

证 当 (a, b) 为有穷区间时, 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in (a, b) \text{ 时,} \\ A, & \text{当 } x = a \text{ 与 } b \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有 $F'(a)$

$= F(b)$. 故由洛尔定理可知, 在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使

$$F'(c) = 0.$$

而在 (a, b) 内, $F'(x) = f'(x)$, 所以

$$f'(c) = 0.$$

下设 (a, b) 为无穷区间. 若 $a = -\infty, b = +\infty$, 可设

$$x = \operatorname{tgt} \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x = \operatorname{tgt}$ 组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tgt})$$

在有穷区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 内仿前讨论可知: 至少存在一

点 $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中 $c = \operatorname{tgt}_0$. 由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$, 故

$$f'(c) = 0.$$

若 a 为有限数, $b = +\infty$. 则可取 $b_0 > \max \{a, 0\}$, 而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是, 对复合函数 $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right)$ 在有穷区间 (a, b_0) 上仿前讨论, 可知: 存在 $t_0 \in (a, b_0)$ 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}$. 显然 $a < c < +\infty$ 由于

$$\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0,$$

故 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty, b$ 为有限数的情形, 可类似地进行讨论. 证毕.

1238. 设函数 $f(x)$: (1) 于闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 于区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$; (3) 有下面的等式成立

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明: 在区间 (x_0, x_n) 内最少有一点 ξ , 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k],$$

$$\cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

上, 函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此, 存在 n 个点

$$x'_1, x'_2, \cdots, x'_k, \cdots, x'_n,$$

其中 $x'_k \in (x_{k-1}, x_k) (k = 1, 2, \cdots, n)$, 使

$$f'(x'_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

于是, 在每个区间 $[x'_k, x'_{k+1}] (k = 1, 2, \cdots, n-1)$ 上, 函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此存在点 x''_k 属于 $[x'_k, x'_{k+1}] (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 使

$$f''(x''_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

继续上述步骤, 经 $(n-1)$ 次后, 得出一个区间 $[x''_{n-1}, x''_1] \subset (x_0, x_n)$, 满足 $f^{(n-1)}(x''_k) = 0 (k = 1, 2)$.

于是在此区间上, 函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足洛尔定理的条件.

所以,至少存在一点 $\xi(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$, 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数 $f(x)$: (1) 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p + q)$ 阶的连续导函数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) 在区间 (a, b) 内有 $(p + q + 1)$ 阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 有下面的等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

$$\text{及 } f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$$

证明: 在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 内的某点.

证 若 $p = q$.

在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件, 因此, 至少存在一点 $x_1^{(1)} \in (a, b)$, 使 $f'(x_1^{(1)}) = 0$;

对于区间 $[a, x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)}, b]$, 函数 $f(x)$ 在其上满足洛尔定理的条件, 因此, 至少分别存在 $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$, 使 $f''(x_2^{(1)}) = 0, f''(x_2^{(2)}) = 0$;

.....

继续上述步骤, 经过 p 次后, 得出 $(p + 2)$ 个点:

$$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \cdots, x_p^{(p)}, b$$

使 $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_p^{(k)}) = f^{(p)}(b) = 0$ ($k = 1, 2, \cdots, p$);

由此 $(p + 2)$ 个点组成 $(p + 1)$ 个区间, 仿 1238 题对于它们重复使用洛尔定理 p 次, 即可得出点 c 属于 (a, b) , 使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若 $p \neq q$, 不失一般性, 设 $q = p + k$ (k 为某正整

数).

当进行 $(p+1)$ 次后,对于函数 $f^{(p)}(x) = 0$ 而言,在 (a, b) 内有 $(p+1)$ 个点:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1},$$

满足 $f^{(p+1)}(\xi_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p+1$);

再加上条件 $f^{(p+1)}(b) = f^{(p+2)}(b) = \dots = f^{(p+k)}(b) = 0$,重复对此再应用洛尔定理 k 次,则在 (a, b) 内仍然存在 $(p+1)$ 个点:

$$\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p+1).$$

以后,每进行一次,减少一个点,进行 p 次后,即可得出一点 $c \in (a, b)$,使

$$f^{(p-k+q+1)}(c) = 0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

证毕.

1240. 证明:若具实系数 a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) 的多项式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数,则其逐次的导函数 $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

证 根据假设,此处 n 次多项式 $P_n(x)$ 有 n 个实根.记其诸实根为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$,并且 α_i 是 k_i 重根, $k_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, l$),有 $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$.

于是可改写 $P_n(x)$ 为

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}.$$

显见 α_i 为 $P_n'(x)$ 的 $k_i - 1$ 重根 ($i = 1, 2, \dots, l$).

由 $P_n(\alpha_1) = P_n(\alpha_2) = \dots = P_n(\alpha_l) = 0$, $P_n(x)$ 可微, 据洛尔定理, 存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$, 而 $\xi_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使 $P_n'(\xi_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, l-1$), 于是有

$P_n'(x)$ 的根	$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$	α_1	α_2	\dots	α_l
重数	单根	$k_1 - 1$	$k_2 - 1$	\dots	$k_l - 1$

即 $n-1$ 次多项式 $P_n'(x)$ 的根恰有 $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_l - 1) + (l - 1) = k_1 + k_2 + \dots + k_l - 1 = n - 1$ 个, 这就是说, 一个 n 次多项式, 若 n 个根均为实根的话, 则其导函数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根. 反复运用这一结果. 由 $P_n'(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根, 便可推知 $P_n''(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根. 如此下去, 即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导函数——直至 $P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明: 勒襄德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间 $(-1, 1)$ 中.

证 显然, $2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n = (x + 1)^n \cdot (x - 1)^n$ 仅有实根 (-1 是 n 重根, 1 也是 n 重根). 因此, 根据 1240 题的结果知 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ 仅有实根, 且都含于 $[-1, 1]$ 中. 但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根 (因为, 例如, -1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根, 故

-1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根, 因而 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 的根). 因此, $P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1, 1)$ 中. 证毕.

1242. 证明: 契比协夫——拉格耳多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

证 令 $Q(x) = x^n e^{-x}$, 则易知

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(x) = e^{-x} [& (-1)^m x^n + (-1)^{m-1} C_m^1 n x^{n-1} \\ & + \cdots + (-1) C_m^{m-1} n(n-1)\cdots(n-m \\ & + 2)x^{n-m+1} + n(n-1)\cdots(n-m \\ & + 1)x^{n-m}] (m = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

显然 $Q^{(m)}(0) = 0$ ($m = 0, 1, \cdots, n-1$; 为方便计, 以下记 $Q^{(0)}(x) = Q(x)$, 但 $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0$). 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \quad (m = 0, 1, \cdots, n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0, +\infty)$ 应用 1237 题, 知存在 $\xi^{(1)} \in (0, +\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)}) = 0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0, \xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)}, +\infty)$ 应用 1237 题, 知存在 $\xi_1^{(2)} \in (0, \xi^{(1)})$, $\xi_2^{(2)} \in (\xi^{(1)}, +\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)}) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

这样继续下去, 反复应用 1237 题 n 次, 知存在 $0 < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)} < +\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)}) = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 故 $\xi_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$L_n(x) = e^x Q^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \dots \\ + (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是 x 的 n 次多项式, 故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的), 因此 $\xi_i^{(n)} (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根. 证毕.

1243. 证明: 契比协夫 —— 厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

证 设 $Q(x) = e^{-x^2}$. 显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$Q''(x) = 2e^{-x^2} (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1),$$

从而得知 $Q'(x) = 0$ 有一个实根, $Q''(x) = 0$ 有两个相异的实根.

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根, 并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k,$$

注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积, 从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数. 下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个相异实根. 事实上, 由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

应用洛尔定理得知, 存在 $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \text{ 及 } Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用 1237 题的结果, 故知存在 $\beta_0 \in (-\infty, \alpha_1)$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0) = 0.$$

同法可知, 存在 $\beta_k \in (\alpha_k, +\infty)$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k) = 0.$$

于是, $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个实根. 故由数学归纳法, 知 $Q^{(n)}(x) = 0$ 有 n 个相异实根 ($n = 1, 2, \dots$). 从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式, 故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的). 因此 $H_n(x)$ 所有的根都是实数. 证毕.

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线, 平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦, 求出此点.

解 由题设知 $y = x^3$ 在所求点 (x_0, y_0) 的切线斜率应

$$\text{为 } y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3. \text{ 于是,}$$

$$x_0 = -1, \text{ 或 } x_0 = 1,$$

故所求的点为 $A(-1, -1)$ 及 $C(1, 1)$.

1245. 若 $ab < 0$, 有限增量的公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确?

解 不正确. 事实上, 如果有限增量公式在此成立, 则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b),$$

即

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{\xi^2}(b - a) = \frac{a - b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2} = \frac{a-b}{ab},$$

即有 $\xi^2 = ab < 0$, 这样产生矛盾. 因此, 有限增量公式对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, b]$ ($ab < 0$) 上不正确. 原因是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在, 故有限增量公式的条件不满足.

1246. 设

$$(a) f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0); \quad (b) f(x) = x^3;$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x}; \quad (d) f(x) = e^x.$$

求满足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$.

解 (a) $f'(x) = 2ax + b$.

于是, 有

$$\begin{aligned} & a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c \\ &= \Delta x [2a(x + \theta \Delta x) + b]. \end{aligned}$$

化简之, 得 $\theta = \frac{1}{2}$.

$$(b) f'(x) = 3x^2.$$

于是, 有

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3\Delta x(x + \theta \Delta x)^2.$$

如果 $x = 0$, 则 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

如果 $x \neq 0$, 化简整理得

$$3\theta^2\Delta x + 6\theta x - (3x + \Delta x) = 0,$$

从而有

$$\theta = \frac{\pm \sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x}.$$

其中正负号的取法由 x 及 Δx 的符号及条件 $0 < \theta < 1$ 决定. 例如, 当 $x \geq 0, \Delta x > 0$ 时, 根式前应取正号.

$$(B) f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

于是, 有

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x + \theta\Delta x)^2}.$$

化简之, 得

$$\theta^2(\Delta x)^2 + 2x\theta\Delta x - x\Delta x = 0,$$

$$\text{或 } \theta^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\theta - \frac{x}{\Delta x} = 0,$$

故

$$\theta = \frac{x}{\Delta x} \left(\pm \sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right).$$

此处取正负号要视确保 $\theta \in (0, 1)$ 而定, 且应有

$$\frac{\Delta x}{x} > -1 (x \neq 0).$$

$$(C) f'(x) = e^x.$$

于是, 有

$$e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta\Delta x}.$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

可以验证 $\theta \in (0, 1)$.

1247. 证明: 若 $x \geq 0$, 则

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$

并且 $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$

证 当 $x \geq 0$ 时, 对函数 \sqrt{x} 施用有限增量公式, 即得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之, 得

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)} - x].$$

当 $x = 0$ 时 $\theta = \frac{1}{4}$. 当 $x > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x &= \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} < \frac{x}{2x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)} + x]} \right\} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1248.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c .

解 $f(0) = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{1}{2},$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -c(2-0) \text{ 或 } \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以 $c = \frac{1}{2}$ 或 $c = \sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ 不适合), 此即所求的中间值 c .

1249. 设:

$$f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$$

其中 $0 < \xi(x) < x$.

证明: 若

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$$

及

$$f(0) = 0$$

则函数 $\xi = \xi(x)$ 于任意小的区间 $(0, \epsilon)$ 内 (于此 $\epsilon > 0$) 是不连续的.

证 用反证法. 假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0, \epsilon)$ 内连续 ($\epsilon > 0$).

由于当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right), \end{aligned}$$

故由 $f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)]$ 得

$$x \sin(\ln x) = x \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right), 0 < x < +\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N , 使

$$-2N\pi + \frac{\pi}{4} < \ln \xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0 < \xi(x) < x$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \xi(x) = 0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln \xi(x) = -\infty.$$

因此, 可取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, 使

$$\ln \xi(\delta) < -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln \xi(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续, 根据中间值定理, 必有

$x_0 \in \left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 存在, 使

$$\ln \xi(x_0) = -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

于是

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sin(\ln x_0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x_0)\right) \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

这是不可能的. 证毕.

1250. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$. 对于区间 (a, b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

解 一般地说, 不可以. 例如, 研究函数

$$f(x) = x^3 \quad (-1 < x < 1),$$

它对于 $\xi = 0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2 , 使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

事实上, $f'(\xi) = 3\xi^2 = 0$, 而当 $x_1 < 0 < x_2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \\ &= x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - |x_1| \cdot |x_2| \\ &> x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= (|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式:

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

(b) 若 $0 < y < x$ 及 $p > 1$, $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y);$

(v) $|\operatorname{arc} \operatorname{tga} - \operatorname{arc} \operatorname{tgb}| \leq |a - b|;$

(r) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, 设 $0 < b < a$.

证 (a) $|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos\xi| \leq |x-y|$ (ξ 在 x, y 之间).

(b) $x^p - y^p = p(x-y)\xi^{p-1}$, 其中 $0 < y < \xi < x$.

由于 $p > 1$, 所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1},$$

于是

$$py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y);$$

*) 原题的不等式中的等号可以去掉.

$$(b) |\operatorname{arc} \operatorname{tga} - \operatorname{arc} \operatorname{tgb}| = \left| \frac{a-b}{1+\xi^2} \right| \leq |a-b|;$$

$$(c) \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}, \text{ 其中 } 0 < b < \xi < a.$$

于是,

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上哥西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上虽有连续的导函数, 且 $f(-1) \neq f(1)$, 但是, 当 $x = 0$ 时,

$$[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 4x^2 + 9x^4 = 0,$$

因此, 对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件, 所以结论可以不真. 事实上

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0 \quad \xi \in (-1, 1), \xi \neq 0,$$

它们是不相等的.

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微分, 并且 $x_1 x_2 > 0$. 证明

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证 设 $g(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 由于 $x_1 x_2 > 0$, 故 $x = 0$ 在 $[x_1, x_2]$ 之外. 从而 $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且有

$$\begin{aligned} & [g'(x)]^2 + [F'(x)]^2 \\ &= \frac{1}{x^4} \{1 + [xf'(x) - f(x)]^2\} \neq 0 \end{aligned}$$

及

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此, 对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足哥西定理的条件. 故在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ , 使有

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理, 即得

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

1254. 证明 若函数 $f(x)$ 于有穷的区间 (a, b) 内可微分, 但无界, 则其导函数 $f'(x)$ 于区间 (a, b) 内也无界. 逆定理不真; 举出例子.

证 在开区间 (a, b) 内, 由于导函数存在, 因此, $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

现在假定 $|f'(x)| < N$ ($a < x < b$), 即 $f'(x)$ 是

有界的. 取定 $c \in (a, b)$. 则按有限增量公式可知, 对任何 $a < x < b$, 均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| |f'(\xi)| < N(b - a),$$

其中 ξ 在 c 与 x 之间, 从而属于 (a, b) .

因为,

$$|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)|,$$

所以

$$|f(x)| < |f(c)| + N(b - a).$$

此与 $f(x)$ 是无界的条件相矛盾, 所以 $f'(x)$ 是无界的.

反之不一定正确. 例如, 函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有界, 但其导函数却是无界的.

注意, 在无限区间内无界的函数的导函数可能有界. 例如, 函数

$$f(x) = \ln x$$

在 $(1, +\infty)$ 内无界, 但其导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内却是有界的.

1255. 证明: 若函数 $f(x)$ 于有穷或无穷区间 (a, b) 内有有界的导函数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 于 (a, b) 中一致连续.

证 设当 $x \in (a, b)$ 时, $|f'(x)| \leq M$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} & |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leq M|x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

(ξ 在 x_1 与 x_2 之间),

于是, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

1256. 证明: 若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X_1 > 0$, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

今在 $(X_1, +\infty)$ 内任取一点 a , 则当 $x > a$ 时, 由有限增量公式可得

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| \cdot |f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

由于

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)|,$$

所以

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

再取 $X_2 > a$, 使 $\frac{|f(a)|}{X_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &\leq \frac{|f(a)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x - a|}{x} \\ &< \frac{|f(a)|}{X_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即:当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

1257. 证明:若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分且当

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = o(x);$$

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$.

证 由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 易得对于任意常数 $a > x_0$, 均有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{a}{x - a} \right) - \frac{f(a)}{x - a} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是,对于 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \max \{n, x_0 + 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$), 总存在 $b_n > a_n$, 使

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right| < \epsilon_n.$$

由拉格朗日定理知,存在 $x_n; a_n < x_n < b_n$, 使

$$f'(x_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n},$$

即

$$|f'(x_n)| < \epsilon_n (n = 1, 2, \dots).$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f'(x_n)| = 0.$$

由于 $x_n > a_n \geq n$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

1258. (a) 证明函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于区间 (x_0, X) 内有有限的导函数 $f'(x)$; (3) 有有限或无限的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0),$$

则有有限或无穷的单侧导函数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

(6) 证明函数

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \text{ 及 } f(1) = 0$$

有有限的极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 没有单侧的导函数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$.

作这个事实的几何图解.

证 (a) 由有限增量公式, 有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x)$$

$$(0 < \theta < 1),$$

当 $\Delta x \rightarrow +0$ 时, $x_0 + \theta \Delta x \rightarrow x_0 + 0$.

由假设条件知 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} f'(x_0 + \theta \Delta x) = f'(x_0 + 0)$, 所以有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + 0),$$

即

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

(6) 当 $x \neq 1$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$

$$= -\infty$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$

$$= -\infty,$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y = f(x)$ 的图形

如图 2.38 所示.

当 $x \rightarrow 1-0$ 时,

$f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow$

$1+0$ 时, $f(x) \rightarrow -$

$\frac{\pi}{2}$.

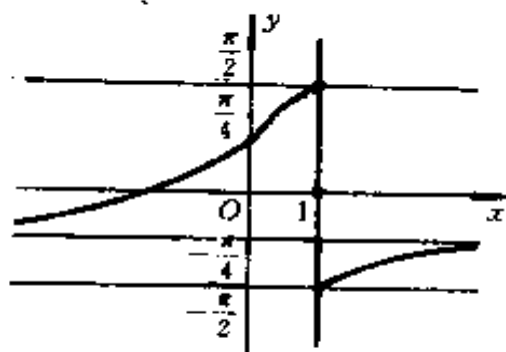


图 2.38

即 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的第一类

不连续点, 即在 $x = 1$ 处 $f(x)$ 产生跳跃, 所以 $f(x)$ 在

$x = 1$ 处无导数.

1259. 证明:若当 $a < x < b$ 时, $f'(x) = 0$, 则当
 $a < x < b$ 时, $f(x) = \text{常数}$.

证 在 (a, b) 内取一定点 x_0 , 则当 $a < x < b$ 时, 按有限增量公式可得

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c) = 0$, 故

$$f(x) - f(x_0) = 0,$$

即

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数}.$$

1260. 证明:导函数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性函数:

$$f(x) = kx + b.$$

证 $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = k - k = 0$,

于是,

$$f(x) - kx = b \quad (b \text{ 为常数}).$$

故 $f(x)$ 必为线性函数: $f(x) = kx + b$. 证完.

1261. 设 $f^{(n)}(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x) = 0$, 于是 $f^{(n-1)}(x) = c$ (c 为常数).

再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x) = cx + b.$$

假设

$$f^{(k)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left(a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \dots + \frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k} \right),$$

则有 $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}) = 0$.

由 1259 题知 $\Phi(x) = b_0$, 并记 $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \dots,$

$\frac{1}{n-k}a_{n-k-1} = b_{n-k}$, 则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-k}x^{n-k}.$$

依归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式, 其中 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} 是常数, 而且是任意的.

1262. 证明: 满足方程

$$y' = \lambda y (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$y = Ce^{\lambda x},$$

其中 C 为任意常数.

$$\begin{aligned} \text{证 } (ye^{-\lambda x})' &= y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是,

$$ye^{-\lambda x} = C \quad (c \text{ 为常数})$$

即

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

于范围: (1) $ax < 1$ 及 (2) $ax > 1$ 内有相同的导函数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax < 1$ 或 $ax > 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1-ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x) = g'(x) \quad (ax < 1 \text{ 或 } ax > 1).$$

因此

$$f(x) - g(x) = C_1, \text{ 当 } ax < 1 \text{ 时.} \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = C_2, \text{ 当 } ax > 1 \text{ 时,} \quad (2)$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 . 设 $a > 0$ ($a < 0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x \rightarrow -\infty$, 得

$$-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2} = C_1,$$

故 $C_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tga}$. 因此

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tga} \quad (ax < 1).$$

在(2)中令 $x \rightarrow +\infty$, 得

$$- \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} = C_2,$$

故 $C_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tga} - \pi$. 因此

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tga} - \pi \quad (ax > 1).$$

1264. 证明下列恒等式:

$$(a) 2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x,$$

当 $|x| \geq 1$;

$$(b) 3\operatorname{arc} \cos x - \operatorname{arc}(3x - 4x^3) = \pi, \text{ 当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

证 (a) 当 $|x| > 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & \left(2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ & \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

故

$$2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = C_1, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时};$$

$$2\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = C_2, \text{ 当 } x < -1 \text{ 时}.$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 .

$$\text{令 } x = \sqrt{3}, \text{ 代入前一式, 得 } C_1 = \pi;$$

$$\text{令 } x = -\sqrt{3}, \text{ 代入后一式, 得 } C_2 = -\pi.$$

从而当 $|x| \neq 1$ 时, 有

$$2\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \begin{cases} \pi, & \text{当 } x > 1 \text{ 时;} \\ -\pi, & \text{当 } x < -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

而当 $|x| = 1$ 时, 上式仍然成立. 于是, 当 $|x| \geq 1$ 时, 有

$$2\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn}x.$$

(6) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$[3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3)]'$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$

$$\cdot (3-12x^2) = 0,$$

故有

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = C$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数. 令 $x = 0$, 代入上式, 即可求出 $C = \pi$. 于是

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x = \frac{1}{2}$ 左连续, 在 $x = -\frac{1}{2}$ 右连续, 分别取极限即知上式当 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 时也成立. 于是

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(|x| \leq \frac{1}{2} \right).$$

1265. 证明: 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的; (2) 于此线段内有有穷的导函数 $f'(x)$; (3) 非线性函数, 则于区间 (a, b) 内至少能找到一点 c , 满足

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证 当 $a \leq x \leq b$ 时, 设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

易知 $F(a) = F(b) = 0$, 且当 $a < x < b$ 时, $F(x) \neq 0$ (因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 c_1 ($a < c_1 < b$) 点, $F(c_1) \neq 0$, 不妨设 $F(c_1) > 0$, 在区间 $[a, c_1]$ 与 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日定理, 可知存在

$$\begin{aligned} \xi_1 \in (a, c_1) \text{ 使 } F'(\xi_1) &= \frac{F(c_1) - F(a)}{c_1 - a} \\ &= \frac{F(c_1)}{c_1 - a} > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 \in (c_1, b) \text{ 使 } F'(\xi_2) &= \frac{F(b) - F(c_1)}{b - c_1} \\ &= -\frac{F(c_1)}{b - c_1} < 0. \end{aligned}$$

因而,

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (2)$$

由此可知:

$$\text{当 } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \text{ 时, 由 (1),}$$

$$|f'(\xi_1)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|;$$

当 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ 时, 由(2),

$$|f'(\xi_2)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

于是命题得证.

这个事实的几何意义是: 对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线), 在曲线上至少存在一点 c , 使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点, $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的弦的斜率

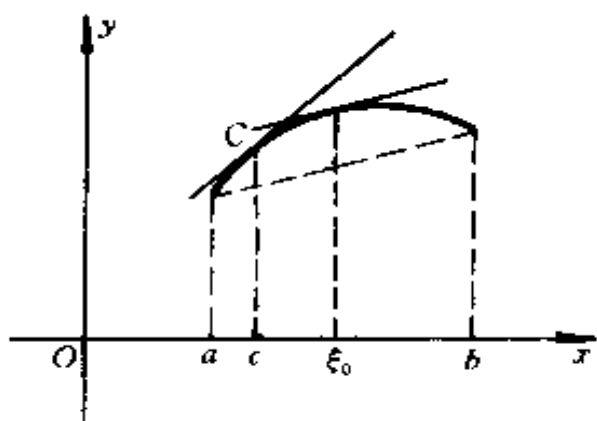


图 2.39

的绝对值, 换句话说, 此切线比此弦“陡”, 如图 2.39 所示.

1266. 若函数 $f(x)$: (1) 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f'(a) = f'(b) = 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 c , 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

用反证法, 即设 $|f''(x)| < K$ ($a < x < b$).

对于函数(x_0 是 $[a, b]$ 中任意固定的一点)

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

及

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

两次应用哥西定理, 即得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0 \leq \xi \leq x$), x 为 $[a, b]$ 中任意点. 特别, 在(1)式中取

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a) = 0$, 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$.

于是,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

同理在(1)式中取 $x_0 = b, x = \frac{a+b}{2}$, 并利用已知条件 $f'(b) = 0$, 则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2),$$

其中 $\frac{a+b}{2} < c_2 < b$.

于是

$$\left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

因此,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ &\quad + \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| \\ &< \frac{(b-a)^2}{4} K = |f(b) - f(a)|, \end{aligned}$$

这是不可能的. 所以, 在区间 (a, b) 内至少存在一点 c , 使

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

*) 仅考虑 $x > x_0$ ($x < x_0$ 时可类似地讨论) 令

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0) = G(x_0) = 0$,

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad (\text{记为 } F_1(x)),$$

$$G'(x) = 2(x - x_0) \quad (\text{记为 } G_1(x)),$$

并且 $F'(x_0) = G'(x_0) = 0$, (即 $F_1(x_0) = G_1(x_0) = 0$),

但当 $x \neq x_0$, $G'(x) \neq 0$, 而

$$F_1'(x) = F''(x) = f''(x), G_1'(x) = G''(x) = 2.$$

应用哥西定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F_1(c) - F_1(x_0)}{G_1(c) - G_1(x_0)} \\ &= \frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{2}, \end{aligned}$$

此处 $\xi \in (x_0, c)$, 而 $c \in (x_0, x)$, 从而知 $\xi \in (x_0, x)$.

因此有

$$F(x) = \frac{1}{2} G(x) f''(\xi)$$

也即有公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi).$$

其中 $x_0 < \xi < x$ (以后即将看到, 这就是所谓的台劳公式, 这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法.)

1267. 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒钟内走完了路程, 于此时间内经过了距离 s 米. 证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}$ $\frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$.

证 利用 1266 题的结果即可得证. 此时

$$s = f(t),$$

$$f(t) - f(0) = s, t - 0 = t.$$

故 $a = \left. \frac{d^2s}{dt^2} \right|_{t=t_1}$ 的绝对值

$$|a| \geq \frac{4s}{t^2}.$$

§ 7. 函数的增大与减小. 不等式

1° 函数的增大和减小 若当

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ 时, } f(x_2) > f(x_1)$$

[或当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$], 则称函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上 增大(或对应地减小).

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上增大(或减小), 则当

$$a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0$$

[或对应地当 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) \leq 0$].

2° 函数增大(或减小)的充分条件 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 并且在其内有正的(或负的)导函数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 于 (a, b) 内增大(或对应地减小).

求下列函数在严格意义上的单调(增大或减小)的区间:

1268. $y = 2 + x - x^2$

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1269. $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1270. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100} (x \geq 0)$.

解 $y' = \frac{-x + 100}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$.

当 $0 < x < 100$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $100 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1272. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geq 0$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数增大.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

解 $y' = 1 + 2 \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} \cos 2x$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小,

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

1274. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$.

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时, 即 $x > 1$, $x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 时, $y' > 0$, 所以函数增大 ($k = 1, 2, \dots$).

同理, 当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小 ($k = 1, 2, \dots$).

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

解 $y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$.

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

1276. $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geq 0)$.

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n - x)$.

当 $x \in (0, n)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in (n, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

1278. 若 $x > 0, f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$ 及 $f(0) = 0$.

解 $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$
 $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \ln x \right) (x > 0)$.

令 $f'(x) = 0$, 得

$$\sin \left(\ln x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得

$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或 $x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) > 0$,

函数增大;

当 $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi - 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) < 0$,

函数减小.

1279. 证明: 内接于圆的正 n 边形, 当边的数目 n 增加时, 其周界 p_n 增加, 而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小. 利用这点来证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, p_n 及 P_n 有相同的极限.

证 如图 2.40 所示,

我们有

$$\begin{aligned} p_n &= 2nx \\ &= 2na \sin \alpha \\ &= 2na \sin \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n &= 2ny \\ &= 2na \operatorname{tg} \alpha \\ &= 2na \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

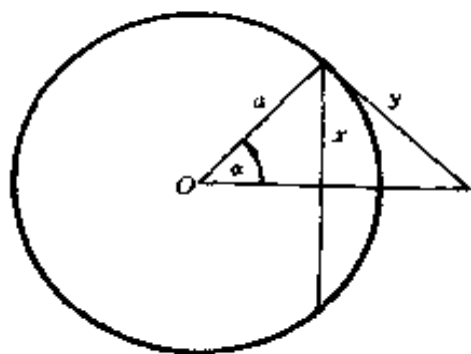


图 2.40

考虑 $f(x) = \frac{2a}{x} \sin \pi x$. 易证当 $x (x > 0)$ 很小时有 $f'(x) < 0$, 从而当 x 变小时 $f(x)$ 增大. 所以, $p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增大时, p_n 逐渐增大. 同样, 令 $g(x) = \frac{2a}{x} \operatorname{tg} \pi x$, 利用 $x < \operatorname{tg} x$ (当 x 很小时, $x > 0$), 可证得 $g'(x) > 0$, 情形相反, 当 x 变小时, $g(x)$ 逐渐减小, 故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 变大时逐渐变小. 总之, 有 $p_n < p_{n+1}$ 及 $P_{n+1} < P_n$, 并且显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$. 于是

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故 $\{P_n\}$ 是有界减数列, $\{p_n\}$ 是有界增数列, 从而它们的极限都存在, 但

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - p_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi a \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) = 0, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

于区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内增大.

证 设 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, 则

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right].$$

由于当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$, 因此要看 y' 为正或为负, 只需看 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$, 则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0, \quad x \in (-\infty, -1),$$

故当 $-\infty < x < -1$ 时 z 增大, 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} z = 0$, 因而 $z > 0$. 于是, 在 $(-\infty, -1)$ 内 $y' > 0$. 因此, 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

在区间 $(-\infty, -1)$ 内增大.

同理可证, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内增大.

1281. 证明: 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的(就严格的意义而言!), 其中 x_0 为充分大的正数.

证 由于

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \\ &= x^{n-1} \left(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right] = 0,$$

故存在 $x_0 > 0$, 使当 $|x| > x_0$ 时,

$$\left| \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right| < n|a_n|.$$

由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $P'_n(x)$ 均保持定号(例如, 若 $a_0 > 0$, 则当 $x_0 < x < +\infty$ 时, $P'_n(x) > 0$), 故 $P_n(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的. 证毕.

1282. 证明: 有理函数

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \\ &\quad (m+n \geq 1, m \neq n^*) a_n b_m \neq 0 \end{aligned}$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的(就严格的意义而言!),其中 x_0 为充分大的正数.

证 我们有

$$\begin{aligned}
 R'(x) &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ [a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}] [b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m] - [b_1 + 2b_2x + \cdots + mb_mx^{m-1}] [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n] \} \\
 &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ (a_1b_0 - a_0b_1) + 2(a_2b_0 - a_0b_2)x + \cdots + [(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2} + (n-m)a_nb_mx^{m+n-1} \} \\
 &= \frac{x^{m+n-1}}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \left[\frac{(n-m)a_nb_m}{x} + \frac{(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m}{x} + \cdots + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{x^{m+n-1}} \right].
 \end{aligned}$$

仿 1281 题之证法,可知存在 $x_0 > 0$,使当 $|x| > x_0$ 时上式右端方括弧内的式子与第一项 $(n-m)a_nb_m$ 同符号,由此可知,当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $R'_*(x)$ 均保持定号,故 $R(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 中都是严格单调的.

*) 本题应加上条件 $m \neq n$ (原题上没有). 否则所述结论不成立. 例如,若 $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, \dots,$

n), 则 $R(x) \equiv 1$, 它在 $(x_0, +\infty)$ 上显然不是严格单调的.

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的?

解 不. 例如函数

$$f(x) = x + \sin x,$$

在区间 $(0, +\infty)$ 内, 由于 $f'(x) = 1 + \cos x > 0$ (除 $x = (2n+1)\pi, n = 0, 1, \dots$), 所以它是单调增加的; 然而其导函数 $f'(x)$ 却不是单调的. 事实上由于 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f'(\pi) = 0, f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, 显见并非是单调的.

1284. 证明: 若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数, 且当

$$x \geq x_0 \text{ 时, } |f'(x)| \leq \varphi(x),$$

则当 $x \geq x_0$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

对这个事实作几何的解释.

证 证法一:

作函数 $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$, 由拉格朗日定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(\xi)(x - x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

由 $|f'(x)| \leq \varphi(x)$ 知

$$\psi'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geq 0.$$

从而 $\psi(x) - \psi(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0). \quad (1)$$

再令 $\psi_1(x) = \varphi(x) + f(x)$, 同理有 $\psi_1(x) - \psi_1(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x_0) - f(x). \quad (2)$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq |f(x) - f(x_0)|.$$

证法二:

用反证法. 若有一点 $b > x_0$, 而使

$$|f(b) - f(x_0)| > \varphi(b) - \varphi(x_0).$$

设 $F(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} (\varphi(x) - \varphi(x_0))$. 由于 $F(b) = F(x_0) = 0$, 所以根据洛尔定理, 得知存在点 $c \in (x_0, b)$ 使 $F'(c) = 0$, 即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} \varphi'(c) = 0.$$

因而, 有 $|f'(c)| = \frac{|f(b) - f(x_0)|}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} \varphi'(c) > \varphi'(c)$.

这与题设条件 $|f'(c)| \leq \varphi'(c)$ (对于一切 $x \geq x_0$ 而言) 相矛盾. 于是结论得证.

其几何意义就是: 若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应点的切线“陡”, 则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦“陡”. 如图 2.41 所示.

1285. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 内是连续的, 而且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 证明: 若 $f(a) < 0$, 则于区间 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有一而且仅有一实根.

证 由有限增量公式, 有

$$\begin{aligned} & f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) - f(a) \\ &= -\frac{f(a)}{k} \cdot f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a). \end{aligned}$$

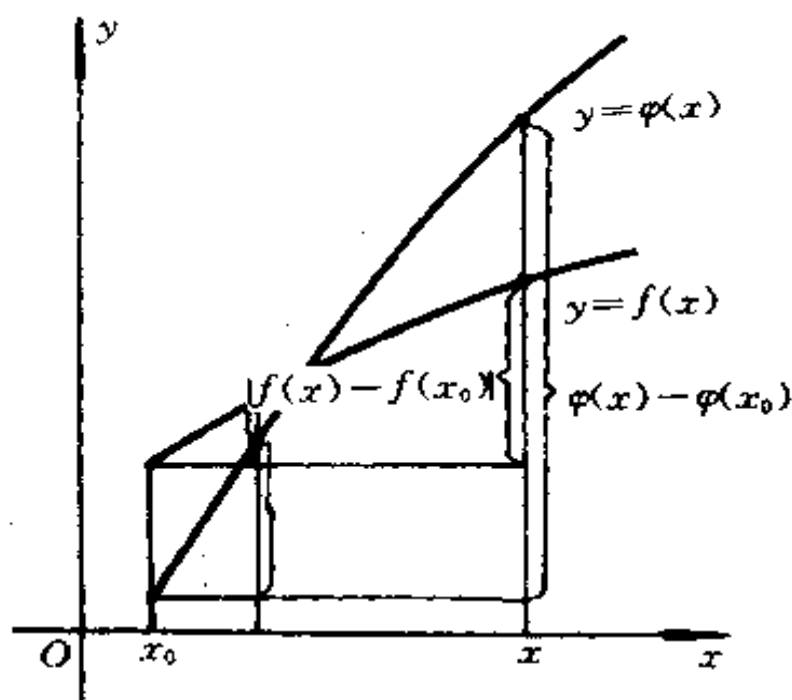


图 2.41

于是, $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$. 又 $f(a) < 0$, 故根据连续函数的介值定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根. 又因为当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内严格单调上升, 由此可知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根.

1286. 若于某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大.

证明: 若函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 于有穷或无穷的区间 (a, b) 内的每一点增大, 则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1 < x_2$ ($a < x_1 < x_2 < b$), 都有

$f(x_1) < f(x_2)$. 对 $[x_1, x_2]$ 中每一点 c , 由假定都存在开区间 $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$ 使当 $0 < |x - c| < \delta_c$ 时, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. 于是, 诸区间 $\{\Delta_c\}$ (c 取遍 $[x_1, x_2]$) 形成 $[x_1, x_2]$ 的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理, 从 $\{\Delta_c\}$ 中可选出有限个, 设为 $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2}, \dots, \Delta_{c_m}$, 它们已经复盖了 $[x_1, x_2]$. 不妨设 $x_1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < x_2$, 而且可设诸 Δ_{c_i} 互不包含 (因若 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 则可将 Δ_{c_i} 舍去). 于是, 必有 $x_1 \in \Delta_{c_1}$ (因若 x_1 不属于 Δ_{c_1} , 而属于某 $\Delta_{c_j}, j > 1$, 则显然有 $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$, 此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾). 另外, 易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, m - 1$) 必有公共点 \bar{x}_i (因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点, 则点 $c_i + \delta_{c_i}$ 必属于某 $\Delta_{c_j}, j \neq i, j \neq i + 1$. 若 $j < i$, 则 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 矛盾; 若 $j > i + 1$, 则 $\Delta_{c_{i+1}} \subset \Delta_{c_j}$, 也矛盾). 显然可取公共点 \bar{x}_i 满足 $c_i < \bar{x}_i < c_{i+1}$.

于是

$$f(c_i) < f(\bar{x}_i) < f(c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1).$$

同理, 可知 $x_2 \in \Delta_{c_m}$. 于是, 我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \dots < f(c_m) < f(x_2).$$

证完.

1287. 证明: 函数

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ 若 } x \neq 0 \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于点 $x = 0$ 增大, 但在含这点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增大的, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略

图：

证 当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点增大。又当 $x \neq 0$ 时，

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, n \text{ 为正整数;} \\ > 0, n \text{ 为负整数;} \end{cases}$$

$$\text{而 } f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0.$$

故 $f(x)$ 在点 x_n

$$= \frac{1}{2n\pi} (n = 1, 2,$$

\dots) 都达极大值。

由于 $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow$

0 ，故 $f(x)$ 在

$(-\epsilon, \epsilon)$ 内不是

增大的（作无穷

次振荡，如图

2.42 所示）。

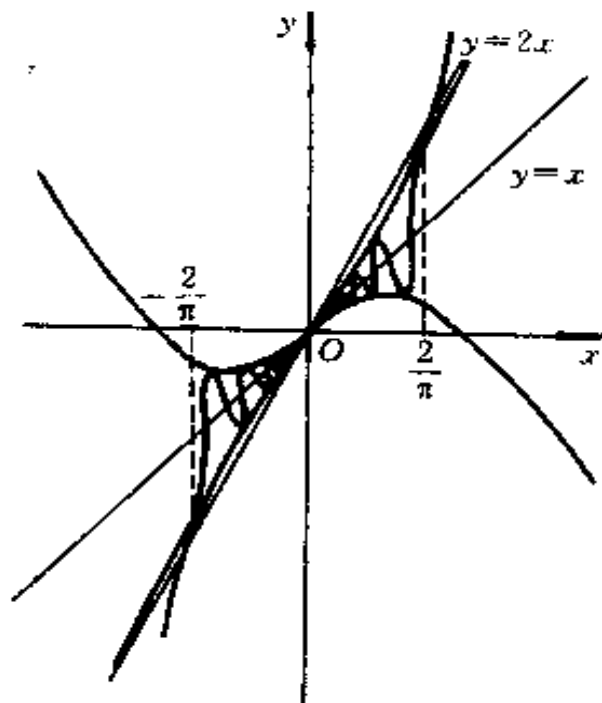


图 2.42

1288. 证明定理：设(1)

函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$); (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 则当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证 设 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则由于 $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 所以

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的. 另外, 由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的. 再由条件(2), 知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

依此类推, 最后得

$$F(x) > F(x_0) = 0 \quad (x > x_0), \text{ 即}$$

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad (x > x_0).$$

1289. 证明下列不等式:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$;

(b) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

(c) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;

(r) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$;

(s) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时,

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式(a)–(r)的几何解释.

证 (a) 设 $f(x) = e^x - (1+x)$, 则当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以, $f(x) > f(0) = 0$ ($x > 0$), 即

$$e^x > 1 + x \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x < 0$ 时,

$$e^x > 1 + x.$$

总之, 当 $x \neq 0$ 时,

$$e^x > 1 + x.$$

此不等式的几何意义是, 曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1 + x$ 的上方. 如图 2.43 所示.

(b) 设 $\varphi(x) = x, \psi(x) = \ln(1+x)$, 则

$$\varphi'(x) = 1, \psi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > \psi'(x)$, 即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$,

且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, 从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1+x) > 0 \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x < 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

所以, 当 $x > 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

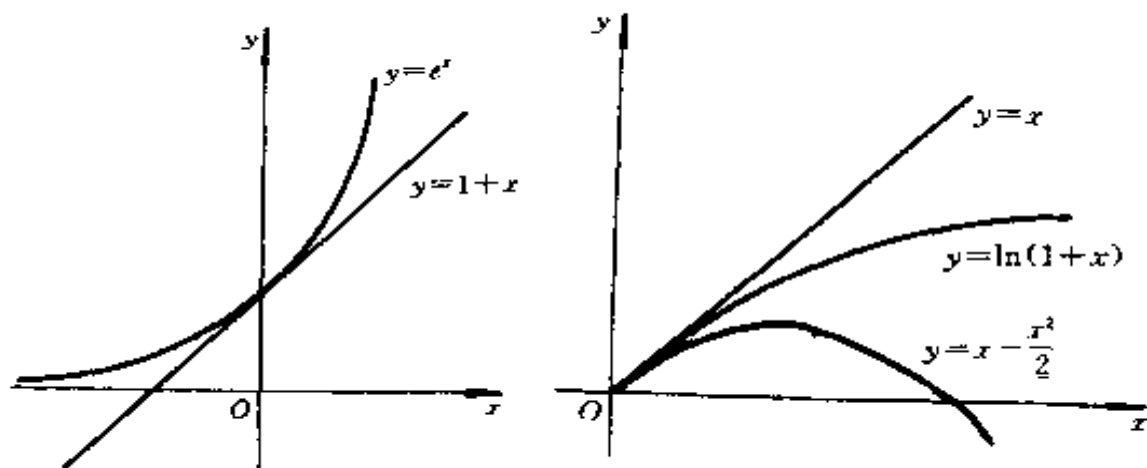


图 2.44

图 2.43

此不等式表示对数函数 $y = \ln(1+x)$ 的图形介于抛物线 $y = x - \frac{x^2}{2}$ 和直线 $y = x$ 之间 ($x > 0$). 如图 2.44 所示.

(B) 令 $F(x) = x - \sin x$, 则

$$F'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (\text{当 } x > 0, x \neq 2n\pi, \\ n = 1, 2, \dots \text{ 时}),$$

故 $F(x)$ 在 $x > 0$ 时是严格增大的. 因此, 当 $x > 0$ 时, 有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

从而

$$x > \sin x \quad (x > 0).$$

其次再证, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ ($x > 0$). 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \psi'_1(0) = \varphi'_1(0) = 1.$$

又因 $\psi''_1(x) = -x, \varphi''_1(x) = -\sin x$, 于是, 当 $x > 0$ 时, 有

$$\psi''_1(x) > \varphi''_1(x).$$

利用 1288 题的结果得知,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} (x > 0).$$

所以, 当 $x > 0$ 时

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x <$$

x . 此不等式表示,

在 y 轴的右侧, 曲线

$y = \sin x$ 介于直线 $y = x$ 和曲线

$y = x - \frac{x^3}{6}$ 之间,

如图 2.45 所示.

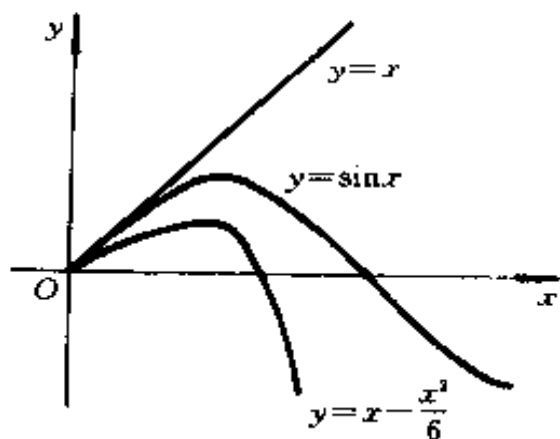


图 2.45

(r) 设 $\varphi(x) = \operatorname{tg} x, \psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$, 则有

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0;$$

$$\varphi'(x) = \sec^2 x, \psi'(x) = 1 + x^2,$$

$$\varphi(0) = \psi'(0) = 1;$$

$$\varphi''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \psi''(x) = 2x,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = 0;$$

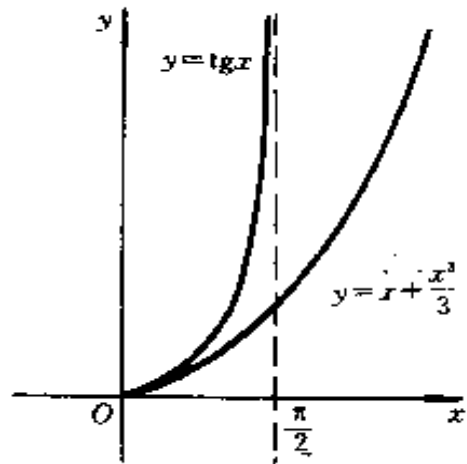
$$\varphi'''(x) = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\psi'''(x) = 2,$$

从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'''(x) > \psi'''(x)$.

于是利用 1288 题的结果
得知

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg}x >$
 $x + \frac{x^3}{3}$. 此不等式表示,
在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 曲线 $y =$
 $\operatorname{tg}x$ 在曲线 $y = x + \frac{x^3}{3}$ 的
上方. 如图 2.46 所示.



2.46

(1) 当 $x = y$ 时, 由 $0 < \alpha < \beta$ 知, 不等式

$$2^{\frac{1}{\alpha}} > 2^{\frac{1}{\beta}} (x > 0, y > 0)$$

显然成立.

当 $x \neq y$, 且 $x > 0, y > 0$, 不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$.

令 $a = \frac{y}{x}$, 为证不等式, 只需证明 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 严格递减, 也即只要证明函数 $F(t) = \frac{1}{t} \ln(1 + a^t)$ 严格递减. 实际上, 因为

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{\ln(1 + a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t > 0$ 时, 有 $a^t - \frac{a^{2t}}{2} < \ln(1 + a^t)$, 所以

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{a^t - \frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$, 所以 $\ln a < 0$ 及 $a^t > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$
 从而 $F'(t) < 0$, 即 $F(t)$ 是严格递减, 从而当 $x \neq y$ 时,
 不等式

$$(x^a + y^a)^{\frac{1}{a}} > (x^b + y^b)^{\frac{1}{b}}$$

也成立.

作 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图形, 如图 2.47 所示. 对于
 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$, 图形上对应点的
 纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

*) 利用本题(6)的结果.

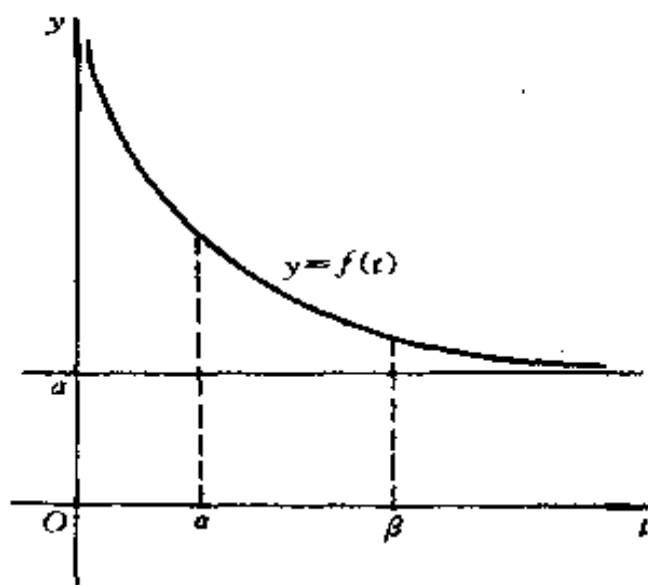


图 2.47

1290. 证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时成立.

证 不等式的后半部分于 1289 题(B) 中已证明, 我们仅证其前半部分.

设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \operatorname{tg} x),$$

由于当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$ 及 $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} > x$, 于是在此区间内 $f'(x) < 0$. 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是递减的. 因而, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

所以

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

1291. 证明当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证 由于当 $x > 0$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

严格增大(利用 1280 题的结果), 并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

所以,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x > 0).$$

同理可证,当 $x > 0$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减,并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e,$$

所以

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \quad (x > 0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项,它们的一切项都是正的. 证明等差级数各项的和大于或等于^{*}等比级数各项的和.

证 证法一:

设等差级数各项为 a_1, a_2, \dots, a_n 公差为 d ; 等比级数各项为 b_1, b_2, \dots, b_n , 公比为 q . 记其和为

$$\sigma = \sum_{k=1}^n a_k, Q = \sum_{k=1}^n b_k.$$

当 $q = 1$ 时,由 $a_1 = b_1$ 及 $a_n = b_n$ 可知有 $\sigma = Q$.

当 $q < 1$ 时,由 $a_1 = b_1$ 及 $a_n = a_1 + (n-1)d, b_n = b_1 q^{n-1}$ 且 $a_n = b_n$ 得知

$$a_1 + (n-1)d = b_1 q^{n-1},$$

即

$$d = -\frac{1 - q^{n-1}}{n-1} a_1 \quad (a_1 > 0).$$

那么有

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\
&= \sum_{k=1}^n \left[a_1 - \frac{k-1}{n-1} (1 - q^{n-1}) a_1 \right] \\
&= a_1 \left[n - \frac{1}{n-1} (1 - q^{n-1}) \sum_{l=0}^{n-1} l \right] \\
&= \frac{n}{2} a_1 (1 + q^{n-1}), \\
Q &= \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.
\end{aligned}$$

研究

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a_1} (1 - q)(\sigma - Q) \\
&= n(1 - q)(1 + q^{n-1}) - 2(1 - q^n) \\
&= n(1 - q + q^{n-1} - q^n) - 2(1 - q^n) \\
&= (n - 2)(1 - q^n) - nq(1 - q^{n-2}).
\end{aligned}$$

作函数

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (n - 2)(1 - t^n), \\
\psi(t) &= nt(1 - t^{n-2}),
\end{aligned}$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n - 2)$.

但是

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= -n(n - 1)(n - 2)t^{n-2}, \\
\psi''(t) &= -n(n - 1)(n - 2)t^{n-3},
\end{aligned}$$

当 $0 < t < 1$ 时, 有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$, 利用 1288 题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1),$$

即当 $q < 1$ 时, $\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

这就证明了 $\sigma > Q$.

当 $q > 1$ 时, 由 $a_n = b_n$ 得知

$$d = \frac{q^{n-1} - 1}{n-1} a_1 > 0.$$

又

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \\ &= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}), \end{aligned}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

与上述讨论相同, 有

$$\begin{aligned} &\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) \\ &= (n-2)(q^n-1) - nq(q^{n-2}-1). \end{aligned}$$

作函数

$$\varphi(t) = (n-2)(t^n-1),$$

$$\psi(t) = nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$

$$\psi''(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t > 1$ 时, 有 $\varphi''(t) > \psi''(t)$, 利用 1288 题结果有

$$\varphi(t) > \psi(t).$$

于是当 $q > 1$ 时, 便得 $\varphi(q) > \psi(q)$. 因而

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

从而完全证明了 $\sigma > Q$.

证法二:

设等差级数的公差为 d , 等比级数的公比为 q .

如果 $d = 0$, 易见两个级数叙列均为常数叙列, 因此其和相等.

如果 $d \neq 0$, 不妨设 $d > 0$ (否则把末项变为首项, 将叙列颠倒即成), 由于各项均为正的, 所以 $q > 0$.

设首项为 a , 则末项为 $a + nd = aq^n$. 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于 $f(0) = f(n) = 0$, 所以在 $(0, n)$ 内存在一点 c , 使得 $f'(c) = 0$, 而 $f''(x) = -aq^x \ln^2 q < 0$. 从而

$$f'(x) = d - aq^x \ln q$$

为一递减函数. 所以

$$\text{当 } x < c \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x > c \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

从而当 $0 \leq x \leq n$ 时, $f(x) \geq 0$, 其中等号当且仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立. 特别是, 对于 $0 < k < n$, 有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是,

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) > \sum_{k=0}^n aq^k.$$

*) 原题要求证明“大于”. 实际应为“大于或等于”.

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

其中 $x, a_k, b_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 为实数, 来证明哥西—布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

证 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0, \end{aligned}$$

对任何 x 都成立, 故上述二次式的判别式不能为正, 即

$$4 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0,$$

也即,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. 证明: 正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数, 即是

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果, 设

$$a_k = x_k, b_k = \frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

所以,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. 证明: 正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数, 即是

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证 设 $G_n = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$,

$$A_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

则有

$$(G_n)^n = x_1 x_2 \cdots x_n, nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

当 $n = 2$ 时, 我们已有不等式

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

今假定 $n = k$ 时, 有

$$G_k \leq A_k,$$

我们来证 $n = k + 1$ 时, 有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &= [(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}. \end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x) = x^a - (1 - a + ax),$$

$$\text{由 } f'(x) = a(x^{a-1} - 1) \begin{cases} > 0, \text{当 } 0 < x < 1; \\ = 0, \text{当 } x = 1; \\ < 0, \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

故知 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是严格递增的, 而在 $[1, \infty)$ 上是严格递减的. 令 $a = \frac{1}{p}, 1 - a = \frac{1}{q}$, 用 $\frac{a}{b}$ 代替 x , 于是就有下列不等式:

当 $a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

今 $A_k = a, x_{k+1} = b, p = \frac{k+1}{k} > 1, q = k+1 > 1$,

且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

所以,

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

于是,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &\leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} (kA_k + x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = A_{k+1}. \end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

对于任何的自然数 n 均成立.

1296. 设 a 及 b 为二正数, 则由下之等式

$$\text{若 } s \neq 0, \Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数.

特别是, 当 $s = -1$ 时得调和平均数, 当 $s = 0$ 时得几何平均数(试证之!); 当 $s = 1$ 时得算术平均数; 当 $s = 2$ 时得平方平均数.

证明: (1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b).$$

证 先证当 $s = 0$ 时得几何平均数, 由题设知

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}},$$

研究 $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$ 在 $x = 0$ 点的导数, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right\}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(x) \Big|_{x=0} \\ &= \left[\frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2} (a^x \ln a + b^x \ln b) \right] \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a, b) = e^{f'(0)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

$$(1) \text{ 由于 } 2[\min(a, b)]^s \leq a^s + b^s \\ \leq 2[\max(a, b)]^s,$$

所以,

$$\min(a, b) \leq \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \max(a, b),$$

即

$$\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b).$$

$$(2) \text{ 考虑 } \ln \Delta_s(a, b) = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) \\ &= -\frac{1}{s^2} \ln \frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s \ln a + b^s \ln b}{s(a^s + b^s)} \\ &= \frac{1}{s^2(a^s + b^s)} \left[(a^s \ln a^s + b^s \ln b^s) \right. \\ & \quad \left. - (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2} \right]. \end{aligned}$$

由于 $a^s > 0, b^s > 0$, 参看 1314 题(B) 的结果知

$$a^s \ln a^s + b^s \ln b^s > (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2},$$

所以, $\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) > 0$, 即 $\ln \Delta_s(a, b)$ 是严格增函数, 由于对数函数的严格单调增加性, 故知函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的严格增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) \\
&= \lim_{s \rightarrow +\infty} a \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^s \right]^{\frac{1}{s}} = a = \min(a, b), \\
& \lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) \\
&= \lim_{s \rightarrow +\infty} b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^s + \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{s}} = b = \max(a, b).
\end{aligned}$$

1297. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 为可微分二次的函数及

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

证明不等式:

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

证 运用 1266 题解附注的公式(对任何 h)

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \\
& \quad (x \leq \xi_1 \leq x+h),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \\
& \quad (x-h \leq \xi_2 \leq x),
\end{aligned} \tag{2}$$

(1) 减(2), 得

$$\begin{aligned}
& f(x+h) - f(x-h) \\
&= 2f'(x)h + \frac{h^2}{2} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)].
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
2f'(x)h &= f(x+h) - f(x-h) \\
& \quad - \frac{h^2}{2} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)].
\end{aligned}$$

所以

$$2h |f'(x)| \leq |2hf'(x)|$$

$$\begin{aligned} &\leq |f(x+h)| + |f(x-h)| \\ &\quad + \frac{h^2}{2} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \\ &\leq 2M_0 + h^2 M_2, \end{aligned}$$

即

$$M_2 h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geq 0.$$

由于此式对任何 h 都成立, 故此二次式的判别式必非正:

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leq 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leq 2M_0 M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leq 2M_0 M_2.$$

证完.

§ 8. 凹凸性, 拐点

1° 凹的充分条件 若曲线 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的一段, 位于其任意一点的切线之上(或之下), 则称这个可微分的函数 $y = f(x)$ 的图形于闭区间 $[a, b]$ 上是凹(或对应地, 凸)的. 在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下, 当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) > 0 \text{ [或对应地 } f''(x) < 0 \text{]}$$

成立, 为图形是凹(或对应地, 凸)的充分条件.

2° 拐点的充分条件 若函数的图形在某点的凹凸性改变, 则称此点为**拐点**.

若在点 x_0 , 或是 $f''(x_0) = 0$, 或是 $f''(x_0)$ 不存在, 且当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 x_0 便是拐点.

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ 及 $C(0, 0)$ 诸点的凹凸性.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

于 $A(-1, 0)$ 点, $y'' = \frac{2}{9} > 0$, 故在该点附近曲线的图象是凹的;

于 $B(1, 2)$ 点, $y'' = -\frac{2}{9} < 0$. 故在该点附近曲线的图形是凸的;

于 $C(0, 0)$ 点附近, y'' 变号, 因此它是拐点. 在 C 点左边 ($x < 0$), $y'' > 0$, 曲线是凹的; 在 C 点右边 ($x > 0$), $y'' < 0$, 曲线是凸的. 注意, 当 $x = 0$ 时, y'' 不存在.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点:

$$1299. y = 3x^2 - x^3.$$

$$\text{解 } y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x.$$

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = 1$ 为拐点.

$$1300. y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} (a > 0).$$

$$\text{解 } y' = -\frac{2a^3x}{(a^2 + x^2)^2}, y'' = -\frac{2a^3(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}.$$

当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解 $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = 0$ 是拐点(注意, $x = 0$ 时, y'' 不存在).

1302. $y = \sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, y'' = x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$, 图形始终呈凹状. 无拐点.

1303. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = k\pi$ 是拐点($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1304. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点.

1305. $y = \ln(1+x^2)$.

解 $y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $|x| > 1$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = \pm 1$ 是拐点.

1306. $y = x \sin(\ln x) (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

当 $e^{2k\pi + \frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5}{4}\pi}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 是拐点 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1307. $y = x^x (x > 0)$.

解 $y' = x^x (\ln x + 1), y'' = x^x \left\{ \frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right\}$.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形始终是凹的.

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图形.

证 $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = -2 + \sqrt{3}$,

$x_3 = 1$, 对应的函数值为 $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$,

$y_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, y_3 = 1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 + \sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \\ 1 & \frac{1 + \sqrt{3}}{4} & \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

所以拐点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$ 在一条直线上(图 2.48).

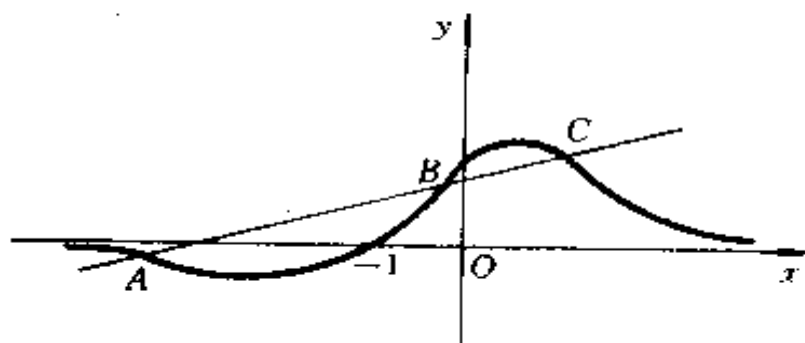


图 2.48

1309. 当如何选择参变数 h 时, “概率曲线”

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

有拐点 $x = \pm \sigma$?

解 $y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$

$$y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (4h^4 x^2 - 2h^2).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x^2 = \frac{1}{2h^2}.$

由于拐点为 $x = \pm \sigma$, 故有

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \text{ 即 } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (\sigma > 0).$$

1310. 研究摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0)$$

的凹凸性。

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

$$= -\frac{\operatorname{csc}^2 \frac{t}{2}}{2a(1 - \cos t)} < 0$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \dots),$$

故摆线始终呈凸状。

1311. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 中可微分二次, 并且:

$$(1) f(a) = A > 0; \quad (2) f'(a) < 0;$$

$$(3) \text{ 当 } x > a, f''(x) \leq 0.$$

证明: 在区间 $(a, +\infty)$ 内有而且仅有方程 $f(x) = 0$ 之一实根。

证 由于 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续且当 $a < x < +\infty$ 时 $f''(x) \leq 0$, 故函数 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 于是当 $a \leq x < +\infty$ 时, 必 $f'(x) \leq f'(a) < 0$; 由此又知函数 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是严格减小的, 因此在 $(a, +\infty)$ 上至多有一点使 $f(x) = 0$, 即在 $(a, +\infty)$ 上方程 $f(x) = 0$ 至多有一(实)根。

下面再证明必有点 $a < x_0 < +\infty$ 存在, 使 $f(x_0) =$

0. 考虑函数 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ ($a \leq x < +\infty$), 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), F''(x) = f''(x), \\ (a \leq x < +\infty).$$

于是当 $a < x < +\infty$ 时 $F''(x) \leq 0$, 从而 $F'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 但 $F'(a) = 0$, 故当 $a \leq x < +\infty$ 时, $F'(x) \leq F'(a) = 0$; 由此又知 $F(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 但 $F(a) = 0$, 因此当 $a \leq x < +\infty$ 时, 恒有 $F(x) \leq F(a) = 0$.

令 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 故 $x^* > a$. 很明显

$$F(x^*) = f(x^*) - f(a) - f'(a) \left[-\frac{f(a)}{f'(a)} \right] \\ = f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*) \leq 0$, 故 $f(x^*) \leq 0$. 于是, 根据连续函数的中间值定理, 知必有 $a < x_0 \leq x^*$ 存在, 使 $f(x_0) = 0$. 证毕.

注 上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$ 代表曲线 $y = f(x)$ (它是凸的) 上的纵坐标与在点 $(a, f(a))$ 处的切线 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ 上的纵坐标之差, 点 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交点 (图 2.49).

1312. 若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地,相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凹(凸)的.

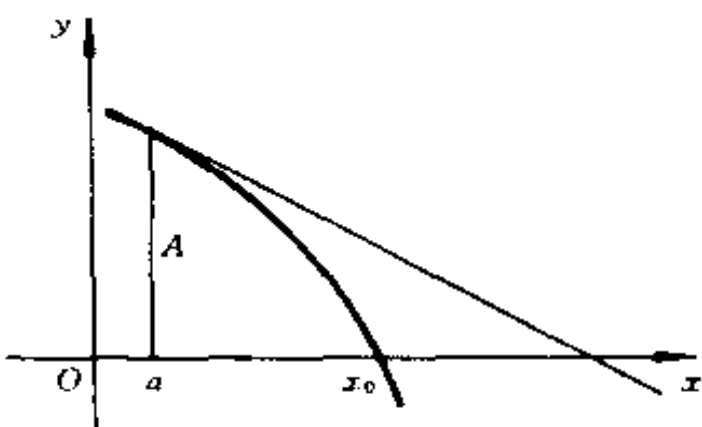


图 2.49

证明: 函数 $f(x)$ (1) 若当 $a <$

$x < b$ 时, $f''(x) > 0$, 则于 (a, b) 上是凹的; (2) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 则于 (a, b) 上是凸的.

证 证法一:

设 x_1, x_2 为 (a, b) 中任意两点, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $a < x_1 < x_2 < b$. 考虑 $0 \leq t \leq 1$ 上的函数 $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$. 显然,

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知: 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1) f'[(1-t)x_1 + tx_2] \\ &\quad - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1) \{ f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c) \}, \end{aligned}$$

其中 $x_1 < c < x_2$. 令 $t_0 = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}$, 则 $0 < t_0 < 1$ 且 $c = (1 - t_0)x_1 + t_0x_2$. 于是 $F'(t_0) = 0$. 此外, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 有

$$F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2].$$

(1) 若 $f''(x) > 0 (a < x < b)$. 由上式知 $F''(t) > 0 (0 \leq t \leq 1)$, 故 $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 上是严格增大的, 再注意到 $F'(t_0) = 0$, 即知: 当 $0 \leq t < t_0$ 时 $F'(t) < 0$; 当 $t_0 < t \leq 1$ 时, $F'(t) > 0$. 由此又知: 在 $0 \leq t \leq t_0$ 上 $F(t)$ 是严格减小的, 在 $t_0 \leq t \leq 1$ 上 $F(t)$ 是严格增大的; 由此, 再用 $F(0) = 0, F(1) = 0$, 即知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) < 0$. 特别 $F(\lambda_2) < 0$. 但 $F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2)$, 故

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0 (a < x < b)$, 则 $F''(t) < 0 (0 \leq t \leq 1)$. 和(1)情形完全类似地可推知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) > 0$. 特别 $F(\lambda_2) > 0$, 由此即知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的.

证法二:

在 (a, b) 内任取两点 x_1 及 x_2 , 使 $a < x_1 < x_2 < b$, 并令 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, 则由 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 知: $x_1 < t < x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x = t$ 点按 1266 题题解附注的公式展开, 得

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(\xi), \quad (1)$$

其中 $a < t < \xi < x$ 或 $a < x < \xi < t$. 将 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 代入(1)式, 得

$$f(x_1) = f(t) + (x_1 - t)f'(t) + \frac{1}{2}(x_1 - t)^2 f''(\xi_1), \quad (2)$$

$$f(x_2) = f(t) + (x_2 - t)f'(t) + \frac{1}{2}(x_2 - t)^2 f''(\xi_2), \quad (3)$$

其中 ξ_1, ξ_2 分别是界于 x_1, t 及 x_2, t 之间的数. 以 λ_1 乘(2)式, λ_2 乘(3)式, 再相加, 得

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2)f(t) + [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2)t]f'(t) + \frac{1}{2}[\lambda_1(x_1 - t)^2 f''(\xi_1) \\ &\quad + \lambda_2(x_2 - t)^2 f''(\xi_2)]. \end{aligned}$$

但 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, 及 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 故 $[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$

$$= \frac{1}{2}[\lambda_1(x_1 - t)^2 f''(\xi_1) + \lambda_2(x_2 - t)^2 f''(\xi_2)]$$

由于 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, (x_1 - t)^2 > 0, (x_2 - t)^2 > 0$, 所以

$$[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

与 $f''(\xi_1), f''(\xi_2)$ 有同样的正负号.

当 $f''(x) > 0$ 时, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

所以, 函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凹的.

当 $f''(x) < 0$ 时, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

所以,函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凸的.

1313. 证明: 函数

$$x^n (n > 1), e^x, x \ln x$$

于区间 $(0, +\infty)$ 上是凹的; 而函数

$$x^n (0 < n < 1), \ln x.$$

于区间 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

证 (1) 设 $y = x^n (n > 1)$, 则

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}.$$

它在 $(0, +\infty)$ 上是大于零的, 因此图形是凹的.

但当 $0 < n < 1$ 时, 则 $y'' < 0$, 故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x , 其二阶导函数为 e^x , 它始终为正, 因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x \ln x$, 其二阶导函数为 $\frac{1}{x}$, 它在 $(0, +\infty)$ 内大于零, 因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$, 其二阶导函数为 $-\frac{1}{x^2}$, 它始终为负, 因此, 在 $(0, +\infty)$ 内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

$$(a) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(b) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y);$$

$$(c) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \\ (x > 0, y > 0).$$

证 我们已知,若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a, b) 内是凹的,则对于 (a, b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left[\frac{x+y}{2}\right].$$

于是,利用 1313 题的结果,我们有,

(a) 设 $f(x) = x^n$, ($x > 0, n > 1$), 则其图形是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left[\frac{x+y}{2}\right]^n.$$

(b) 设 $f(x) = e^x$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 上图形是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$$

(c) 设 $f(x) = x \ln x$, 则对于 $x > 0$ 图形是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y , 得

$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是:联接点 $(x, f(x))$ 及 $(y, f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点(具相同横坐标)的上方.

1315. 证明有界的凸的函数处处连续,并有左侧及右侧的导函数.

证 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的,并设 x_0 为 (a, b) 内的任一点,今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续,且有左侧及右侧的导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x - x_0| < \delta$, 使得这邻域全部包含在 (a, b) 内,并记

$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 + \delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &> tf(x_0 + \delta) + (1 - t)f(x_0) \\ &\geq tM + (1 - t)f(x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 + \delta) \\ &\geq \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1), 得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2), 得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M > 0$, 且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M]$$

$$= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|, \quad (3)$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 类似地也可导出(3)式, 故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, (3)式恒成立.

由此显然有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$, 则(3)式可改写为

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \\ & < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} \quad (0 < |h| < \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (-\delta < h < \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数, 且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2 , 设有 $0 < t_1 < t_2 < \delta$, 并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质, 有

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) & > \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \varphi(0) \\ & = \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2), \end{aligned}$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如

从 $h \rightarrow +0$ 方向看, 则函数 $F(h)$ 严格单调增大. 但由 (4) 可知 $|F(h)| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}$, 即 $F(h)$ 在 $0 < |h| < \delta$ 有界, 故极限 $\lim_{h \rightarrow +0} F(h)$ 存在, 也即 x_0 的右侧导数

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

存在. 同理, 可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中, 对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注 本题不需假定凸函数有界, 证明中也未用到有界这个条件, 参看 E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, § 5. 31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) >$

$\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 作为凸函数的定义, 则需

加上凸函数有界这个条件, 才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

1316. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内可微分二次, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $a < \xi < b$. 证明: 在区间 (a, b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2 , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi) > 0$. 考察 $f'(\xi)$, 分两种情形:

(1) 若 $f'(\xi) = 0$, 则由 $f''(\xi) > 0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta > 0$, 在 $[-\delta + \xi, \xi + \delta] \subset (a, b)$ 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降, 在 ξ 的右侧单调上升. 如

果 $f(-\delta + \xi) = f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi, x_2 = \xi + \delta$, 就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta + \xi) < f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi$, 而在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi + \delta)$ 之间. 由于 $f(x)$ 在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上单调上升, 故存在 $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$, 使 $f(x_2) = f(x_1)$, 从而题中的等式成立. 如果 $f(-\delta + \xi) > f(\xi + \delta)$, 仿前也可取得两点 x_1 及 x_2 , 使 $f(x_1) = f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 则设

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

且

$$F''(\xi) = f''(\xi) > 0.$$

对于函数 $F(x)$, 应用上述(1)的推证方法, 总存在两点 x_1 及 x_2 , 使 $F(x_1) = F(x_2)$, 也即有

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

从而命题得证.

1317. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分两次, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ , 满足

$$f''(\xi) = 0.$$

证 用反证法,即若不存在 ξ ,使 $f''(\xi) = 0$,则当 $x > x_0$ 时,或者 $f''(x) > 0$,或者 $f''(x) < 0$,如果不是这样,即若存在点 a 与 b ,使得 $f''(a) < 0$ 及 $f''(b) > 0$,则由达布定理*)可知,在 a 与 b 之间必有 c 存在,使得 $f''(c) = 0$,这与我们的反证假设矛盾.因此我们不妨设 $f''(x) > 0$,从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的,位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

与 $f(x)$ 的可微性,利用1237题的结果,即知:在 $(x_0, +\infty)$ 中至少存在一点 c_1 ,使

$$f'(c_1) = 0.$$

由 $f''(x) > 0$ 易知 $f'(x)$ 单调上升,从而当 $x > c_1$ 时, $f'(x) > 0$.取 $c_2 > c_1$,则 $f'(c_2) > 0$.

过点 $(c_2, f(c_2))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线,其方程为

$$Y(x) = f(c_2) + f'(c_2)(x - c_2).$$

易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = +\infty,$$

而 $f(x) - Y(x) > 0$,从而应有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

这与原设条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾.同样,对于 $f''(x) < 0$ 的情况也可推得以上结论.

于是,在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ ,使

$$f''(\xi) = 0.$$

*) 达布定理指:若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内有有限的导

函数,且 $g'(a)g'(b) < 0$,则在 (a,b) 内至少有一点 c ,使

$$g'(c) = 0.$$

其证法是:不妨设 $g'(a) < 0, g'(b) > 0$,则在 a 右边且与 a 充分近的点 x ,有 $g(a) > g(x)$;在 b 左边且与 b 充分近的点 x ,有 $g(x) < g(b)$;由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到,从而必有 $g'(c) = 0$.

在本题中,可设 $g(x) = f'(x)$,则由 $g'(a) = f''(a) < 0$ 及 $g'(b) = f''(b) > 0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在,使 $g'(c) = 0$,即 $f''(c) = 0$.

§ 9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则(未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法) 若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点的某邻域 $U, *$ 内有定义并且是连续的(此处 a 为数字或符号 ∞),并且当 $x \rightarrow a$ 时,这两个函数都趋近于零:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 在 a 点的邻域 $U, *$ 内,除 a 点而外,在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在,并且当 $x \neq a$ 时,二者不同时为零;(3) 有限或无穷的极限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在,则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

* 所谓 a 点的邻域 $U, *$ 系指适合于不等式

(1) $|x - a| < \epsilon$, 若 a 为一个数

及

(2) $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, 若 a 为符号 ∞, x 的集合.

洛比塔第二法则(不定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法)若:(1)当 $x \rightarrow a$ 时,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞ ;

(2)对于属于 a 点的邻域 U ,而异于 a 的一切 x 值,导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在,并且当 $x \in U$,及 $x \neq a$ 时,

$$f'(x) + g'(x) \neq 0,$$

(3)有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在,则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法,可使未定形 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0$ 等的求值法化为前面两个类型的未定形;

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$1320. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$1321. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12\sec^2 4x - 12\sec^2 x}{12\cos 4x - 12\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos 4x + \cos x}{\cos^2 x \cos^2 4x} \right) = -2. \end{aligned}$$

$$1322. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x} = 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^2 \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3\sin 3x} \right)^2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$1323. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2 \operatorname{tg} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2 \operatorname{tg}^2 x + 2x \operatorname{tg} x + x^2} \end{aligned}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2 \frac{x}{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^2} = - \frac{1}{3}.$$

1324.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3} \frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}}{4\sin x \cos x} = \frac{1}{3}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x + xe^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^x + xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t + t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{t}{\sin t} \cos t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x - 2 \operatorname{arc} \sin x}{x^3}$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left\{ \frac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = 1.$$

1328. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arcsin \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arcsin \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a-b}{(x+a)(x+b)}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{(x+a)^2} - \frac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$= \frac{a-b}{3ab} \quad (ab \neq 0).$$

1329. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - \cos x \cdot a^{\sin x}) \ln a}{3x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x} \ln a}{2x} \\
&= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x \cos x \cdot a^{\sin x} \ln a \\
&\quad + \sin 2x \cdot a^{\sin x} \ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin x} \ln^2 a) \\
&= \frac{\ln a}{6} (a > 0).
\end{aligned}$$

1330. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right)$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}^{*}) = 1.$

*) 利用 1318 题的结果.

1332. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 (b \neq 0).$$

$$1333. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin(\sin x) + \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x) + \cos x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24x} \left[\cos x \sin(\sin x) + \frac{1}{2} \sin 2x \cos(\sin x) \right. \\ &\quad \left. + \sin 2x \cos(\sin x) + \cos^3 x \sin(\sin x) - \sin x \right] \\ &= \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\sin x \sin(\sin x) + \cos^2 x \cos(\sin x) \right. \\ &\quad \left. + 3 \cos 2x \cos(\sin x) - \frac{3}{2} \cos x \sin 2x \sin(\sin x) \right. \\ &\quad \left. - 3 \cos^2 x \sin x \sin(\sin x) + \cos^4 x \cos(\sin x) - \cos x \right] \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1334. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2x}{\cos 2x \operatorname{sh}^2 x + \sin 2x \operatorname{sh} 2x + \operatorname{ch} 2x \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{sh}2x + 2\sin 2x}{-2\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + 3\cos 2x \operatorname{sh} 2x + 3\sin 2x \operatorname{ch} 2x + 2\operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (4\operatorname{ch} 2x + 4\cos 2x)(-4\cos 2x \operatorname{sh}^2 x \\
&\quad - 2\sin 2x \operatorname{sh} 2x - 6\sin 2x \operatorname{sh} 2x + 6\cos 2x \operatorname{ch} 2x \\
&\quad + 6\cos 2x \operatorname{ch} 2x + 6\sin 2x \operatorname{sh} 2x + 4\operatorname{ch} 2x \sin^2 x \\
&\quad + 2\sin 2x \operatorname{sh} 2x)^{-1} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$1335. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x},$$

其中 $\operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh} x - \sin x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \cdot \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \right)}{\operatorname{sh} x + \sin x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\operatorname{ch} x + \cos x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

1336. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} (\epsilon < 0)$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = 0$.

1337. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} (a > 0, n > 0)$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0$.

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数, 则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是,

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} (x > 1).$$

而左右两端当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 上面已证明它们的极限为零. 因此, 中间的极限也为零. 于是, 对于任意大于零的实数 a 和 n , 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

$$1338. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50} \text{ *)}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$1339. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}} = 0. \text{ *)}$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$1340. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2 x}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0.$$

$$1341. \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x \quad (\epsilon > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\epsilon}{\epsilon} = 0.$$

$$1342. \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 \quad (*) = 1.$

*) 利用 1341 题的结果.

1343. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1}.$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(x^x - 1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}.$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \quad (*) , \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-2x \ln x) = 0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +0} \{ (e^{x \ln x} - 1) \ln x \} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln^2 x \right\} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x} = e^0 = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

1344. $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1).$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1).$

利用 1342 题的结果,有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1,$$

故得

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{x^x \ln x} = 0,$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = -1.$$

1345. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{k}{1+\ln x} \ln x = k \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

1346. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

$$1347. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = \frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

$$1348. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{-2 \operatorname{csc}^2 2x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}.$$

$$1349. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \operatorname{ctg} x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\operatorname{csc} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\operatorname{csc}^2 x}{\operatorname{ctg} x}}{-\operatorname{csc} x \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

$$1350. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow -0} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y}$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y \ln y} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$$

$$1351. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1} (1+2x)^2} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(1+2x)^3 \frac{2\pi}{(1+2x)^2 \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}} \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+2x) \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} \end{aligned}$$

$$= 0.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$1352. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg}(x-a) \ln \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tga}}{\operatorname{tg}(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}} \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$$

$$1353. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - x \ln b)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(a^x - 1) \ln a}{a^x - x \ln a} - \frac{(b^x - 1) \ln b}{b^x - x \ln b}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^x \ln^2 a (a^x - x \ln a) - (a^x - 1)^2 \ln^2 a}{(a^x - x \ln a)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^x \ln^2 b (b^x - x \ln b) - (b^x - 1)^2 \ln^2 b}{(b^x - x \ln b)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

$$1354. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{2}.$$

$$1355. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}$$

$$1356. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$$

$$1357. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x) \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + \ln(1+x)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$1358. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (a^x \ln a - a x^{a-1}) = a^a (\ln a - 1).$$

$$1359. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]
\end{aligned}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.$$

1360. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right] - a^x \ln a}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right]^2 + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right] - a^x \ln^2 a \right\}$$

$$= \frac{1}{a}.$$

1361. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x} = - \frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x,$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\operatorname{th} x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{th} x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x \operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2\operatorname{ch} 2x}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\operatorname{sh} 2x} = 0.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x = e^0 = 1.$

1363. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{arc} \sin x) - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x \sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \sin x}{\left(4x \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \operatorname{arc} \sin x + 2x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arc sin } x}{2(2 - 3x^2)\text{arc sin } x + 2x\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\text{arc sin } x + \frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}} \\
&= \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{arc sin } x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}.$$

1364. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

1365. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{arc cos } x \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1366. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x - \operatorname{th} x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2} = -1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1}.$$

1367. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x \left[\frac{1}{m} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{n}-1} \right]} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \frac{mn}{n-m} \quad (n \neq m), \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[n]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[m]{\operatorname{ch} x}} = \frac{mn}{n-m}.$$

1368. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}$.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

1369.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,有

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + o \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{3} + o \left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{3} + o(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + o \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{2} + o \left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(e^x + x)}{x} &= \frac{1}{x} \ln[e^x(1 + xe^{-x})] \\ &= 1 + \frac{1}{x} \ln(1 + xe^{-x}) \\ &= 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{这是由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = 0). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \\ &= \left[x + \frac{1}{3} + o(1)\right] - \left[x + \frac{1}{2} + o(1)\right] \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \left[x + \frac{1}{3} + o(1)\right] - \left[x + \frac{1}{2} + o(1) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{6} + o(1), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{6} + o(1) \right] = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

1370. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right].$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = e^{o\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

及

$$x^{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}} = x^{-\frac{a}{x(x+a)}} = e^{-\frac{a}{x(x+a)} \ln x} = e^{o\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 于是得

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} \\ &= (x+a) \cdot x^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x}} x^{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \left\{ (x+a) \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \right\} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \{ [x+a+o(1)] - [x+o(1)] \} \\ &= x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)], \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \{ x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)] \} = a. \end{aligned}$$

1371. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$], 且在此有斜角 α , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha^*.$

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x = 0$ 点有 $f'(0) = \operatorname{tg} \alpha$, 注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 以及 $f'(0)$ 存在, 如果再假定 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{1} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

1372. 若当 $x \rightarrow +0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0,$

0) [$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$], 并且当 $0 < x < \epsilon$ 时, 此曲线完全是在两直线 $y = -kx$ 及 $y = kx$ ($k \neq \infty$) 所组成的锐角之内, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

证 当 $x \rightarrow +0$ 时, 有 $x \ln x \rightarrow 0$. 按题设应有

$$-kx \leq f(x) \leq kx \quad (k > 0, 0 < x < \epsilon),$$

而当 $x > 0$ 且很小时, 有 $\ln x < 0$, 故

$$kx \ln x < f(x) \ln x < -kx \ln x,$$

从而有

$$e^{kx \ln x} < e^{f(x) \ln x} < e^{-kx \ln x}.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时, 不等式两端均趋于 $e^0 = 1$, 注意到 $e^{f(x) \ln x} = x^{f(x)}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

1373. 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$

及 $h^2 \rightarrow 0$, 且分子、分母(视为 h 的函数)都有导数, 又注

意到分母的导数 $2h \neq 0$ ($h \rightarrow 0$ 但 $h \neq 0$), 故对 $\lim_{h \rightarrow 0}$

$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ 可用洛比塔法则, 并

且继续运算,最后得证

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x).
 \end{aligned}$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}.$$

解 (a) 分子、分母分别求导数,得商为

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x \rightarrow 0$ 时,极限不存在,因此洛比塔法则不能适用.但是,原极限是存在的.事实上,函数

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x},$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ 及 $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

(6) 分子、分母分别求导数, 得商为

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上述函数的极限不存在, 因此洛比塔法则不能适用. 但是, 原极限是存在的, 事实上, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(B) 如果运用洛比塔法则, 就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5e^{-2x}\sin x - 2xe^{-x^2}\sin^2 x + e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}e^{-x} + xe^{-x^2+x}\sin x - e^{-x^2+x}\cos x \right) = 0. \end{aligned}$$

这个结果是错误的. 事实上, 若取 $x_n = n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 对于数列 $\{x_n\}$, 原式的分母 $e^{-x_n} \cdot (\cos x_n + \sin x_n) = \sqrt{2}e^{-x_n}\sin\left(x_n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-(n\pi + \frac{3\pi}{4})} \cdot \sin(n+1)\pi = 0$, 而分子不为零, 此时原式的极限不存在, 从而对于 $x \rightarrow +\infty$, 原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为

零,但其导函数在点列 $x^{(n)} = n\pi (n = 1, 2, \dots)$ 上两者同时出现了零点. 因此,一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件;另一方面也不允许在求极限过程中,用 $\sin x$ 作除数,上、下同时约分后再求极限.

(r) 如果运用洛比塔法则,就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x} [1+\cos 2x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x} [2\cos^2 x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin x} \left[1+\frac{1}{2\cos x} (x+\sin x \cos x) \right]}. \end{aligned}$$

由于

$$e^{\sin x} \geq e^{-1}, x+\sin x \cos x \geq x-1,$$

故当 $x > 1$ 时,有

$$\begin{aligned} & \left| e^{\sin x} \left[1+\frac{1}{2\cos x} (x+\sin x \cos x) \right] \right| \\ & \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2|\cos x|} (x-1) - 1 \right] \\ & \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2} (x-1) - 1 \right] \rightarrow +\infty \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时)}, \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} = 0.$$

这个结果是错误的. 事实上, 对于不同的叙列:

$$x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x''_n = 2n\pi (n = 1, 2, \dots),$$

让 $n \rightarrow +\infty$, 则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1, 从而原极限是不存在的. 原因与 (b) 的情况类似, 只是注意到 $\cos x$ 在 $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上 ($n = 1, 2, \dots$) 取值为零. 因此, 本题不符合运用洛比塔法则的条件; 当然也不允许在中间过程里, 用 $\cos x$ 作除数, 上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形, 其弦为 b , 矢为 h , 又有内接于此弓形之内的等腰三角形, 若当 R 不变时弓形的弧趋于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比. 利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示.

$AB = b, DC = h,$

$\angle AOB = \alpha, \triangle ABC$ 为

内接等腰三角形, 其面

积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

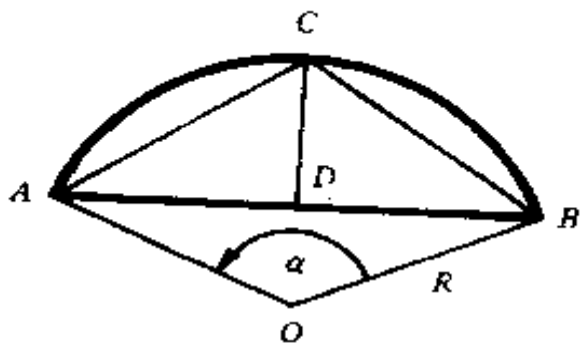


图 2.50

弓形面积为 $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$

当弧长趋于零时, α 趋于零, 于是, 弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh.$$

§ 10. 台劳公式

1° 台劳局部公式 若(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x - x_0| < \epsilon$ 内有定义; (2)于此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) n 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n), \quad (1)$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (k = 0, 1, \dots, n).$

特例,当 $x_0 = 0$ 时,有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n). \quad (2)$$

在所示的条件下,(1)式是唯一的.

从台劳局部公式(2),得出下列五个重要的展开式:

$$I. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$II. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$III. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$IV. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$V. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2° 台劳公式 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义; (2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 当 $a < x < b$ 时, 有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式), 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西余项公式).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表成二项式 $x + 1$ 的正整数乘幂多项式.

$$\text{解 } P'(x) = 3 + 10x - 6x^2, \quad P'(-1) = -13.$$

$$P''(x) = 10 - 12x, \quad P''(-1) = 22.$$

$$P'''(x) = -12, \quad P'''(-1) = -12.$$

$$P^{(4)}(x) = 0, \quad P^{(4)}(-1) = 0.$$

按台劳公式有

$$\begin{aligned} P(x) &= P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) \\ &+ \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \\ &R_4(x), \end{aligned}$$

这里 $R_4(x) = 0$, 即展开式中的余项为零, 将上述结果代入, 即得

$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

按变数 x 的正整数乘幂, 写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项:

1377. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项, $f^{(4)}(0)$ 等于甚么?

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= (1+x+x^2) \frac{(1+x)}{1-x^3} \\ &= (1+x)(1+x+x^2) \cdot [1-x^3+o(x^6)] \end{aligned}$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot (-2) = -48.$$

1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, 则

$$f'(x) = \frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x) = \frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

而

$$f(0) = 1, f'(0) = 60, f''(0) = 3900.$$

所以, 按台劳公式就有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2).$$

1379. $\sqrt[m]{a^m + x} (a > 0)$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{m}(a^m + x)^{\frac{1-m}{m}},$$

$$f''(x) = \frac{(1-m)(a^m + x)^{\frac{1-2m}{m}}}{m^2},$$

而

$$f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{m}a^{1-m}, f''(0) = \frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}.$$

于是

$$\sqrt[m]{a^m + x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$- 3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+ \frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$- \frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = \frac{1}{3}, f'''(0) = 6,$$

于是,

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \\ &= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad e^{2x-x^2} &= 1 + (2x - x^2) \\ &+ \frac{(2x - x^2)^2}{2!} + \frac{(2x - x^2)^3}{3!} + \frac{(2x - x^2)^4}{4!} \\ &+ \frac{(2x - x^2)^5}{5!} + o(x^5) \\ &= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时, 令 $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \Delta$, 则有

$$\Delta = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1+\Delta} \\ &= 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt[3]{\sin x^3} &= \left[x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15}) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right)^2 + o(x^{12}) \right] \\ &= x - \frac{7}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}). \end{aligned}$$

1384. $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln \cos x &= \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^8 x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^6 + o(x^6) \Big] \\
& = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

其中用到: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow 0$), 故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^4) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 \\
&\quad + o(x^4) \\
&= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

1386. $\operatorname{tg} x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时, 有

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta,$$

其中 $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ 很小, 易见 $\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$.

于是,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \frac{1}{1 - \Delta}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \\
&\quad \cdot (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)) \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

解

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\
&= \ln \left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \right] \\
&= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
\end{aligned}$$

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}, f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

于是,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

1389. 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x) = x^x(1 + \ln x),$

$$f''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1},$$

$$f'''(x) = x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x)$$

$$+ x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x} + \ln x\right).$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = 2, f'''(1) = 3.$$

于是,

$$x^x - 1 = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$$

$$+ o((x-1)^3).$$

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中, 用二阶抛物线近似地代替函数

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

解 $y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}|_{x=0} = 0,$

$$y''|_{x=0} = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}|_{x=0} = \frac{1}{a}.$$

于是,

$$a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2).$$

1391. 按分式 $\frac{1}{x}$ 的正整数乘幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ ($x > 0$) 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^2} - x = x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - x \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

1392. 求函数 $f(h) = \ln(x+h)$ ($x > 0$) 按增量 h 的正整数乘幂展开到含 h^n 的项 (n 为自然数).

$$\begin{aligned} \text{解 } \ln(x+h) &= \ln\left[x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n). \end{aligned}$$

1393. 设:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

证 按题设,我们有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h),$$

其中 $0 < \theta < 1$.

又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在,故

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}). \end{aligned}$$

比较上面两式,得

$$\begin{aligned} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) &= \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \theta \cdot \frac{f^{(n)}(x + \theta h)}{\theta h} &= \frac{f^{(n)}(x)}{h} \\ &= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n! \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \theta h)}{\theta h} - \frac{f^{(n)}(x)}{h} = f^{(n+1)}(x) \neq 0$,

故由上式知 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 存在,并且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差:

$$(a) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1;$$

$$(6) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(B) \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad \text{当 } |x| \leq 0.1;$$

$$(r) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1.$$

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

(a) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\left| R_{n+1}(x) \right| < \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(6) 由 $f(x) = \sin x$, 得

$$\left| f^{(5)}(\theta x) \right| = \left| \sin \left(\theta x + \frac{5}{2}\pi \right) \right| \leq 1.$$

于是, 当 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| R_4(x) \right| \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(B) 由 $f(x) = \operatorname{tg} x$, 得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24\sin x}{\cos^5 x} - \frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16}{\cos^2 x} + \frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{32\sin x}{\cos^3 x} + \frac{240\sin x}{\cos^5 x} + \frac{720\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$ 是偶函数, 又当 $0 \leq x \leq 0.1$ 时, $f^{(6)}(x) \geq 0$, 所以, $f^{(5)}(x)$ 在 $x = \pm 0.1$ 处达到最大值, 注意到

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = 0,$$

及

$$\cos^2 0.1 = 1 - \sin^2 0.1 > 0.9,$$

$$\left| f^{(5)}(x) \right| \leq \frac{16}{0.9} + \frac{120 \times 0.1^2}{0.9^3} < 20.$$

于是,

$$\left| R_5(x) \right| \leq \frac{0.1^5}{5!} \times 20 < 2 \times 10^{-6}.$$

(r) 由 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$\left| f'''(x) \right| = \frac{3}{8} \left| \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{3}{8}.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\left| R_3(x) \right| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{16}.$$

1395. 近似公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 准确到 0.0001.

解 误差 $\Delta \leq \frac{|x|^4}{4!}$ 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$, 于是

$$|x| < 0.22134(\text{弧}) = 12^\circ 41'.$$

1396. 利用台劳公式近似地计算:

(a) $\sqrt[3]{30}$; (b) $\sqrt[5]{250}$; (c) $\sqrt[12]{4000}$;

(r) \sqrt{e} ; (d) $\sin 18^\circ$; (e) $\ln 1.2$;

(A) $\text{arc tg} 0.8$; (a) $\text{arc sin} 0.45$; (u) $(1.1)^{1.2}$, 并估计误

差.

解 (a) $\sqrt[3]{30} = 3 \left(1 + \frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{1}{9} \right)^2 \right]$$

$$\approx 3.1070;$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

(b) $\sqrt[5]{250} = 5 \left(1 + \frac{7}{243} \right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 5 \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{7}{243} \right)^2 \right]$$

$$\approx 3.0171;$$

$$\Delta < \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{7}{243} \right)^3 \approx 1.15 \times 10^{-6}.$$

(c) $\sqrt[12]{4000} = 2 \left(1 + \frac{3}{128} \right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2 \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{128} \right) \approx 1.9960;$$

$$\Delta < \left(\frac{3}{128} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{128}} \approx 5.625 \times 10^{-4}.$$

$$\begin{aligned} (\Gamma) \sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \\ &+ \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2} \right)^6 \approx 1.64872; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{2} \right)^8 + \dots < \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2} \right)^7 \cdot \\ &\frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} \approx 1.7 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

$$(\Delta) \sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^5 \approx 0.309017,$$

$$\Delta < \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

$$(\epsilon) \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2) \approx 0.2$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 \\ &+ \frac{1}{5} (0.2)^5 - \frac{1}{6} (0.2)^6 + \frac{1}{7} (0.2)^7 \approx 0.182322; \end{aligned}$$

$$\Delta < \frac{1}{8} (0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

$$(\kappa) \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.8 \approx 0.8 - \frac{1}{3} (0.8)^3 + \frac{1}{5} (0.8)^5$$

$$- \frac{1}{7} (0.8)^7 + \dots - \frac{1}{39} (0.8)^{39}$$

$$\approx 0.67474 \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx 38^\circ 39' 35'';$$

$$\Delta < \frac{1}{4!}(0.8)^4 \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

$$(a) \arcsin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3}(0.45)^3$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13}$$

$$\approx 0.46676 \text{ 弧度} \approx 26^\circ 44' 37''$$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \dots$$

$$< \frac{1}{15}(0.45)^{15}[1 + (0.45)^2$$

$$+ \dots] < \frac{1}{15}(0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1 - (0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}.$$

(ii) 事实上, 只需计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1 + 0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$+ \dots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项, 所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2 \ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117$.

$$\Delta = \frac{1}{4!} e^{1.2 \times 0.0953} (0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算:

(a) e 准确到 10^{-9} ; (b) $\sin 1^\circ$ 准确到 10^{-8} ;

(c) $\cos 9^\circ$ 准确到 10^{-5} ; (d) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4} ;

(1) $\log_{10} 11$ 准确到 10^{-6} .

$$\begin{aligned} \text{解 (a)} \Delta &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

要 $\Delta < 10^{-6}$, 只需 $n!n > 10^6$, 即只需 $n \geq 11$. 于是,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

$$(6) \Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-8}$, 只需 $\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1} < 10^{-8}$, 即只需 $n \geq 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \approx 0.01745241.$$

$$(8) \Delta < \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只需 $\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n} < 10^{-5}$, 即只需 $n \geq 3$. 于是,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 \approx 0.98769.$$

$$(r) \sqrt{5} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta < \frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$, 只需 $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$, 即只需 $n \geq 4$. 于是,

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &\approx 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2! \cdot 2^2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \right] \\ &\approx 2.2361.\end{aligned}$$

$$(1) \log_{10} 11 = 1 + \log_{10}(1 + 0.1),$$

$$\Delta < \frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只需 $\frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1} < 10^{-5}$, 即只需 $n \geq 4$.

于是,

$$\begin{aligned}\log_{10} 11 &\approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2} (0.1)^2 + \frac{1}{3} (0.1)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (0.1)^4 \right] \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.\end{aligned}$$

利用展开式 $1 - V$, 求下列极限:

$$1398. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \right) x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

$$1399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[(1+x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) \right] \cdot \left[(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) \right] - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

$$1400. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2 \right) \right]$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = - \frac{1}{4}.$$

$$1401. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} - \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 - \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

1402. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right],$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right. \\
& \quad \left. - x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{8x^{12}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right) \right) \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

1403. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} (a > 0).$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^2} \\
& = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) - 2 \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +0} [\ln^2 a + o(1)] = \ln^2 a (a > 0).
\end{aligned}$$

1404. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

1405. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x + o(x)}{1 + o(x^2)}$$

$$= 0.$$

1406. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3) \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} + o(x^2) \right] = \frac{1}{3}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 假设:

1407. $y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x).$

解
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots.$$

从而

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{2}{15} \sin^5 x + \frac{1}{35} \sin^7 x + o(\sin^7 x) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{3!} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5!} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7!} \operatorname{tg}^7 x + o(\operatorname{tg}^7 x) \right) \\
= & \left[\left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right) \right. \\
& + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{2}{15} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^5 \\
& \left. + \frac{1}{315} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^7 \right] \\
= & \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right) \right. \\
& - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right)^5 \\
& \left. - \frac{1}{7!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right)^7 + o(x^7) \right] \\
= & \frac{x^7}{30} + o(x^7).
\end{aligned}$$

故 y 的主项为 $\frac{x^7}{30}$.

1408. $y = (1+x)^e - 1$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= e^{\ln(1+x)} - 1 = e^{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - 1 \\
&= e^{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - 1 \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x) \right) + o \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x) \right) - 1 \\
&= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),
\end{aligned}$$

故主项为 x^2 .

$$1409. y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y &= 1 - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} = 1 - e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1} \\ &= 1 - e^{-\frac{x}{2} + o(x)} \\ &= 1 - \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) + o\left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) \right] \\ &= \frac{x}{2} + o(x), \end{aligned}$$

故主项为 $\frac{x}{2}$.

1410. 当选择怎样的系数 a 与 b 时, 量

$$x - (a + b \cos x) \sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x - (a + b \cos x) \sin x &= x - a \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] \\ &\quad - \frac{b}{2} \left[2x - \frac{1}{3!} (2x)^3 + \frac{1}{5!} (2x)^5 + o(x^5) \right] \\ &= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right) x^3 \\ &\quad - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right) x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - a - b = 0, \\ \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} = 0. \end{cases}$$

解之,得 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$.

1411. 当 $|x|$ 为小量时,推出下列各式的简单的近似公式:

$$(a) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} (R > 0);$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(c) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$$

$$(d) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$$

解 (a) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{R} \right)^{-2} \right]$
 $\approx \frac{1}{R^2} \left[1 - 1 + \frac{2x}{R} \right] = \frac{2x}{R^3};$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

 $- \left(1 - \frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}}$
 $\approx \left[1 + \frac{2x}{3(1-x)} \right] - \left[1 - \frac{2x}{3(1+x)} \right]$
 $\approx \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4}{3}x;$

$$(c) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right] \approx \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{nx}{100} \right) \right] = \frac{nA}{100};$$

$$(d) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)} = \frac{\ln 2}{\frac{x}{100} - \frac{x^2}{20000} + \dots}$$

$$\approx \frac{\frac{\ln 2}{x}}{\frac{1}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时, 推出形如

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

$$\begin{aligned} \text{解 } x &= \alpha \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] \\ &+ \beta \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right] \\ &= (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right) x^3 \\ &+ \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right) x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (1 - \alpha - \beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right) x^3 \\ - \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right) x^5 + o(x^5) = 0. \end{aligned}$$

要此近似公式准确到 x^5 项, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之, 得 } \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$$

于是, 近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}x;$$

弧长 = 中心角 \times 半径, 设中心角为 x , 半径为 R , 则弧长 = $Rx \approx \frac{2R}{3}\sin x + \frac{R}{3}\operatorname{tg}x$, 此即小角度的弧长的近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差: 圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和, 此等腰三角形是立于弧所对的弦上, 并且高为此弓形之矢的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R\sin\alpha, BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1 - \cos\alpha),$$

$$\begin{aligned} DC^2 &= \frac{4}{3}R^2(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= R^2\left(2 - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos 2\alpha\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } BD^2 &= BC^2 + DC^2 \\ &= R^2\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right) \\ &= R^2\left\{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}\left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 - \frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\} + o(\alpha^7) \\ &= R^2(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6) + o(\alpha^7) \end{aligned}$$

$$= R^2 \alpha^2 \left[1 - \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right]$$

$$= R^2 \alpha^2 [1 - \Delta],$$

$$\text{其中 } \Delta = \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^4),$$

$$BD = R\alpha \sqrt{1 - \Delta} =$$

$$R\alpha \left[1 - \frac{1}{2} \Delta + o(\Delta^2) \right] =$$

$$R\alpha \left[1 - \frac{1}{180} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right].$$

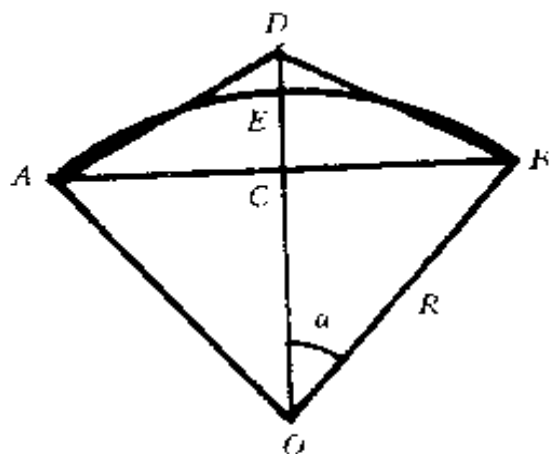


图 2.51

从而得

$$|\widehat{BE} - BD| = \left| R\alpha - R\alpha \left[1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5) \right] \right|$$

$$= \frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5).$$

因此, 所求的相对误差为

$$\left| \frac{\widehat{AB} - (\widehat{AD} + \widehat{DB})}{\widehat{AB}} \right| = \left| \frac{2\widehat{BE} - 2BD}{2\widehat{BE}} \right|$$

$$= \frac{|\widehat{BE} - BD|}{|\widehat{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).$$

可见 α 愈小, 相对误差就愈小, 就愈精确.

§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1. 有极值的必要条件 若函数于点 x_0 的双侧邻域中有定义, 并且

对于某域： $0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x ，有下列的不等式成立：

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值)。

在有极值的点导函数 $f'(x_0) = 0$ (假定它存在)。

2° 有极值的充分条件 第一法则：若(1)函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的，且在 x_0 点， $f'(x_0) = 0$ 或不存在(临界点)；(2) $f(x)$ 在范围： $0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$ ；(3)导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来：

	导函数的符号		结 论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无 极 值
II	+	-	极 大 值
III	-	+	极 小 值
IV	-	-	无 极 值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$ ，并且在点 x_0 有下列条件成立：

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说：当 $f''(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0) > 0$ 时，有极小值。

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导函数 $f'(x)$ ， $\dots, f^{(n-1)}(x)$ ，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0$ 。这时：(1)若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值；(2)若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值。

3° 绝对极值 在闭区间 $[a, b]$ 内，连续函数 $f(x)$ ，或于其临界点

(就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点), 或于所给闭区间的端点 a 和 b , 达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值:

1414. $y = 2 - x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 由于 $y'' = -2 < 0$, 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415. $y = (x - 1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x - 1)^2 > 0$ (除 $x = 1$ 外), 即函数始终上升, 故函数 y 无极值.

1416 $y = (x - 1)^4$.

解 $y' = 4(x - 1)^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 当 $x < 1$ 时 $y' < 0$, 当 $x > 1$ 时 $y' > 0$, 所以函数 y 当 $x = 1$ 时取极小值

$$y = 0.$$

1417. $y = x^m(1 - x)^n$ (m 及 n 为正整数).

解 $y' = x^{m-1}(1 - x)^{n-1}[m - (m + n)x]$, 由 $y' = 0$ 得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m + n}.$$

(1) 若 m 为偶数, 则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$,

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$,

所以在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数, 则 y' 在 $x = 0$ 邻近不变号, 故无极值.

(3) 不论 m, n 是奇数还是偶数时, 由于

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$,

当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时, $y' < 0$.

所以, 函数 y 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理, 容易得知: 若 n 为偶数时, 则当 $x = 1$ 时有极小值

$$y = 0.$$

若 n 为奇数, 则当 $x = 1$ 时函数 y 无极值.

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$.

解 $y' = -\sin x + \operatorname{sh} x$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$. 由于

$$y'' = -\cos x + \operatorname{ch} x, y''(0) = 0,$$

$$y'' = \sin x + \operatorname{sh}x, y''(0) = 0,$$

$$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch}x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以,当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 2$.

1419. $y = (x + 1)^{10}e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x + 1)^9(9 - x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 9$.

由于

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } y' < 0,$$

$$\text{当 } -1 < x < 9 \text{ 时, } y' > 0,$$

$$\text{当 } x > 9 \text{ 时, } y' < 0,$$

所以,当 $x = -1$ 时有极小值 $y = 0$; 当 $x = 9$ 时有极大值

$$y = 10^{10}e^{-9} \approx 1234100.$$

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n 为自然数).

解 $y' = -\frac{1}{n!}e^{-x}x^n$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

(1) 若 n 为偶数, 由于 $y' < 0$ (除 $x = 0$ 外), 故当 $x = 0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数, 则

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y' > 0,$$

当 $x > 0$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$.

1421. $y = |x|$.

解 当 $x = 0$ 时, 得 $y = 0$, 又在 $x = 0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$, 恒有 $y = |x| > 0$, 所以, 当 $x = 0$ 时函数有极小值 $y = 0$. 注意, $y' |_{x=0}$ 不存在.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时, $y' > 0$,

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $y' > 0$,

当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = 0$ 时无极值; 当 $x = \frac{1}{3}$ 时有极大值

$$y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} \approx 0.529;$$

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$.

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

(n 为自然数), 其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0)$

$\neq 0$. 研究此函数在点 $x = x_0$ 的极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是, $f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性有关.

(1) 若 n 为奇数, 则经过 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的值变号, 所以在 $x = x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数, 则 $(x - x_0)^n > 0$ ($x \neq x_0$). 因而当 $\varphi(x_0) > 0$ 时, 则 $f(x) > f(x_0) = 0$ ($0 < |x - x_0| < \delta$),

所以, 当 $x = x_0$ 时有极小值 $f(x_0) = 0$.

当 $\varphi(x_0) < 0$ 时, 则 $f(x) < f(x_0) = 0$ ($0 < |x - x_0| < \delta$),

所以, 当 $x = x_0$ 时有极大值 $f(x_0) = 0$.

1424. 设:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

及 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点, 就是说

$$P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0.$$

证明: $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'(x_0)$.

证 因为

$$f''(x) = \frac{P_1'(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^3(x)},$$

于是

$$f''(x_0) = \frac{P_1'(x_0)}{Q_2(x_0)}.$$

由于 $Q_2(x_0) > 0$, 所以有

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值, 则在此点某充分小邻域内, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升, 而右侧下降?

解 不能断定. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 2 & \text{, 当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) - f(0) &= -x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) < 0 \\ &(x \in (-\delta, \delta), x \neq 0). \end{aligned}$$

所以在 $x = 0$ 点有极大值 $f(0) = 2$.

易知

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0).$$

故在 $x = 0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负, 故在 $x = 0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(时上升时下降).

1426. 已给函数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

证明: 虽然

$$f^{(n)}(0) = 0 (n = 1, 2, \dots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 有极小值.

作出此函数的图形.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

由于

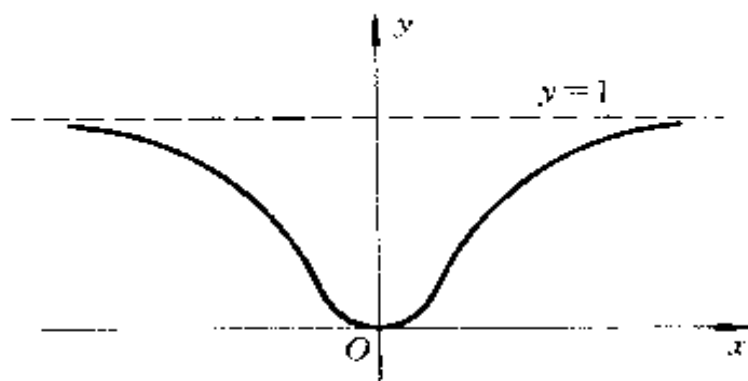


图 2.52

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{6x^2}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过 $x = 0$ 点 $f'(x)$ 从负变到正, 故 $f(0) = 0$ 为极小值.

令 $f''(x) = 0$ 解得拐点 $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$f(x) = f(-x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

知, $f(x)$ 为偶函数, $y = 1$ 为渐近线(图 2.52).

1427. 研究下列函数的极值:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$ 及

$$f(0) = 0;$$

(b) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$ 及

$$f(0) = 0.$$

作出这些函数的图形.

解 由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$, $\left| \cos \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}} > 0$, 所以对于 (a) 和 (b) 均有 $f(x) > f(0)$ ($x \neq 0$), 故当 $x = 0$ 时均有极小值 $f(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$, (a) 和 (b) 均存在 $f'(x)$, 但易知 $f'(x) = 0$ 无解, 因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

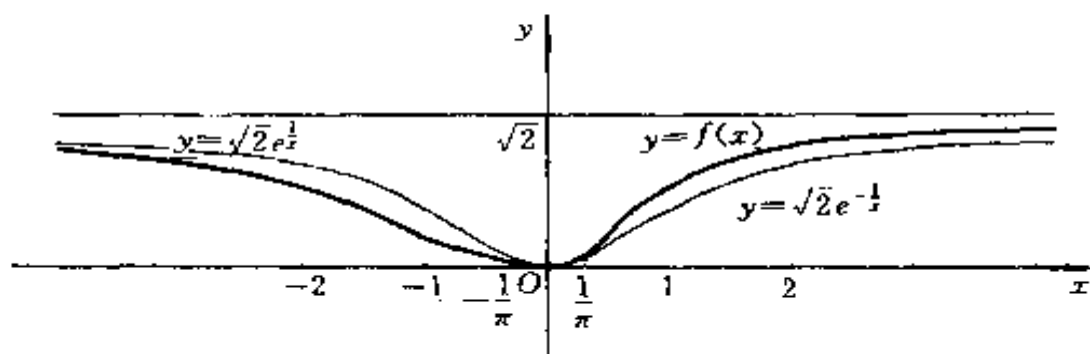


图 2.53

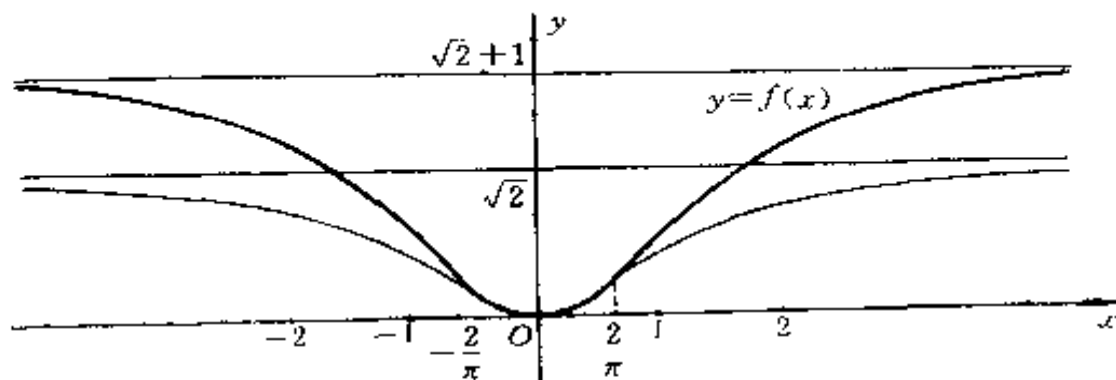


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right) \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点 $x = 0$ 处的极值, 并作出此函数的图形.

解 由于当 $x \neq 0$ 时, 恒有 $f(x) > f(0)$, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $f(0) = 0$, 其图形如图 2.55 所示, 它对称于 Oy 轴, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$.

求下列函数的极值:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3 . 因为

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0, y''(3) = 6 > 0,$$

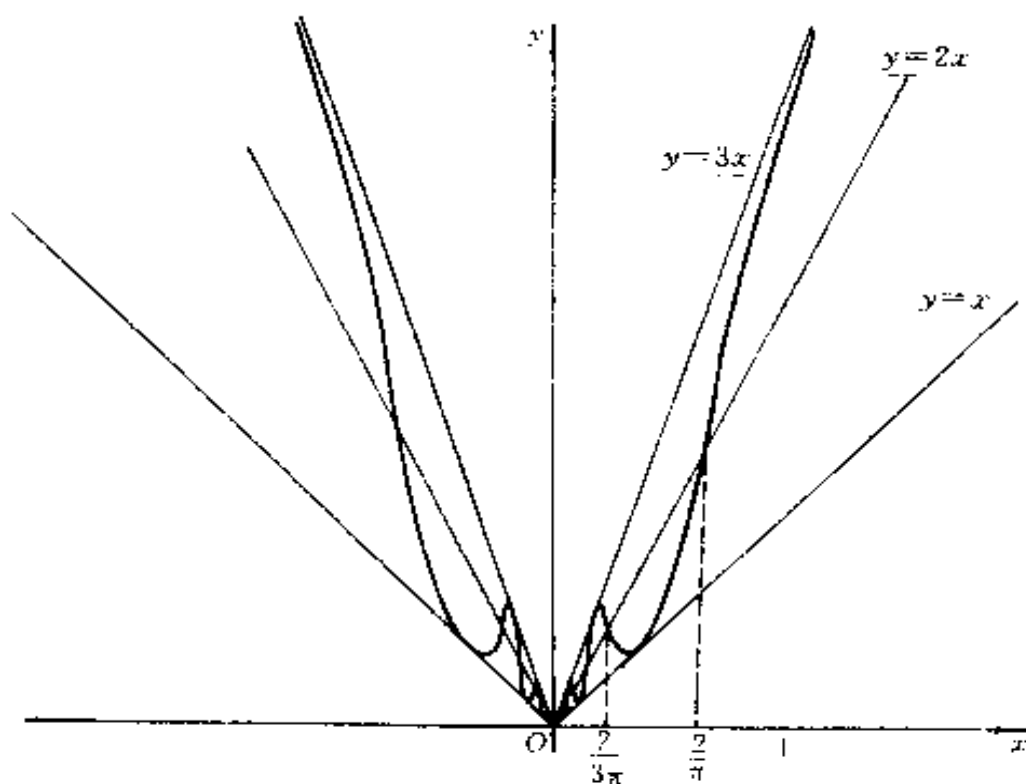


图 2.55

所以，

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$ ；

当 $x = 3$ 时有极小值 $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 -$

$4 = -4$ 。

1430. $y = 2x^2 - x^4$ 。

解 $y' = 4x - 4x^3$ ，令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$ 或 0 。因为

$y'' = 4 - 12x^2$ ， $y''(-1) = -8 < 0$ ，

$y''(0) = 4 > 0$ ， $y''(1) = -8 < 0$ ，

所以，

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = 1$;

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y' = (x-1)(x-2)^2(6x^2 - 10x + 2)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = 1, 2$ 或 $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

因为

当 $x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ 时, $y' < 0$,

当 $\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ 时, $y' < 0$,

当 $\frac{5 + \sqrt{13}}{6} < x < 2$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 2$ 时, $y' > 0$,

所以,

当 $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \approx 0.23$ 时有极小值 $y \approx -0.76$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 0$;

当 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \approx 1.43$ 时有极小值 $y \approx -0.05$;

当 $x = 2$ 时无极值.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$,

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$;

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x - 7}{(x + 1)^3}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{7}{5}$. 因为

当 $-1 < x < \frac{7}{5}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{7}{5}$ 时, $y' > 0$.

所以, 当 $x = \frac{7}{5}$ 时有极小值 $y = -\frac{1}{24}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

解 $y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $1 < x < 2$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

其次, 由于函数 y 的值不为负数, 故当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时, 有边界的极小值 $y = 0$.

1436. $y = x \sqrt[3]{x - 1}$.

解 $y' = \frac{4x - 3}{3(x - 1)^{\frac{2}{3}}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{3}{4}$. 因为

当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{3}{4}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = \frac{3}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{2} \approx -0.47$.

此外, 对于 $y' \rightarrow \infty$ 的点也可能有极值, 但在此题

中,当 x 经过 1 时,导数不变号,故当 $x = 1$ 时无极值.

1437. $y = xe^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(1-x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$.

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以,当 $x = 1$ 时有极大值 $y = e^{-1} \approx 0.368$.

1438. $y = \sqrt{x} \ln x$.

解 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = e^{-2}$. 因为

当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > e^{-2}$ 时, $y' > 0$,

所以,当 $x = e^{-2} \approx 0.135$ 时有极小值 $y = -\frac{2}{e}$

≈ -0.736 .

又因当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$, 而

$$y = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x = 0,$$

所以,当 $x = +0$ 时有边界的极大值 $y = 0$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 e^2 . 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$,

当 $e^2 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$,

所以,

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$;

当 $x = e^2 \approx 7.389$ 时有极大值 $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

解 $y' = -\sin x(1 + 2\cos x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = k\pi$ 或 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 因为

$$y'' = -\cos x - 2\cos 2x,$$

$$y'' \Big|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0,$$

$$y'' \Big|_{x=\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi} = \frac{1}{2} + 1 > 0.$$

所以,

当 $x = k\pi$ 时有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$;

当 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{4}$.

1441. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

解 当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \dots)$ 时, $\sin x = 0$, 所以此时有极大值 $y = 10$;

当 $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi (k = 0, \pm 1, \dots)$ 时, $|\sin x| = 1$,

所以此时有极小值 $y = 5$.

$$1442. y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

解 $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$;

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.439$.

$$1443. y = e^x \sin x.$$

解 $y' = e^x (\sin x + \cos x)$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \dots).$$

因为

$$y'' = 2e^x \cos x,$$

$$y'' \Big|_{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi} > 0,$$

$$y'' \Big|_{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi} < 0,$$

所以, 当 $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi};$$

当 $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$.

$$1444. y = |x|e^{-|x-1|}.$$

解 当 $x < 0$ 时, $y = -xe^{x-1}$, $y' = -(x+1)e^{x-1}$,

令 $y' = 0$ 得 $x = -1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = -1$ 时有极大值 $y = e^{-2} \approx 0.135$.

又当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$y = xe^{x-1}, y' = (x+1)e^{x-1} > 0,$$

所以, 当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$.

而当 $x > 1$ 时, 有

$$y = xe^{1-x}, y' = (1-x)e^{1-x} < 0.$$

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

求下列函数的最大值和最小值:

1445. $f(x) = 2^x$, 在闭区间 $[-1, 5]$ 上.

解 由于 $f(x) = 2^x$ 单调上升, 故最小值和最大值分别为

$$m = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 及 } M = 2^5 = 32.$$

1446. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, 在闭区间 $[-3, 10]$ 上.

解 $f'(x) = 2x - 4, f''(x) = 2$,

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = 2.$$

由于 $f''(2) = 2 > 0$, 所以

当 $x = 2$ 时有极小值 $f(2) = 2$. 因为这是唯一的极

小值,因此也就是最小值,即 $m = 2$.

又由于 $f''(x) > 0$, 曲线呈凹状, 所以在端点取得最大值, 从而,

$$M = \max\{f(-3), f(10)\} = 66.$$

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, 在闭区间 $[-10, 10]$ 上.

解 由于 $f(x) \geq 0$, 故对于在区间 $[-10, 10]$ 上能使 $f(x) = 0$ 的点取得最小值. 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1, 2$. 即当 $x = 1, 2$ 时, 函数取得最小值

$$m = 0.$$

其次, $f'(x) = (2x - 3)\text{sgn}(x^2 - 2x + 3)$,

当 $1 < x < \frac{3}{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $\frac{3}{2} < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4}$, 于是

$$M = \max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right), f(-10), f(10)\right\} = 132.$$

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 在闭区间 $[0.01, 100]$ 上.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时有极小值 $f(1) = 2$.

由于在此闭区间 $[0.01, 100]$ 上 $f(1)$ 为唯一的极小

值,因此也是最小值,即

$$m = 2.$$

其次,最大值

$$M = \max\{f(0.01), f(100)\} = 100.01.$$

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, 在闭区间 $[-1, 1]$ 上.

解 $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5 - 4x}} < 0.$

因此函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调下降,所以,最小值和最大值分别为

$$m = f(1) = 1, M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下界(inf)与上界(sup):

1450. $f(x) = xe^{-0.01x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

其次,求极值判断得知,当 $x = 100$ 时,函数 $f(x)$ 取极大值,并且是唯一的极值,即为最大值.于是,

$$\sup\{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451. $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 由 1420 题知, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, f(0) = 1$. 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0, \sup\{f(x)\} = 1.$$

1452. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^3}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

容易验证, 当 $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值, 并且只有一个极值, 因而就是最大值. 于是,

$$\begin{aligned} \sup\{f(x)\} &= f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 1.2. \end{aligned}$$

1453. $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 可以求得, 函数的最小值和最大值分别为

$$m = f\left(\pm \sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067,$$

$$M = f(0) = 1.$$

于是,

$$\inf\{f(x)\} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067,$$

$$\sup\{f(x)\} = 1.$$

1454. 求函数 $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 内的下界与

上界,作出下列函数的图形:

$$m(x) = \inf_{-\infty < \xi < +\infty} f(\xi) \text{ 及 } M(x) = \sup_{-\infty < \xi < +\infty} f(\xi).$$

解 由于 $f(-3), f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值, 又 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = 0$, 于是,

$$\text{当 } -\infty < x \leq -3 \text{ 时, } m(x) = f(-3) = -\frac{1}{6},$$

$$\text{当 } -3 < x \leq -1 \text{ 时, } m(x) = \frac{1+x}{3+x^2},$$

$$\text{当 } -1 < x < +\infty \text{ 时, } m(x) = 0;$$

$$\text{当 } -\infty < x \leq 1 \text{ 时, } M(x) = f(1) = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时, } M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}.$$

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

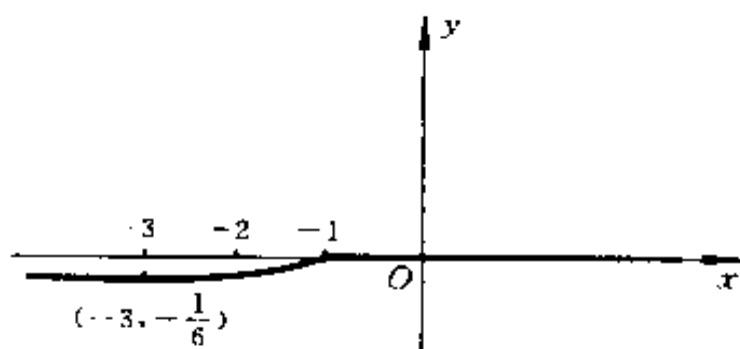


图 2.56

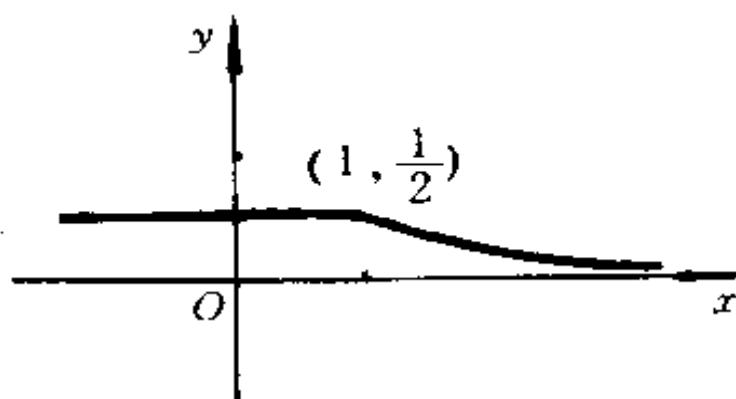


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项:

(a) $\frac{n^{10}}{2^n} (n = 1, 2, \dots)$;

(b) $\frac{\sqrt{n}}{n + 10000} (n = 1, 2, \dots)$;

(c) $\sqrt[n]{n} (n = 1, 2, \dots)$.

解 (a) 经判断知当 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 时, $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值, 并且是唯一的极值. 从而, 最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}}, \frac{N^{10}}{2^N}, \frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N = \left[\frac{10}{\ln 2}\right] = 14$. 于是

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}}\right) = \frac{14^{10}}{2^{14}}$$

$$\approx 1.77 \times 10^7.$$

(b) 经判断知当 $x = 10000$ 时 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 10000}$ 有

极大值,并且是唯一的极值.于是,最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right) = f(10000) = \frac{1}{200}.$$

(B) 经判断知当 $x = e$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) 有极大值,并且是唯一的极值.于是,最大项

$$\max(\sqrt[n]{n}) = \max(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式:

(a) 当 $|x| \leq 2$ 时, $|3x - x^3| \leq 2$;

(b) 若 $0 \leq x \leq 1$ 及 $p > 1$, 则 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$;

(c) 当 $m > 0, n > 0$ 及 $0 \leq x \leq a$ 时,

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n};$$

(d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a$ ($x > 0, a > 0, n > 1$);

(e) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

证 (a) 设 $f(x) = 3x - x^3$, 经判断知, 在 $|x| \leq 2$ 上, 其最小值和最大值分别为

$$m = f(-1) = -2, M = f(1) = 2,$$

而边界函数值为 $f(-2) = 2, f(2) = -2$. 于是,

$$|3x - x^3| \leq 2.$$

(6) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 经判断知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p+1}}$ 为 $0 \leq x \leq 1$ 上的唯一的极小值, 而边界值 $f(0) = f(1) = 1$, 所以

$$\frac{1}{2^{p+1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq x + (1-x) = 1.$$

(B) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$, 经判断知 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0 \leq x \leq a$ 上的唯一的极大值, 所以 $x^m(a-x)^n \leq \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$.

(r) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$. 经判断知 $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x > 0$ 的唯一的极小值, 而边界值 $f(+0) = f(+\infty) = 1$, 所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a} \leq 1.$$

由于 $x+a > 0$, 于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a.$$

(d) $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$,

其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 所以恒有

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的差”，就是求

$$E_p = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

解 $P'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x - 1)$.

令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ，所以

$$E_p = \max\{|P(-2)|, |P(1)|,$$

$$\begin{aligned} & \left| P\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right|, \left| P\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \right| \} \\ & = \left| P\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right| = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85. \end{aligned}$$

1458. 应当选择怎样的系数 q ，使多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的差最小，即

$$E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

解 $P'(x) = 2x$ ，令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 0$ ，所以

$$\begin{aligned} E_p &= \max\{|P(0)|, |P(1)|, |P(-1)|\} \\ &= \max\{|q|, |1+q|\}. \end{aligned}$$

当 $|q| = |1+q|$ 时， E_p 最小，解之，得

$$q = -\frac{1}{2}.$$

1459. 数

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上的绝对差.

求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3,$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - 3x^2,$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{3}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 - 6x,$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) - g''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0,$$

所以, 当 $x = \frac{2}{3}$ 时 $f(x) - g(x)$ 取极大值; 又由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) - g(x) \geq 0$, 所以绝对差

$$\Delta = f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

1460. 于闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似地代替函数

$$f(x) = x^2,$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对差(参阅上题)为最小, 并求

此最小的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - [(x_1 + x_2)x + b],$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - (x_1 + x_2),$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 > 0,$$

故当 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 时, $f(x) - g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\begin{aligned} \Delta &= \max \left\{ \left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| f(x_1) - g(x_1) \right|, \left| f(x_2) - g(x_2) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ \left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right|, \left| b + x_1 x_2 \right| \right\}. \end{aligned}$$

要 Δ 为最小, 需

$$\left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right| = \left| b + x_1 x_2 \right|.$$

解之得

$$b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2).$$

此时

$$g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2),$$

而最小的绝对差

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如图 2.58 所示, 它们的交点是 $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 及 $B(1, 2)$. 从而

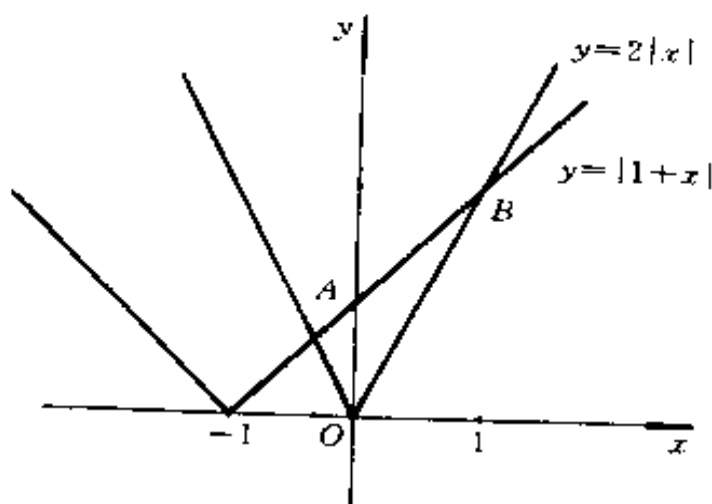


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目, 并定这些根所在的范围:

1462. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$, 则 $f(x)$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 且有

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = 1$ 或 3 .

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f'(x) > 0, f(1) = -6 < 0,$$

故在区间 $(-\infty, 1)$ 内方程无实根.

当 $x \in (1, 3)$ 时, 由于

$$f'(x) < 0, f(3) = -10 < 0,$$

故在 $(1, 3)$ 内也无实根.

当 $x \in (3, +\infty)$, 由于

$$f'(x) > 0, f(3) = -10 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故在 $(3, +\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

1463. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h$, 则

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$ 或 3 . 由于

$$f(-1) = 5 + h, f(3) = -27 + h,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时, $f(-1) < 0, f(3) < 0$, 且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此, 有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时, $f(-1) > 0, f(3) < 0$, 导数 $f'(x)$ 的符号变化同上, 于是, 有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时, $f(3) > 0, f(-1) > 0$, 因此, 有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$, 则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根,分别位于 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内.

1465. $x^5 - 5x = a.$

解 设 $f(x) = x^5 - 5x - a$, 则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1), x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a,$$

故当 $a < -4$ 时, $f(-1) > 0, f(1) > 0$. 因此, 有且仅有一实根, 位于 $(-\infty, -1)$ 内; 当 $-4 < a < 4$ 时, $f(-1) > 0, f(1) < 0$, 此时有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内; 当 $a > 4$ 时, $f(-1) < 0, f(1) < 0$. 因此, 有且仅有一实根位于 $(1, +\infty)$ 内.

1466. $\ln x = kx.$

解 当 $k = 0$ 时, 方程显然仅有一个根 $x = 1$. 因此, 不妨设 $k \neq 0$. 令 $f(x) = \ln x - kx (x > 0)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{1}{k}$. 由于

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当 $x \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in \left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1,$$

故当 $k > \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$, 此时方程无根.

当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) > 0$,

因此, 方程有两个实根, 分别位于 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 内.

当 $-\infty < k < 0$ 时, 由于

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0$, 故此时方程有且仅有一实根位于 $(0, 1)$ 内.

1467⁺ : $e^x = ax^2 (a > 0)$.

解 对于函数 $f(x) = e^x - ax^2$, 有 $f(0) = 1 > 0$; 又因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 故总存在充分大的正数 x_0 , 使 $f(-x_0) < 0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0, 0)$ 中, 从而在 $(-\infty, 0)$ 中至少有 $f(x) = 0$ 的一个实根. 而当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = e^x - 2ax > 0$, 即函数

严格单调上升. 因此, $f(x) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时只有唯一的根.

对于 $x > 0$ 的情况, 为求方程 $e^x = ax^2$ 的根, 只需求方程 $x = \ln a + 2 \ln x (a > 0, x > 0)$ 的根. 设

$$g(x) = x - \ln a - 2 \ln x,$$

则有

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$.

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$,

所以, $g(2) = \ln \frac{e^2}{4a}$ 为极小值. 又因 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. 因此,

当 $g(2) > 0$, 即 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 无根.

当 $g(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有唯一的根.

当 $g(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有二个根, 它们分别位于 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

综上所述, 方程 $e^x = ax^2$ 根的情况如下:

当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根, 位于 $(-\infty, 0)$ 内; 当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, 有两个根, 一根为 2, 一根位于 $(-\infty, 0)$ 内; 当 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 时有三个根, 分别位于 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

1468. 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin^3 x \cdot \cos x = a$.

解 当 $a = 0$ 时, 方程显然有实根 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 或 π . 因此, 不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$, 则

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

于是, 当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程有两个实根位于

$(0, \pi)$ 内; 当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程无实根.

1469. $\operatorname{ch}x = kx$.

解 设 $f(x) = \operatorname{ch}x - kx$, 则

$$f'(x) = \operatorname{sh}x - k.$$

令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 x_0 , 它适合 $k = \operatorname{sh}x_0$.

由于 $f''(x) = \operatorname{ch}x > 0$, 故曲线图形呈凹状, 且在 $x = x_0$ 达最小值. 显然 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 因此, 我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \operatorname{ch}x_0 - kx_0 = \operatorname{ch}x_0 - x_0 \operatorname{sh}x_0.$$

先设 $k > 0$, 于是 $x_0 > 0$. 引进辅助函数

$$g(x) = \operatorname{ch}x - x\operatorname{sh}x,$$

方程 $g(x) = 0$, 即 $\operatorname{cth}x = x$ 的(唯一)正根 $\xi \approx 1.2^*$.
由于

$$g'(x) = \operatorname{sh}x - \operatorname{sh}x - x\operatorname{ch}x = -x\operatorname{ch}x,$$

因此假如 $x > 0$, 则 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调下降.

若 $k > \operatorname{sh}\xi$, 即 $\operatorname{sh}x_0 > \operatorname{sh}\xi$, 由于 $\operatorname{sh}x$ 是严格增大的, 故必 $x_0 > \xi$. 从而有

$$f(x_0) = \operatorname{ch}x_0 - x_0\operatorname{sh}x_0 < \operatorname{ch}\xi - \xi\operatorname{sh}\xi = 0.$$

因此, 方程 $f(x) = 0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \operatorname{ch}\xi - k\xi < \operatorname{ch}\xi - \xi\operatorname{sh}\xi = 0,$$

$$f(0) = 1,$$

故两根分别位于 $(0, \xi)$ 及 $(\xi, +\infty)$ 内.

若 $k = \operatorname{sh}\xi$, 则 $\operatorname{sh}x_0 = \operatorname{sh}\xi$, 从而 $x_0 = \xi$. 因此, $f(x_0) = 0$, 此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0 .

若 $0 < k < \operatorname{sh}\xi$, 则 $\operatorname{sh}x_0 < \operatorname{sh}\xi$, 从而 $x_0 < \xi$. 因此

$$f(x_0) = \operatorname{ch}x_0 - x_0\operatorname{sh}x_0 > \operatorname{ch}\xi - \xi\operatorname{sh}\xi = 0,$$

故方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k = 0$, 显然方程 $f(x) = 0$ 无根.

若 $k < 0$, 则可令 $x = -t$, 于是得

$$\operatorname{cht} = -kt \quad (-k > 0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根, 易知当 $\operatorname{sh}\xi < -k$ 时, 原方程有两实根, 分别位于 $(-\xi, 0)$ 及 $(-\infty, -\xi)$ 内, 其中 ξ 满足 $\operatorname{cth}\xi = \xi (\approx 1.2)$. 而当 $-\operatorname{sh}\xi < k < 0$ 时, 方程无实根.

综上所述, 若 $|k| > \operatorname{sh}\xi \approx 1.50$, 方程有两实根 x_1

及 x_2 , 满足 $0 < |x_1| < \xi, \xi < |x_2| < +\infty$; 若 $|k| = \operatorname{sh}\xi$, 方程只有一个实根 ($k = \operatorname{sh}\xi$ 时, 根为 $\xi, k = -\operatorname{sh}\xi$ 时, 根为 $-\xi$). 若 $|k| < \operatorname{sh}\xi$, 则方程无实根.

*) 方程根的近似解法见本章 § 15.

1470. 在什么条件下方程

$$x^3 + px + q = 0$$

有: (a) 一个实根; (b) 三个实根.

在平面 (p, q) 上描绘对应的范围.

解 设 $f(x) = x^3 + px + q$, 则 $f'(x) = 3x^2 + p$.

若 $p \geq 0$, 则 $f'(x) > 0 (x \neq 0)$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增大的, 并且显然 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故 $f(x) = 0$ 有唯一实根.

若 $p < 0$. 令 $f'(x) = 0$ 解得 $x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 在 $(-\infty, x_2]$ 和 $[x_1, +\infty)$ 上 $f(x)$ 严格增大, 在 $[x_2, x_1]$ 上 $f(x)$ 严格减小.

因此, 若 $f(x_1)f(x_2) > 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2) > 0, f(x_1) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1) = -\frac{p}{3} \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} + p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

$$f(x_2) = \frac{p}{3} \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} - p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

故 $f(x_1)f(x_2) > 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p \geq 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1) < 0$ 及 $f(x_2) > 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

此即方程有三实根的条件.

如图 2.59 所示, 曲线

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

的左右上方是方程仅有一实根的 (p, q) 域, 以阴影表之; 而曲线的下方则是方程有三实根的 (p, q) 域, 以不具阴影表之.

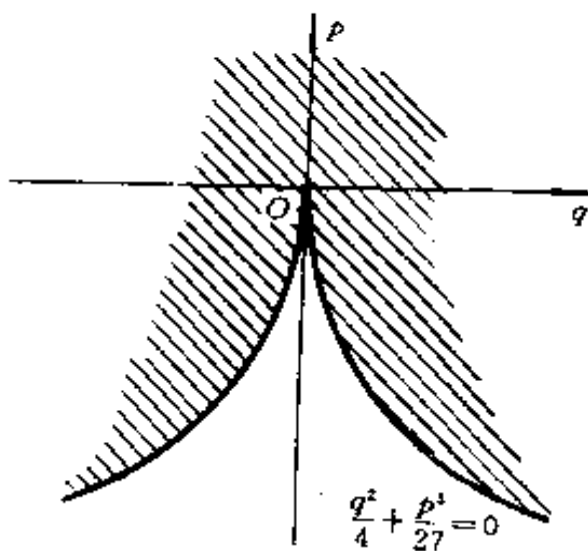


图 2.59

§ 12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y = f(x)$ 的图形, 必须: (1) 确定此函数的存在域; 并研究函数在其存在域之边界上各点之性质; (2) 查明图形的对称性和周期性; (3) 求出函数的不连续点及连续的区间; (4) 确定函数的零值点及同号区间; (5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8)

指出函数图形的各种特性。

作出下列函数的图形：

1471. $y = 3x - x^3$

解 $y' = 3 - 3x^2$, 令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 1 .

$y'' = -6x$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = -1$ 时,

$$y = -2;$$

$$x = 0, \pm \sqrt{3}$$

时, $y = 0$;

$$x = 1 \text{ 时, } y = 2.$$

图形对称于原点

如图 2.60 所示.

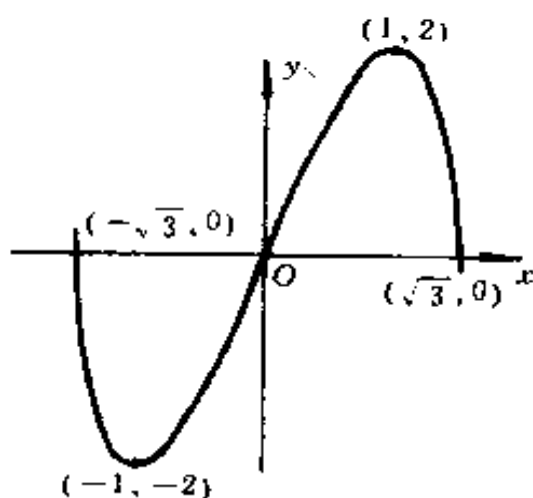


图 2.60

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x, y

值不变, 故图形对称于 Oy 轴.

零点处: $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$.

$y' = 2x - 2x^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 或 ± 1 .

$$y'' = 2 - 6x^2, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow

当 $x = 0$ 时, $y = 1$; $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $y = \frac{23}{18}$; $x = 1$ 时, $y = \frac{3}{2}$ (图 2.61)

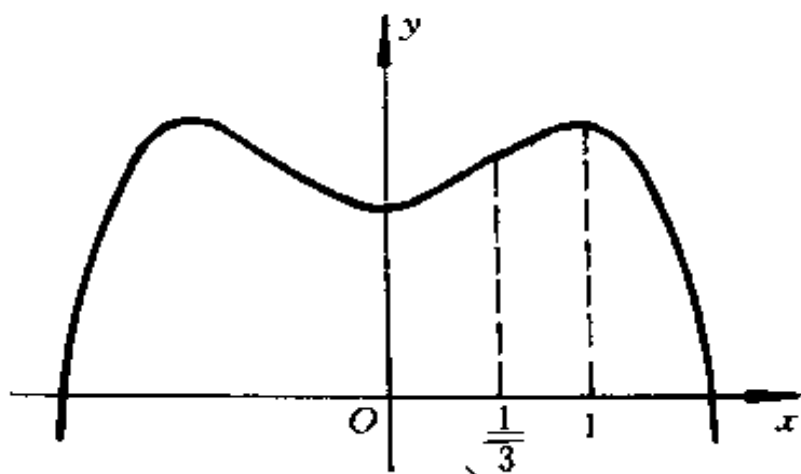


图 2.61

1473. $y = (x + 1)(x - 2)^2$

解 $y' = 3x(x - 2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 2 ;

$y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	-	-		0	+
y''	-	-	-	0	+	-	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x = 0$ 时, $y = 4$;

$x = 1$ 时, $y = 2$;

$x = 2, -1$ 时, $y = 0$

(图 2.62)

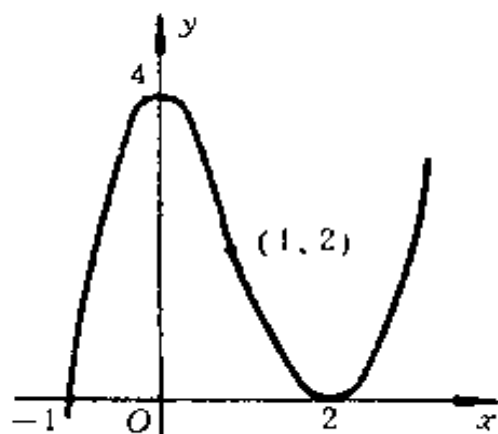
1474. $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

解 显见图形对称于 Oy 轴.

零点处: $x = \pm \sqrt{2}$.

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2},$$

图 2.62



令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2.06$.

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77 . 经判别知它们为拐点, 又因

$y''|_{x=0} = -2 < 0$, 故有极大值 $y = 2$;

$y''|_{x=\pm \sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0$, 故有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.12$.

渐近线为 $y = 0$. 事实上, 它的斜率和截距分别为 k

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{x(1 + x^4)} = 0, \text{它在 } y \text{ 轴上的截距为}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = 0. \text{如图 2.63 所示.}$$

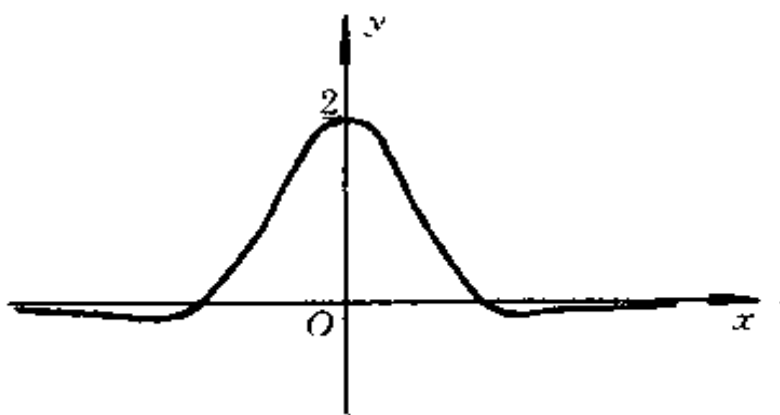


图 2.63

1475. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

解 零点处: $x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线: $x = 2, x = 3$ 和 $y = 1$.

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}$$

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42, x \approx 2.38$. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$. 经判别知: $y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值, $y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值; $x \approx -0.586, y \approx -0.07$ 为拐点. 由于

$$y = 1 - \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x-3}$$

故可用图形相加法作出函数的图形(图 2.64).

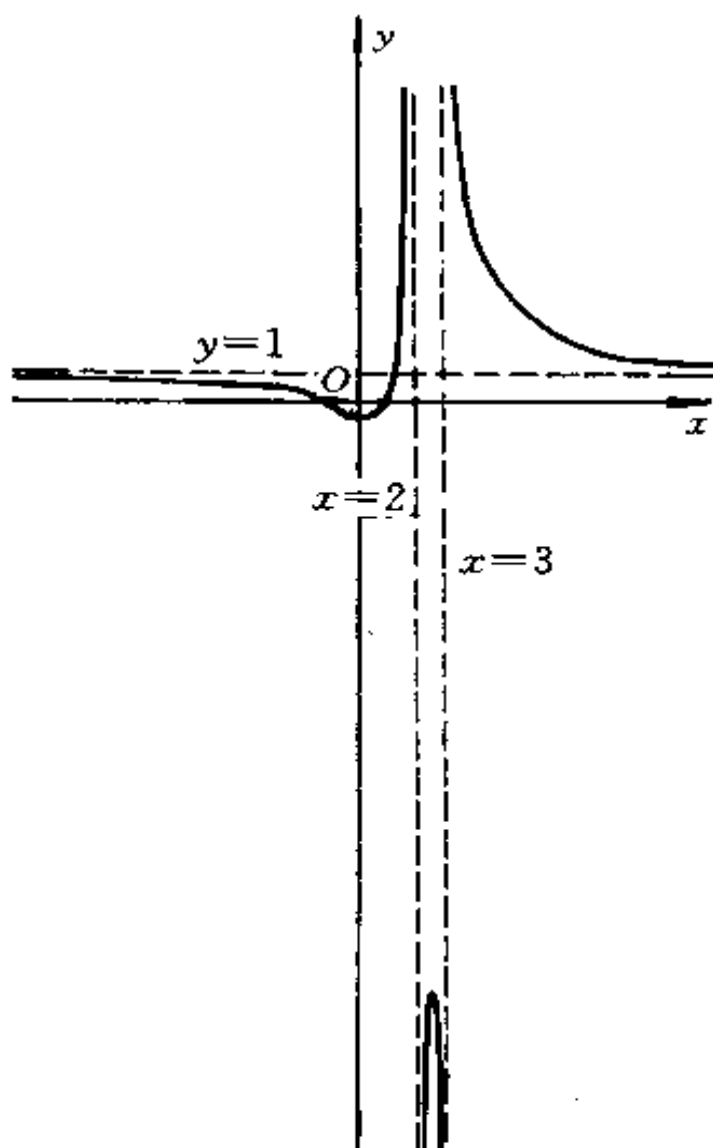


图 2.64

1476. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线: $y=0$. $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y' = \frac{2x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-x)^3}$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y' = 0$ 无实根, 无极值点. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.22$, 经判别知它为拐点, 此时 $y = -0.20$.

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降(图 2.65)

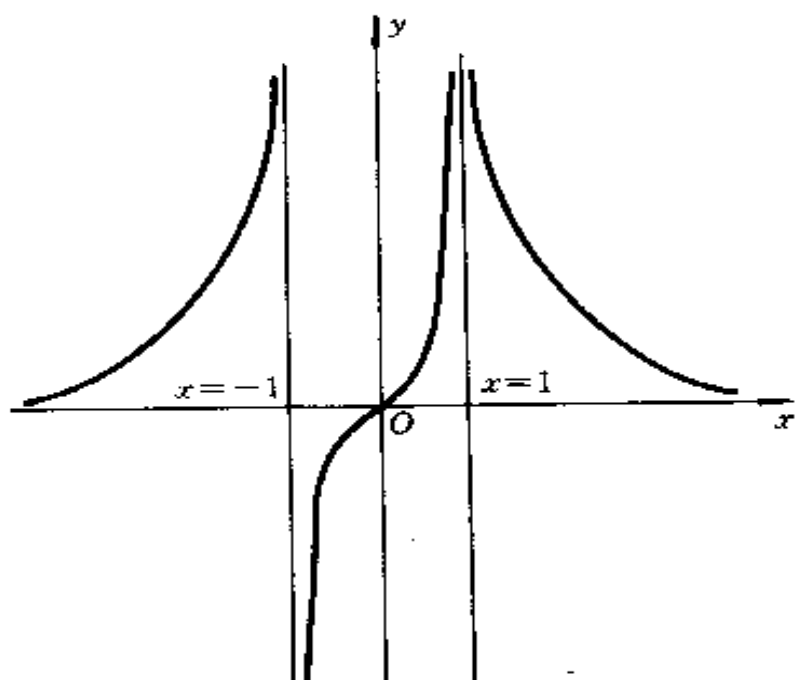


图 2.65

1477. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 零点处: $x = 0$. 不连续点: $x = -1$.

斜渐近线: $y = x - 3$, 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

垂直渐近线: $x = -1$.

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$, 或 $x = -4$.

$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 图形呈凹状;

又 $y''|_{x=-4} < 0$,

故当 $x = -4$ 时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于 y' 经过 $x = 0$ 从负变到正, 故当 $x = 0$ 时取得极小值 $y = 0$ (图 2.66)

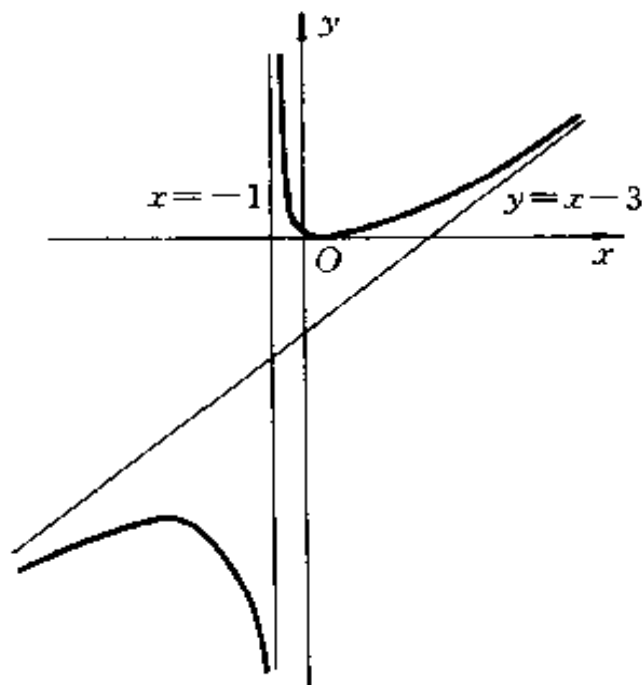


图 2.66

1478. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4.$

解 零点处: $x = -1.$

垂直渐近线: $x = 1;$ 又

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 1.$$

故还有水平渐近线为 $y = 1.$

$$y' = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1;$$

$$y'' = \frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或}$$

$-4.$

列表

x		-4		-1		1	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	∞	$+$
y	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow	不连续点	\searrow

当 $x = -4$ 时, $y = \frac{81}{625}$; $x = -1$ 时, $y = 0$; $x = 0$ 时, $y = 1$ (图 2.67).

1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$

解 零点处: $x = 0$ 及 $x = 1.$

垂直渐近线: $x = -1;$

斜渐近线: $y = x - 3.$ 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

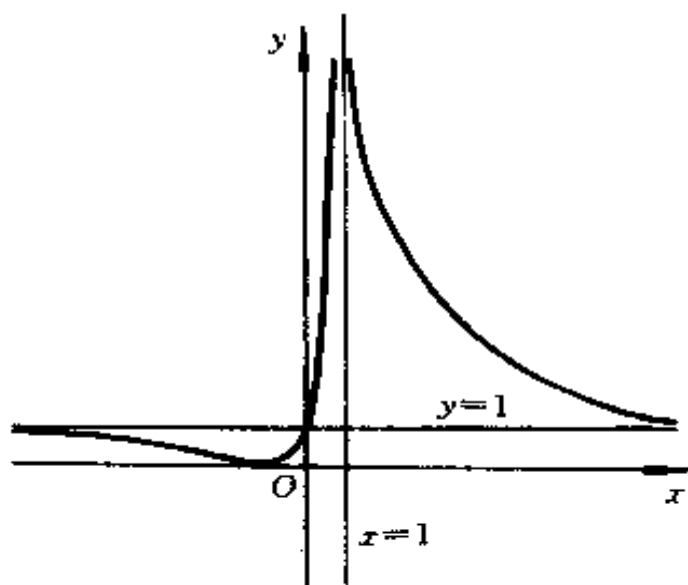


图 2.67

$$y' = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x + 1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$y'' = \frac{10x - 2}{(x + 1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{5}.$$

列表

x		$-\frac{\sqrt{17} + 3}{2}$		-1		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{\sqrt{17} - 3}{2}$	
y'	+	0	-	∞	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	∞	-	-	-	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	不连续点	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x = -\frac{\sqrt{17} + 3}{2} \approx -3.56$ 时, 有极大值

$$y = -\frac{34\sqrt{17} + 142}{32} \approx -8.82;$$

当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 0$;

当 $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56$ 时, 有极小值

$$y = \frac{34\sqrt{17} - 142}{32} \approx -0.06;$$

当 $x = \frac{1}{5}$ 时, $y = -\frac{1}{45}$ (图 2.68).

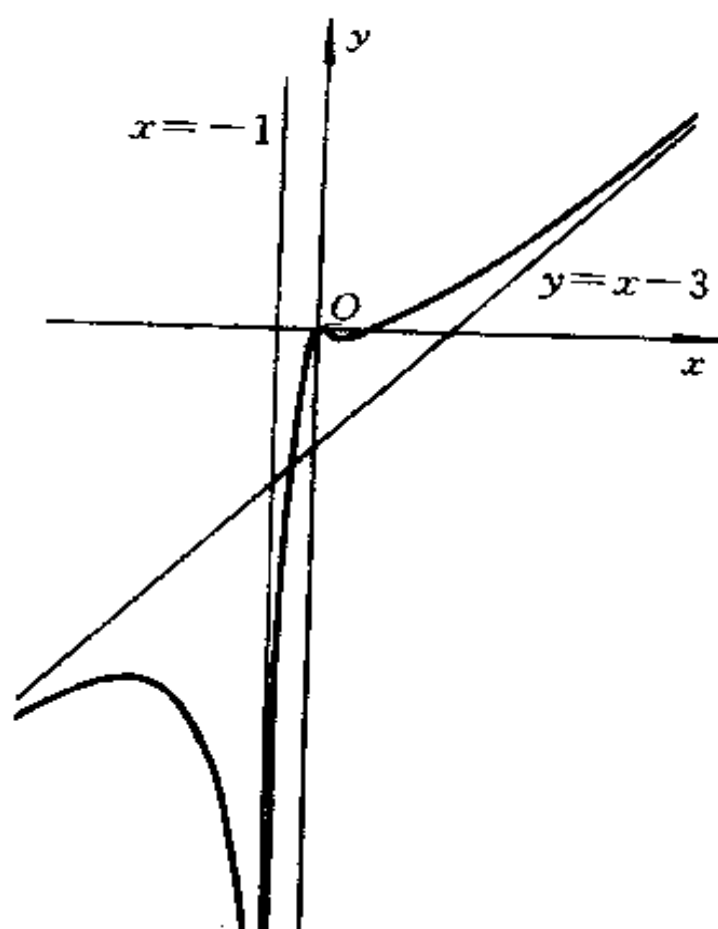


图 2.68

1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解 零点处: $x = 0$. 间断点: $x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线: $x = -1, x = 1$ 及 $y = 0$.

以 $-x$ 替代 x , y 的绝对值不变, 符号改变, 故图形关于原点对称.

$$y' = \frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)^3}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 无实根.}$$

$$y'' = \frac{12x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^4}, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0.$$

经判别知: 无极值, $x = 0$ 为拐点(图 2.69).

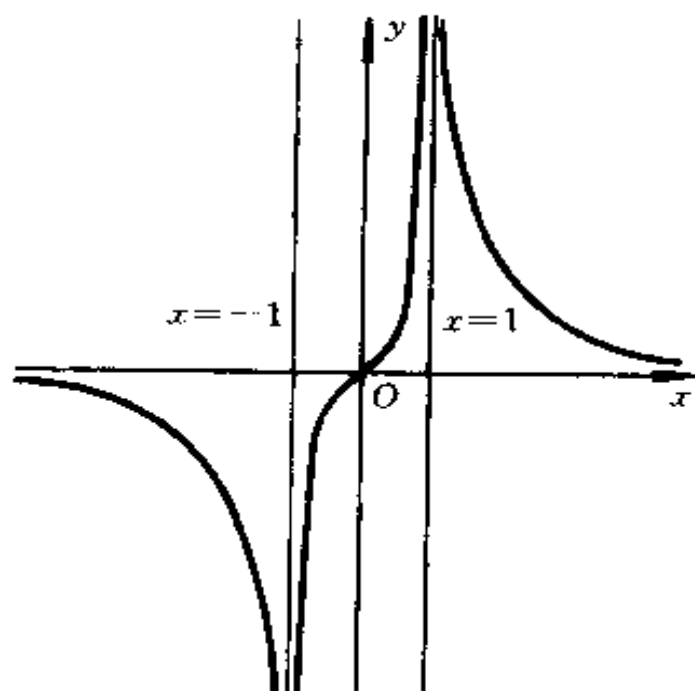


图 2.69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	\searrow	间断点	\nearrow	拐点	\nearrow	间断点	\searrow

$$1481. y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

解 零点处: $x = -1$. 间断点: $x = 1$.

垂直渐近线: $x = 1$;

斜渐近线: $y = x + 5$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 5.$$

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } 5.$$

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1.$$

列表

x		-1		1		5	
y'	+	0	+	∞	-	0	+
y''	-	0	+	∞	+	+	+
y	\nearrow	拐点	\nearrow	间断点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -1$ 时, $y = 0$;

当 $x = 5$ 时, $y = 13 \frac{1}{2}$ (图 2.70).

$$1482. y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}.$$

解 垂直渐近线: $x = -1$;

斜渐近线: $y = x$. 事实上,

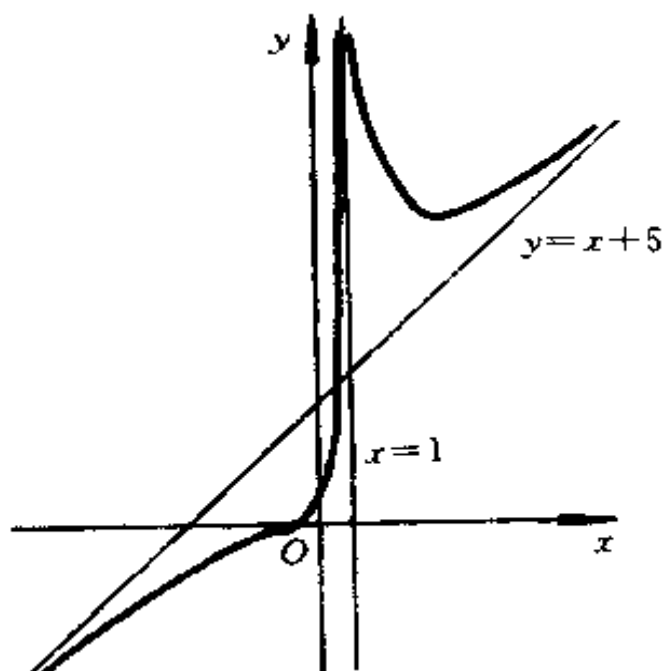


图 2.70

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3 - 24x^2}{(x^3 + 1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 96x^4 + 12x^2 - 48x}{(x^3 + 1)^3},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0, 2$ 及 $x \approx -2.4$. $y'|_{x=2} > 0$, 故当 x

$= 2$ 时有极小值 $y = 2 \frac{2}{3}$;

$y''|_{x=-2.4} < 0$; 故

当 $x \approx -2.4$ 时有极

大值 $y \approx -3.2$.

经判别知: 当

$x = 0, 0.752, 16.006$

时有拐点. 渐近线 $y = x$ 与曲线交于点 $(8, 8)$. 如图

2.71 所示.

$$1483. \quad y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

解 图形对于 Oy 轴对称.

零点处: $x = \pm$

$$\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79.$$

y'

$$\frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$ 无实根, 无极值点.

$$y'' = \frac{4(8x^6 - 14x^4 + 15x^2 - 5)}{x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$. 经判别, 此为拐点, 相应纵坐标 $y = -2\frac{2}{3}$.

渐近线: $x = 0, x = -1, x = 1$ 和 $y = 0$.

当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 曲线上升.

当 $0 < x < 0.71$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状.

当 $0.71 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 图形呈凹状.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状.

图形如图 2.72 所示.

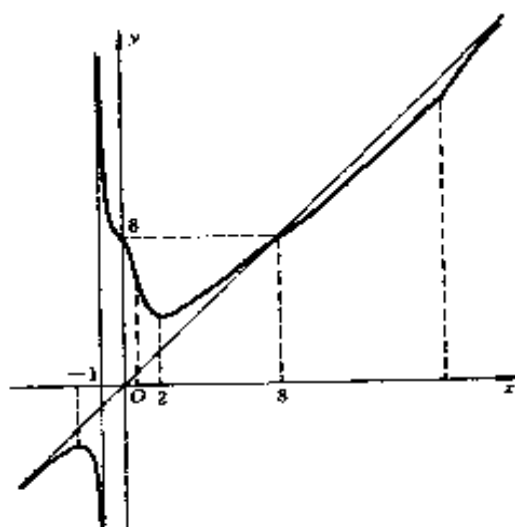


图 2.71

$$1484. \quad y = (x-3)\sqrt{x}.$$

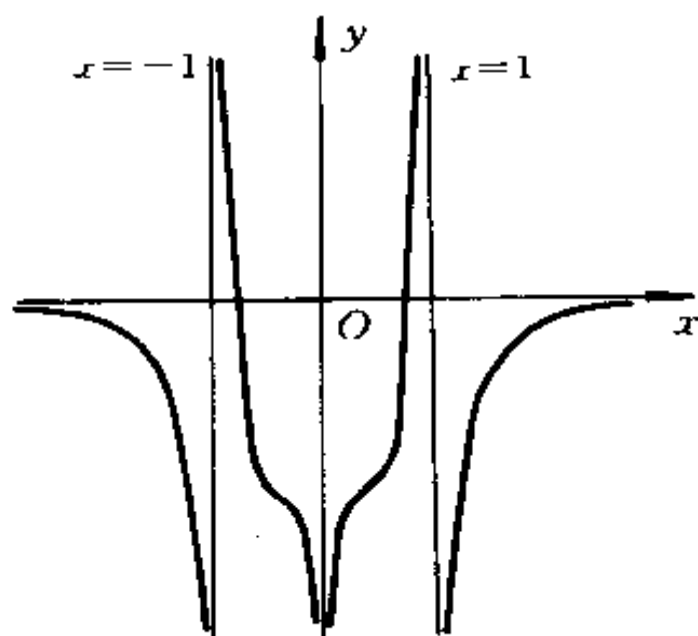


图 2.72

解 存在域: $0 \leq x < +\infty$.

零点处: $x = 0$ 和 $x = 3$.

$$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 1;$$

$$y'' = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \quad (0 < x < +\infty),$$

所以图形始终是凹的.

由于 $y''|_{x=1} > 0$, 故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = -2$;
 当 $x = 0$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = -\infty$ 知, 曲线在 $x = 0$ 点与 y
 轴相切, 易见它有边界极大值 $y = 0$.

图形如图 2.73 所示.

1485. $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}$.

解 存在域: 需 $8 - x^2 \geq 0$, 即 $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处: $x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

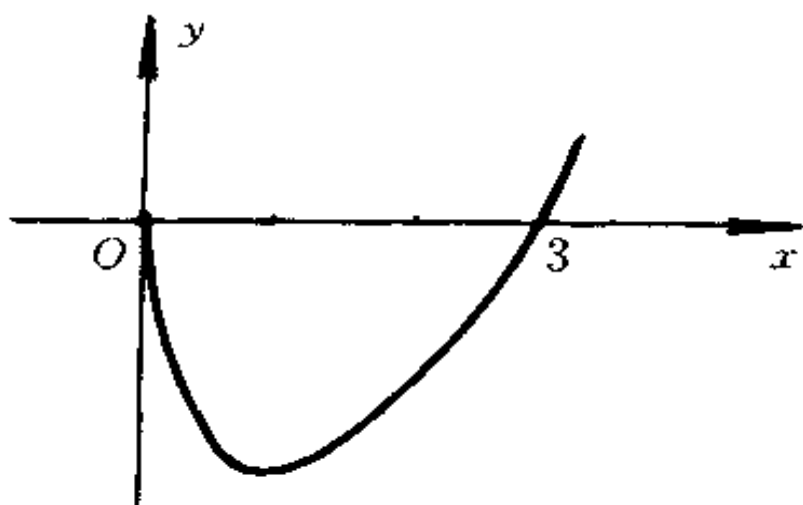


图 2.73

图形关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 2.$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 12)}{(8 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 2\sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

然而点 $x = 2\sqrt{3}$ 不在存在域内, 对于 $x = 0$ 来说, 如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一支曲线的话, 则也可理解为拐点, 同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况, 故曲线呈双纽状.

当 $0 < x < 2$ 时, $y' > 0$, 当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时, $y < 0$, 故当 $x = 2$ 时, 有极大值 $y = 4$. 当 $x = 2\sqrt{2}$ 及 $x = 0$ 时, 显然有极小值 $y = 0$.

前者是边界的极小值, 而且曲线在 $x = 2\sqrt{2}$ 处以 $x = 2\sqrt{2}$ 为垂直切线. 图形如图 2.74 所示.

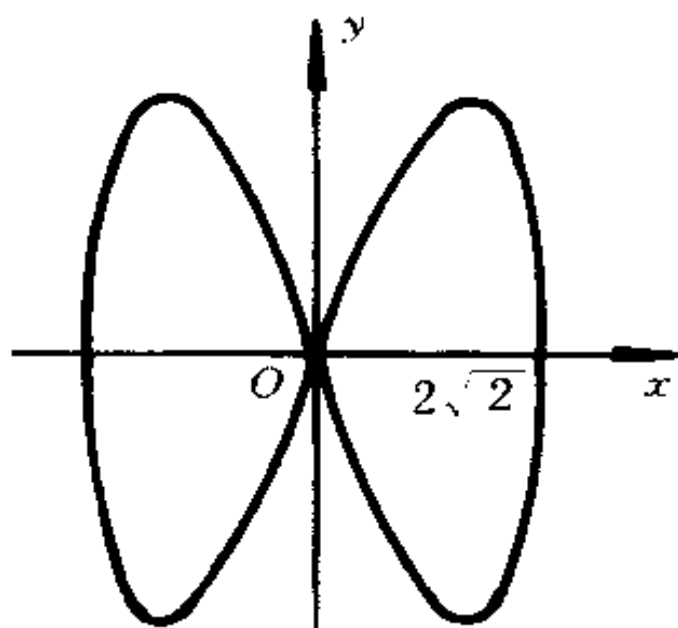


图 2.74

1486. $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 存在域: $1 \leq x \leq 2$ 及 $3 \leq x < +\infty$.

零点处: $x = 1, x = 2$ 和 $x = 3$.

图形关于 Ox 轴对称, 下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x$$

$$= \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1.42 \text{ 经判别此时有极大值 } |y| = \frac{1}{3}$$

• $\sqrt[3]{12} \approx 0.62$.

令 $y = 0$ 解得 $x = 3.468$, 经判别是拐点.

当 $x > 3$ 时,
 $y' > 0$, 曲线上
 升.

当 $x = 1, 2$

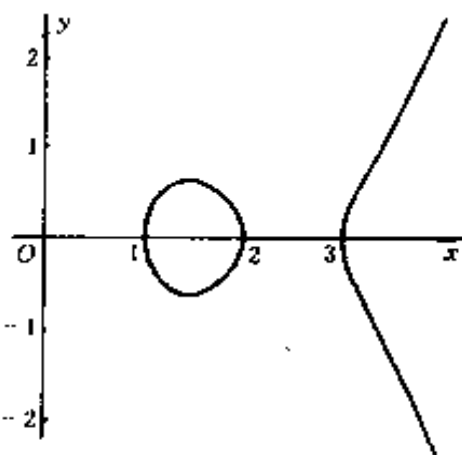
和 3 时有边界
的极小值 $y = 0$
且 $y' = \infty$ (图
2.75).

1487. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解 零点处: $x = -1$ 和
 $x = 1$. 又当 $x = 0$ 时, $y =$
1.

渐近线: $y = x - \frac{1}{3}$.

图 2.75



事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -\frac{1}{3}.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3 \sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = -\frac{1}{3}; \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{-8}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y'' = \infty.$$

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	+	∞	+	0	-	∞	+
y''	+	∞	-	-	-	∞	-
y	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时,

有极大值 $y \approx 1.06$;

当 $x = 1$ 时, 有极小值 $y = 0$.

图形如图 2.76 所示

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

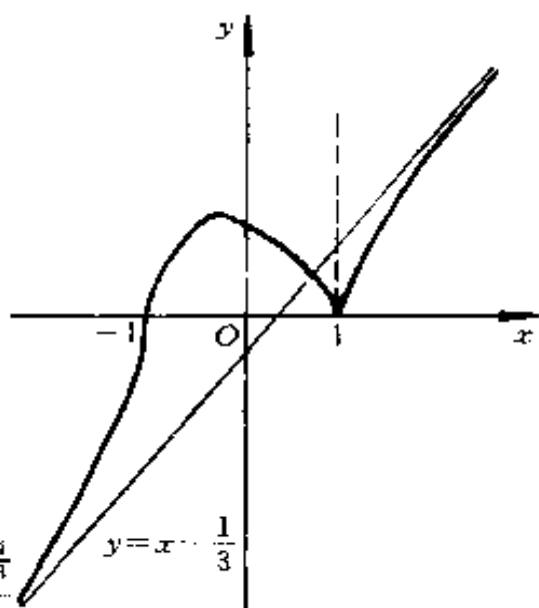


图 2.76

当 x 经过 $x = 0$ 时, y' 由负变正, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = -1$, 且 $y'_{x=0^-} = -\infty$, $y'_{x=0^+} = +\infty$, 又当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$. 同时, $y' = 0$ 和 $y = 0$ 均无实根, 故知图形是向下凹的, 且以 $y = 0$ 为渐近线(图 2.77).

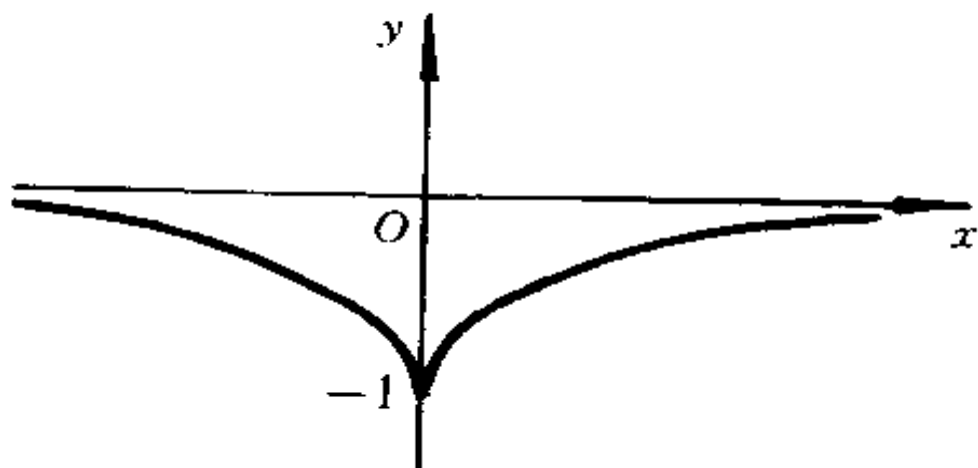


图 2.77

1489. $y = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x , y 变成 $-y$, 故图形关于坐标原点对称.

渐近线: $y = 0$.

零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x - 2)^{\frac{1}{3}} - (x + 2)^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^{\frac{1}{3}}(x - 2)^{\frac{1}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 2 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x + 2)^{\frac{1}{3}} - (x - 2)^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^{\frac{4}{3}}(x - 2)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

列表

x		-2		0		2	
y'	-	∞	+	+	+	∞	-
y''	-	∞	-	0	+	∞	+
y	\searrow	最小点	\nearrow	拐点	\nearrow	最大点	\searrow

当 $x = -2$ 时, 有最小值 $y = -\sqrt[3]{16}$;

当 $x = 2$ 时, 有最大值 $y = \sqrt[3]{16}$.

图形如图 2.78 所示.

1490. $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{(x + 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(x - 1)^{\frac{1}{3}}} \right], \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0; \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

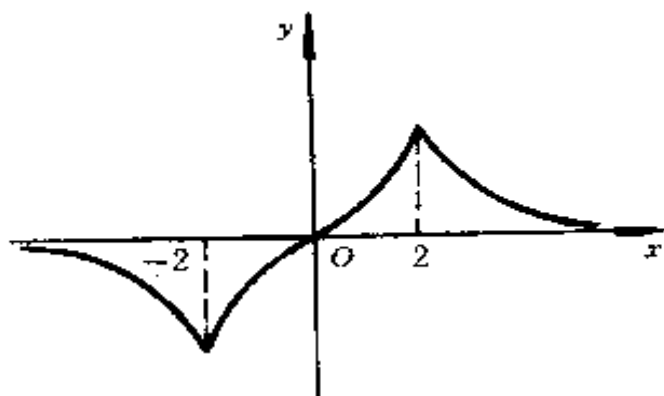


图 2.78

$$y'' = -\frac{2}{9} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} \right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当 $x = \pm 1$ 时, 取得
最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时, 有极大
值 $y = 2$.

图形如图 2.79 所示.

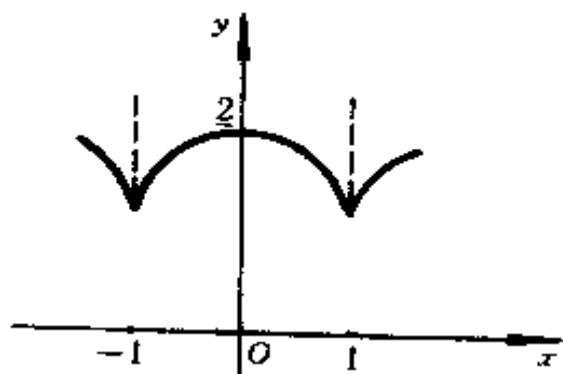


图 2.79

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

解 图形关于坐标原点
对称.

零点处: $x = 0$.

间断点: $x = \pm 1$.

$y' = \frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm \sqrt{3}$. 当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$.

$y'' = -\frac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 3 .

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	-	∞	-	-	-	∞	-	0	+	+	+
y''	+	0	-	-	-	∞	+	0	-	∞	+	+	+	0	-
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线: $x = -1, x = 1$.

当 $x = \pm \sqrt{3}$ 时, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx \pm 1.38$;

当 $x = \pm 3$ 时, $y = \pm 1\frac{1}{2}$.

图形如图 2.80 所示.

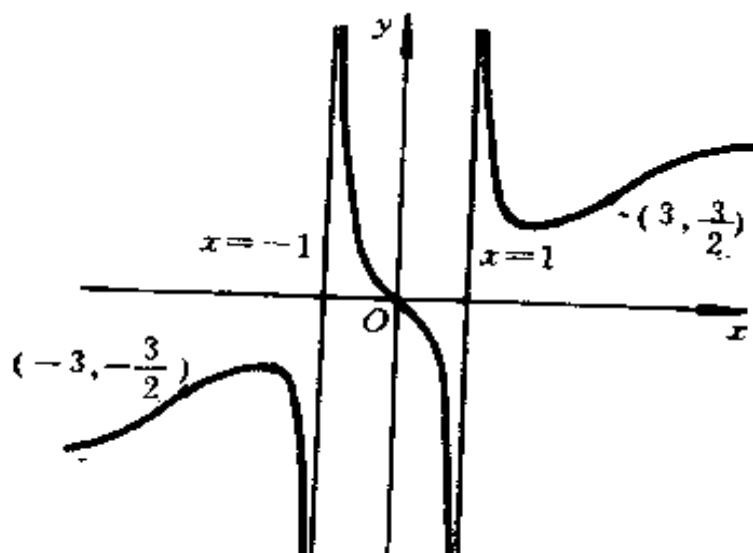


图 2.80

$$1492. y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$$

解 存在域: $|x| \geq 1$. 图形关于 Oy 轴对称, 且位于 Ox 轴的上方. 渐近线: $y = \pm \frac{x}{2}$.

$$y' = \frac{2x^5 - 3x^3 + 2x}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y'' = \frac{1}{(2x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-6x^4 + 3x^2 + 2).$$

当 $x > 1$ 时, $y' > 0, y'' < 0$, 故曲线上升, 图形呈凸状.

又当 $x = \pm 1$ 时, 有边界的极小点 $y = 0$ (图 2.81).

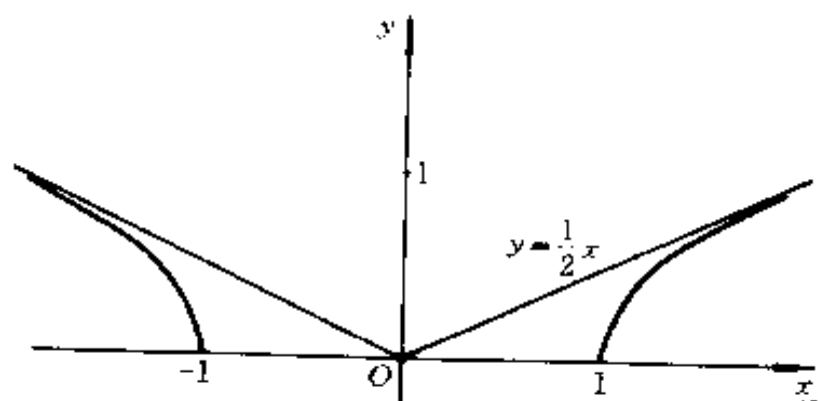


图 2.81

$$1493. y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

解 存在域: $x > 0$.

渐近线: $x = 0$ 及 $y = x + \frac{3}{2}$.

$$y' = \frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 有极小值

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2.60.$$

图形如图 2.82 所示.

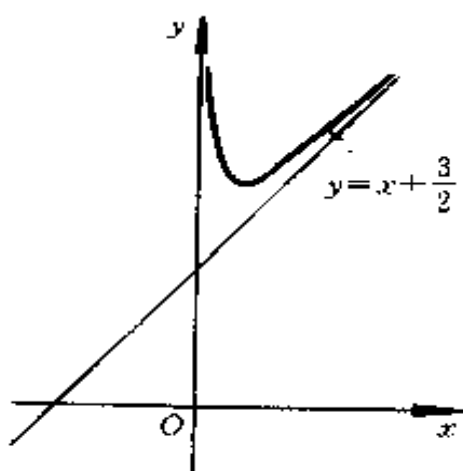


图 2.82

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域: $x \geq 0$

及 $x < -3$.

零点处: $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4.30$.

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow -3} y = \infty$, 故垂直渐近线为 $x = -3$.

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -4$;

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}} > 0,$$

故图形呈凹状.

当 $x = -4$ 时有极小值 $y = 13$.

当 $x = 0$ 时有边界极大值 $y = 1$.

图形如图 2.83 所示.

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处: $x = 0$.

垂直渐近线: $x = -1$.

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

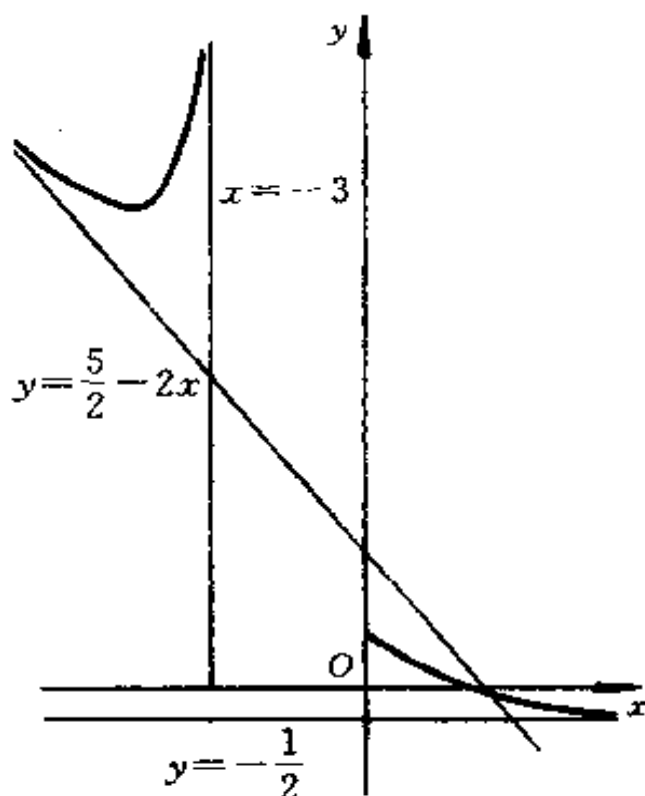


图 2.83

令 $y' = 0$ 得 $x = -2$. 当 $x = 0$ 时 $y' = \infty$.

$$y'' = -\frac{2(x^2 + 4x + 1)}{9x(x+1)^2 \sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -2 \pm$

$$\sqrt{3}.$$

经判别:

当 $x = 0$ 时有

极小值 $y = 0$;

当 $x = -2$ 时

有

极大值 $y = -\sqrt[3]{4}$

≈ -1.59 .

拐点:

$x = -(2 -$

$$\sqrt{3})$$

≈ -0.27 , 此时 y

≈ 0.46 ;

$x = -(2 + \sqrt{3})$

≈ -3.73 , 此时 $y \approx -1.72$.

图形如图 2.84 所示.

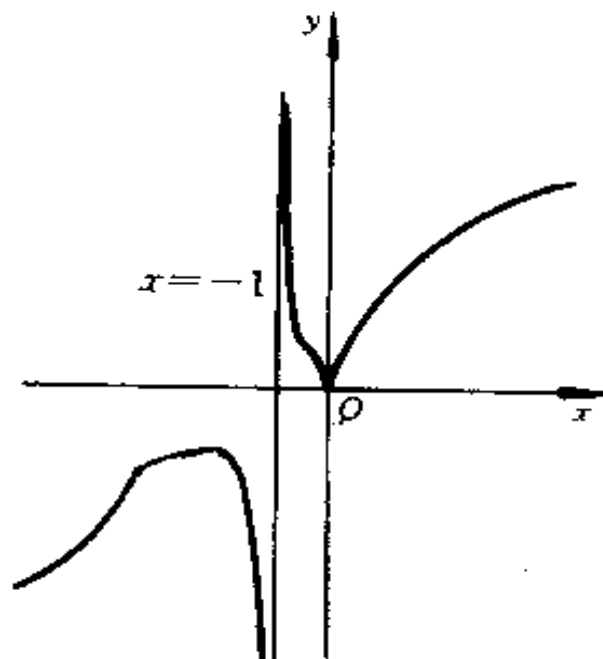


图 2.84

1496. $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}.$

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线: $y = \pm x$.

$$y' = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 1 .

$$y'' = \frac{-x^8 + 20x^6 + 18x^4 + 36x^2 - 9}{(x^4 + 3)^{\frac{3}{2}}(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x \approx \pm 0.47$ 或 ± 4.58 , 经判别均为拐点:

当 $x \approx \pm 0.47$ 时, $y \approx 1.58$;

当 $x \approx \pm 4.58$ 时, $y \approx 4.49$.

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = \sqrt{3} \approx 1.73$;

当 $x = \pm 1$ 时有极小值 $y = \sqrt{2} \approx 1.41$.

图形如图 2.85 所示.

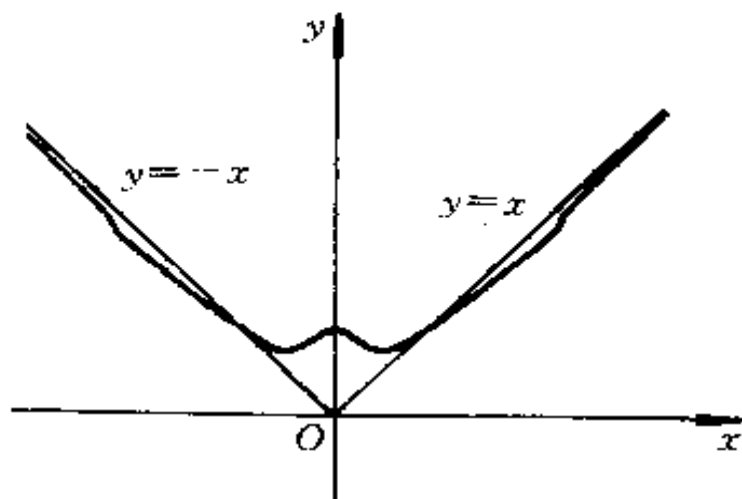


图 2.85

1497. $y = \sin x + \cos^2 x$.

解 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $0 \leq x \leq 2\pi$ 内的图形讨论如下:

零点处: $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 1.21\pi$ 及

$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 1.79\pi$.

$y' = \cos x(1 - 2\sin x)$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \text{ 及 } \frac{3\pi}{2};$$

$y'' = -\sin x - 2\cos 2x$, 令 $y'' = 0$ 得

$$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0,$$

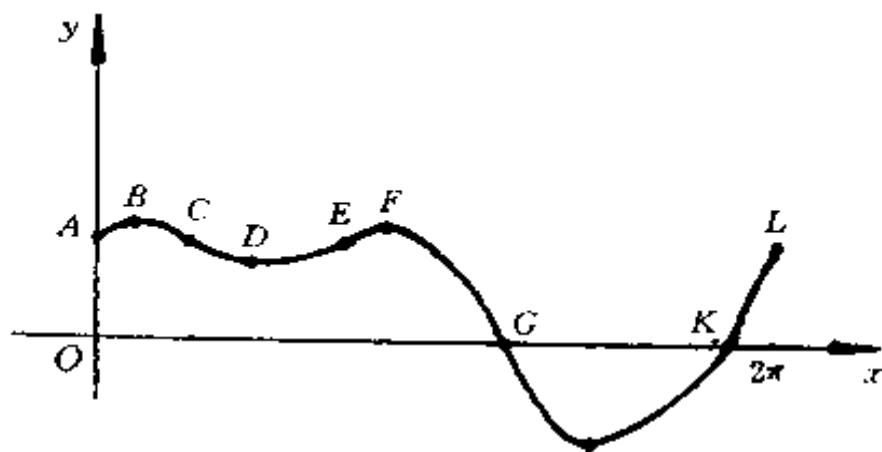


图 2.86

解之得

$$x_1 = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33} - 1}{8}, \text{ 此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33} - 1}{8}, \text{ 此时 } y_4 \approx 0.055,$$

经判断: $x_1 \approx 0.32\pi, x_2 \approx 0.68\pi, x_3 \approx 1.20\pi, x_4 \approx 1.80\pi$ 均为拐点;

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$;

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, 有极大值 $y = 1\frac{1}{4}$.

如图 2.86 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{4}\right), C(0.32\pi, 1.13),$$

$$D\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), E(0.68\pi, 1.13),$$

$$F\left(\frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), G(1.20\pi, 0.055), H\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right),$$

$$K(1.80\pi, 0.055) \text{ 和 } L(2\pi, 1).$$

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

解 图形关于原点对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形讨论如下:

零点处: $x = 0$ 或 $\pm\pi$.

$y' = 7\cos x + 2\cos 2x$, 令 $y' = 0$ 得

$$2\cos 2x + 7\cos x = 0,$$

解之得

$$x = \arccos \frac{1}{4} \approx 0.42\pi,$$

$$x = -\arccos \frac{1}{4}$$

$$\approx -0.42\pi.$$

$$y'' = -7\sin x - 4\sin 2x,$$

令 $y'' = 0$ 得 $\sin x(7 + 8\cos x) = 0$,

解之得

$$x_1 = 0, \text{ 此时 } y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$$

$$\approx \pm 0.84\pi, \text{ 此时}$$

$$y_{2,3} \approx \pm 2.54;$$

$$x_{4,5} = \pm \pi, \text{ 此时 } y_{4,5} = 0.$$

经判别: 点 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 均为拐点;

当 $x = -\arccos \frac{1}{4}$ 时有

$$\text{极小值 } y = -\frac{15}{8} \sqrt{15} \approx -7.3;$$

当 $x = \arccos \frac{1}{4}$ 时有极

$$\text{大值 } y = \frac{15}{8} \sqrt{15} \approx 7.3.$$

图形如图 2.87 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0);$$

$$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54),$$

$$C'(-\pi, 0).$$

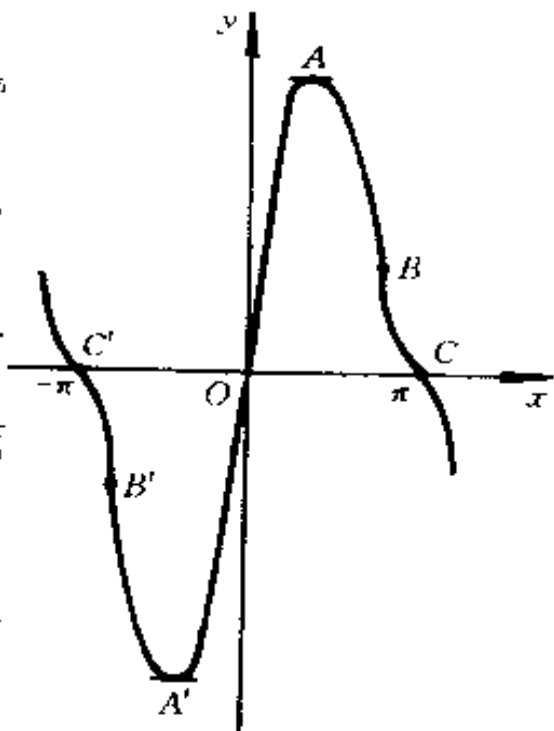


图 2.87

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x.$

解 图形关于坐标原点对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

零点处: $x = 0$ 或 $\pm \pi$.

$y' = \cos x + \cos 3x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$$y'' = -\sin x - 3\sin 3x,$$

令 $y'' = 0$ 得

$$x_1 = 0, y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi,$$

$$y_{2,3} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi,$$

$$y_{4,5} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0.$$

经判别：点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点；

极小值：当 $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时， $y = -\frac{2}{3} \sqrt{2}$
 ≈ -0.94 ；

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = \frac{2}{3};$$

极大值：当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时， $y = -\frac{2}{3}$ ；

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ 时, } y = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0.94.$$

图形如图 2.88 所示，图中主要点的坐标：

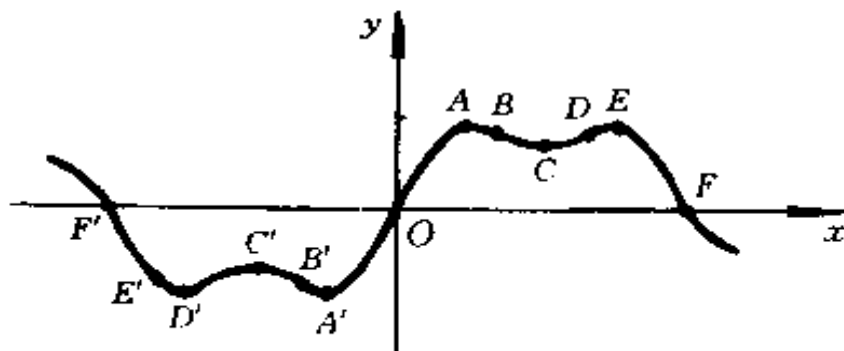


图 2.88

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 0.94\right), B(0.37\pi, 0.81), C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

$$D(0.63\pi, 0.81), E\left(\frac{3\pi}{4}, 0.94\right) \text{ 和 } F(\pi, 0);$$

点 A', B', C', D', E', F' , 和点 A, B, C, D, E, F 关于原点对称.

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

$$\text{零点处: } x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi.$$

$$y' = -\sin x + \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi.$$

$$y'' = -\cos x + 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, y_{1,2} \approx 0.63;$$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, y_{3,4} \\ \approx -0.44.$$

经判别: 点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时有极小值 } y = \frac{1}{2};$$

$$\text{当 } x = \pm \pi \text{ 时有极小值 } y = -\frac{3}{2};$$

$$\text{当 } x = \pm \frac{\pi}{3} \text{ 时有极大值 } y = \frac{3}{4}.$$

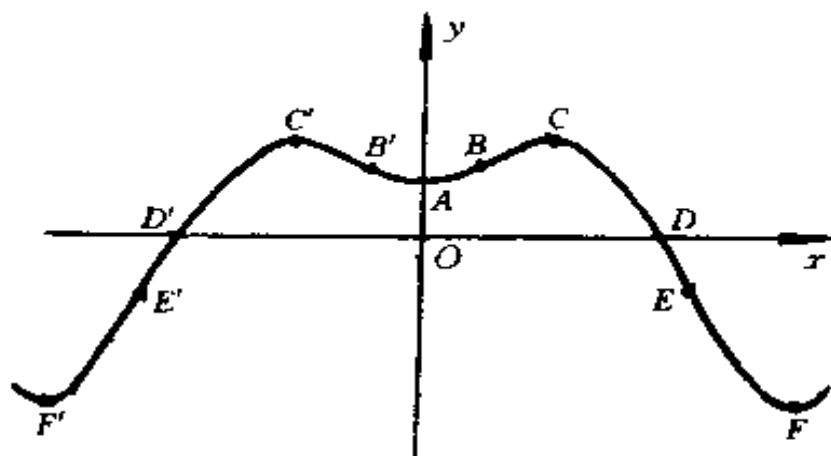


图 2.89

图形如图 2.89 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), B(0.18\pi, 0.63), C\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

$$D(0.62\pi, 0), E(0.70\pi, -0.44), F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right);$$

点 B', C', D', E', F' , 与点 B, C, D, E, F 关于 Oy 轴对称.

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(3 + \cos 4x), \end{aligned}$$

故函数的周期 $T = \frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 内讨论图形.

$$y' = -\sin 4x. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x. \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8},$$

$$y_{1,2} = \frac{3}{4}.$$

经判别: 点 x_1 和

x_2 均为拐点;

当 $x = 0$ 时有极大值

$$y = 1;$$

当 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 时有极小

$$\text{值 } y = \frac{1}{2}.$$

图形如图 2.90 所示,

图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right) \text{ 和 } C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

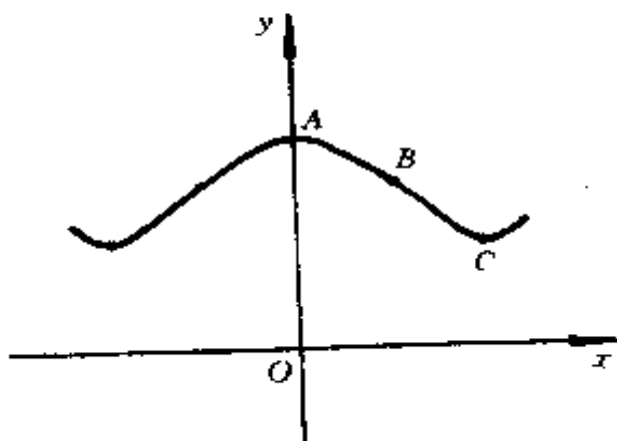


图 2.90

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}, \text{ 故函数的周期}$$

$$T = \pi. \text{ 在一周期 } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 内讨论图形.}$$

$$\text{零点处: } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$y' = 2\sin 4x - \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}.$$

$$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi,$$

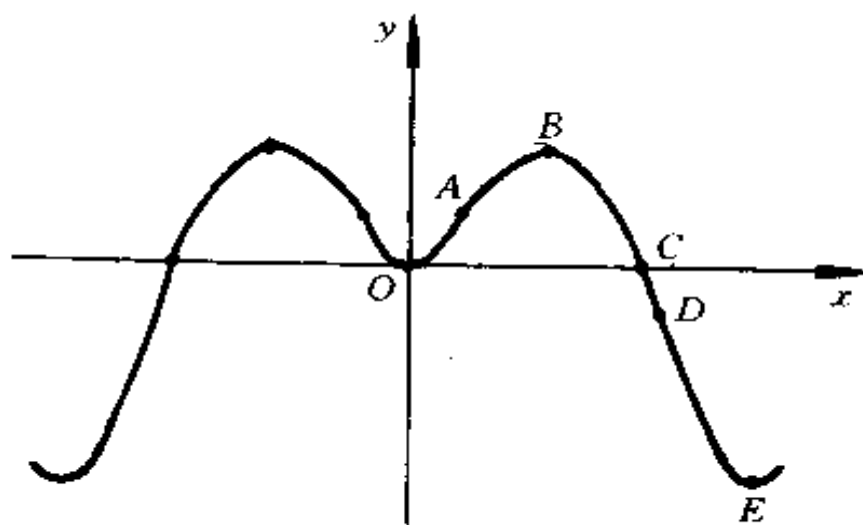


图 2.91

$$y_{1,2} \approx 0.29;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$$y_{3,4} \approx -0.24.$$

经判别: 点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

极小值: 当 $x = 0$ 时 $y = 0$,

$$\text{当 } x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = -1;$$

极大值: 当 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时, $y = \frac{9}{16}$

图形如图 2.91 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0.11\pi, 0.29), B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right), C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right),$$

$$D(0.36\pi, -0.24), E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right).$$

1503.
$$y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

解 利用 $\sin(\pi + x) = -\sin x$, 易知函数的周期

$$T = \pi.$$

在一周期 $0 \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

不连续点: $x = \frac{3\pi}{4}$.

零点处: $x = 0$ 或 π .

渐近线: $x = \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} > 0,$$

无极值, 函数图形上升.

$$y'' = -\frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{\pi}{4}$, 对应的 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 经判别为拐点.

图形如图 2.92 所示, 图中主要点的坐标:

$$A \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), B(\pi, 0) \text{ 和 } C \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

1504. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

零点处: $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

渐近线: $x = \pm \frac{\pi}{4}$.

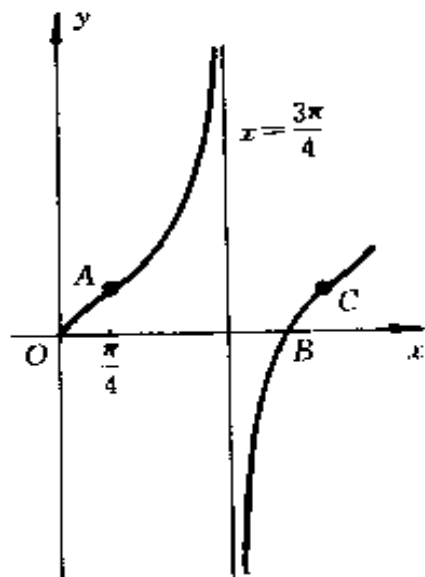


图 2.92

及 $x = \pm \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin x(1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 2x},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm \pi$;

$$y'' = \frac{1}{\cos^3 2x} [3\cos x \cos^2 2x + 4\sin 2x \sin x (1 + 2\cos^2 x)],$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

经判别: 当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 1$;

当 $x = \pm \pi$ 时有极大值 $y = -1$;

点 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 均为拐点, 此时 $y = 0$.

当 $0 < x < \pi$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-\pi < x < 0$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

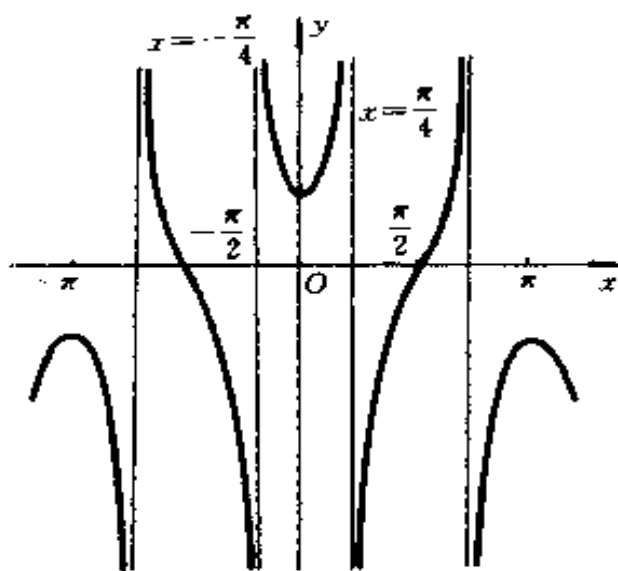


图 2.93

1505. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

解 零点处: $x = 0$ 及 $x \approx \pm 0.37\pi, \dots$

对称中心: $(k\pi, 2k\pi) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

渐近线: $x = \frac{2k+1}{2}\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

$y' = 2 - \sec^2 x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ 或 } x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

经判别: 当 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 时, 有极大值 $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$;

当 $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ 时, 有极小值 $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right) (k = 0, 1, 2, \dots)$.

$y'' = -2\sec^2 x \operatorname{tg} x$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

经判别此为拐点. 图形如图 2.94 所示

(仅描绘从 $-\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 区间内的图形).

1506. $y = e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方.

$y = e^{-(x-1)^2+1}$, 于是图形关于直线 $x = 1$ 对称.

渐近线: $y = 0$.

$y' = (2-2x) \cdot e^{2x-x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$, 经判别知此时有极大值 $y = e$;

$y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

经判别为拐点, $y = \sqrt{e} \approx 1.65$.

图形如图 2.95 所示, 图中各点的位置:

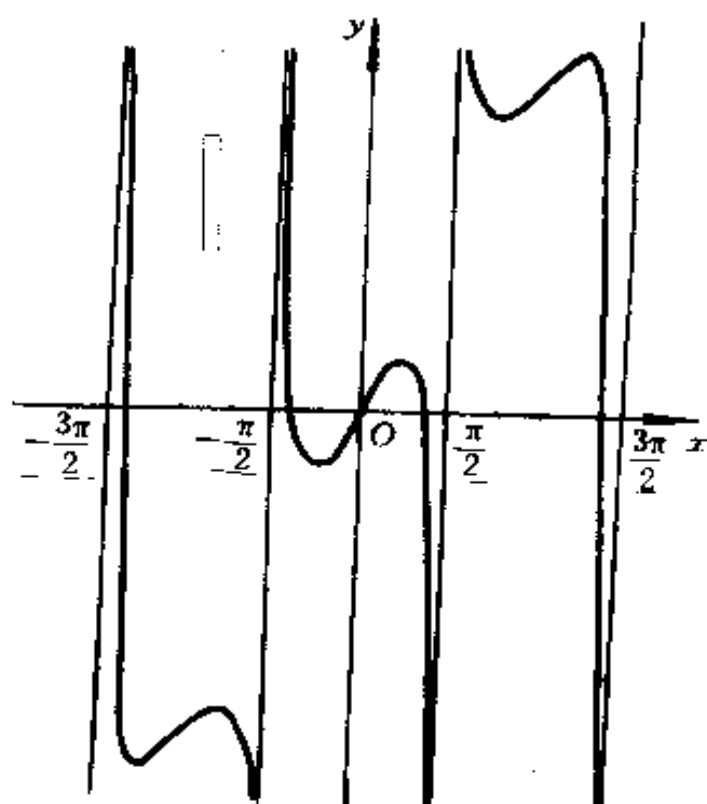


图 2.94

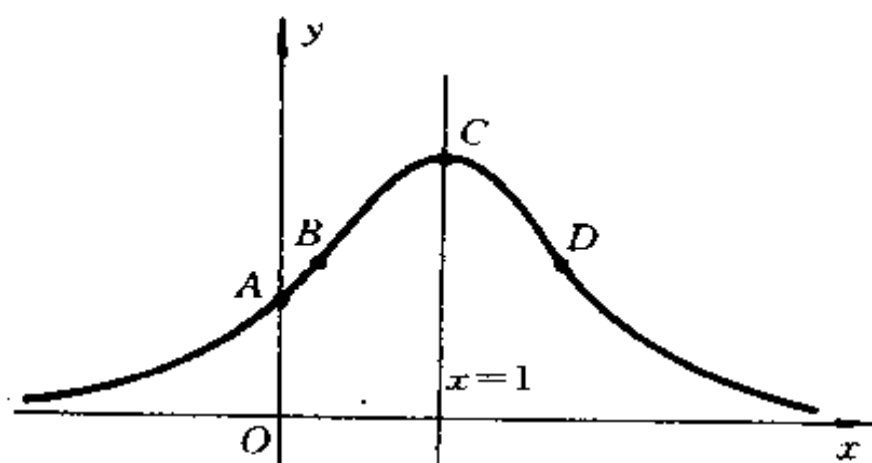


图 2.95

$$A(0,1), B\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right), C(1,e),$$

$$D\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right).$$

1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 在 Ox 轴的上方.

渐近线: $y = 0$.

$y' = -2x^3e^{-x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 经过 $x = 0$ 点, 导数 y' 从正变负, 所以当 $x = 0$ 时取极大值 $y = 1$.

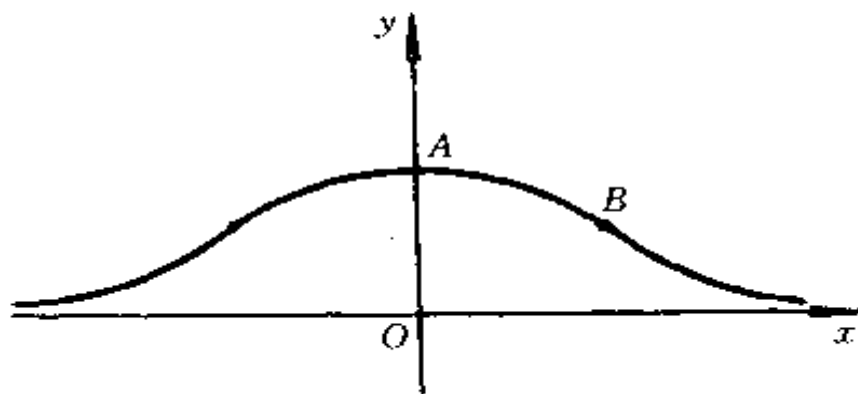


图 2.96

$$y'' = 2x^2e^{-x^2}(2x^2 - 3), \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22,$$

经判别为拐点, 而 $y = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.56$.

图形如图 2.96 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B(1.22, 0.56).$$

1508. $y = x + e^{-x}$.

解 $y' = 1 - e^{-x}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0, y = 1$.

$y'' = e^{-x} > 0$, 图形向上凹, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 1$.

斜渐近线: $y = x$. 事实上,

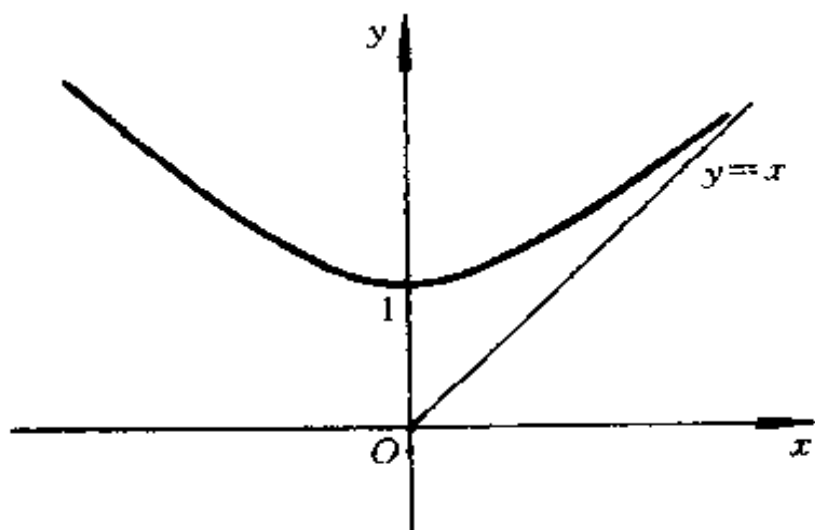


图 2.97

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0.$$

图形如图 2.97 所示.

1509. $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点处: $x = 0$.

渐近线:

$y = 0$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}}e^{-x} \left(x - \frac{2}{3} \right),$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{2}{3}$, 当 $x = 0$ 时, $y' = \infty$.

经判别: 当 $x = 0$ 有极小值 $y = 0$, 且 $(0, 0)$ 点为尖点.

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有极大值 $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39$.

由此可知函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴上方.

$$y'' = \frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2 - 12x - 2), \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.33,$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点.

图形如图 2.98 所示, 图中主要点的坐标:

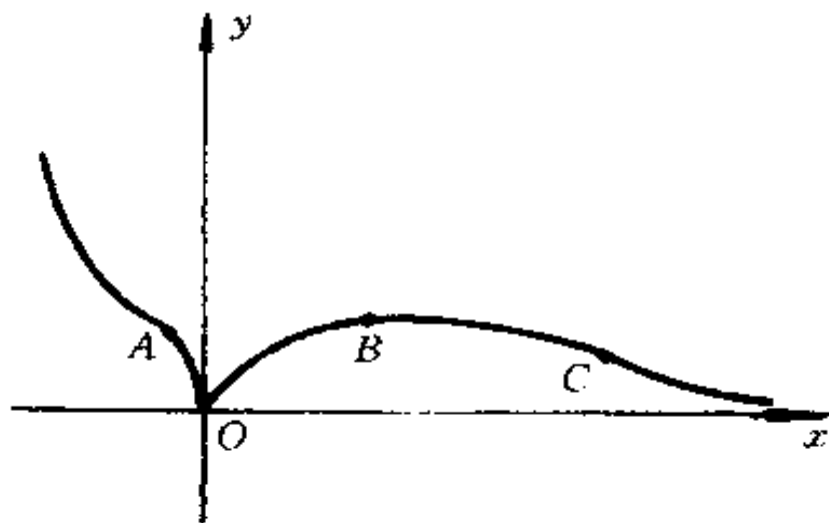


图 2.98

$$A(-0.15, 0.34), B\left(\frac{2}{3}, 0.39\right), C(1.48, 0.30).$$

1510. $y = \frac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时, 函数值为负的,

当 $x > -1$ 时, 函数值为正的.

不连续点: $x = -1$. 垂直渐近线: $x = -1$.

又水平渐近线: $y = 0$ (当 $x \rightarrow -\infty$ 时). 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

经判别知此时有极小值

$$y = 1.$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 + 1)}{(1+x)^3},$$

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

图形如图 2.99 所示.

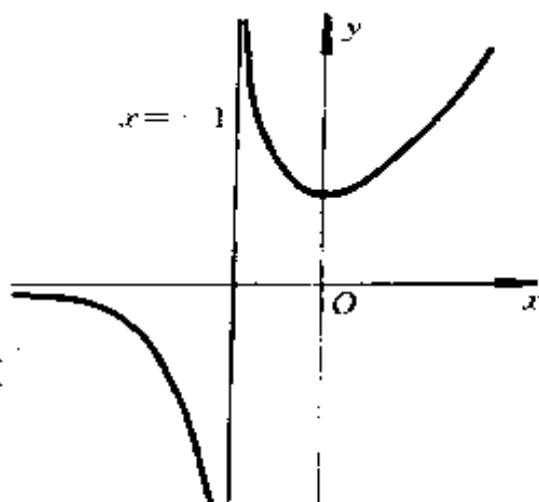


图 2.99

1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处: $x = 0$.

函数值不为负.

当 $x = 0$ 时有最小值 $y = 0$.

渐近线: $y = 1$.

$$y' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

当 $x < 0, y' < 0$; 当 $x > 0, y' > 0$.

$$y'' = \frac{e^{-x^2} (1 - 3x^2 - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2})}{(1 - e^{-x^2}) \sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t) = 1 - 3t - e^{-t} + 2te^{-t}$ ($0 \leq t < +\infty$), 易证 $g(t) \leq 0$. 于是, 对于 $x \neq 0$, 恒有 $y'' < 0$, 即图形呈凸状. 而 $(0, 0)$ 点为尖点(图 2.100).

1512. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

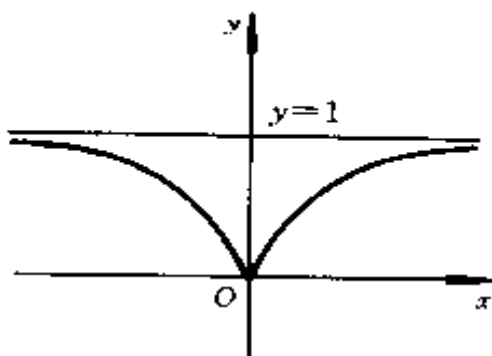


图 2.100

解 存在域: $x > 0$.

零点处: $x = 1$.

渐近线: $x = 0$ ($x \rightarrow +0$), $y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$).

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^2 \approx 7.39.$$

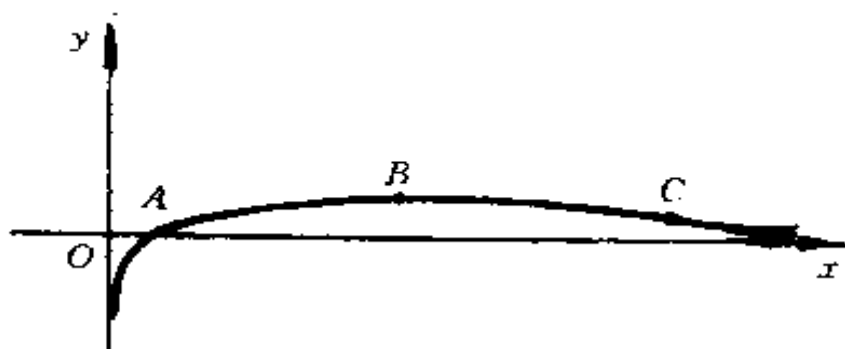


图 2.101

经判别知此时有极大值 $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$.

$$y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39,$$

经判别此为拐点, 此时 $y = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$.

图形如图 2.101 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(1, 0), B(7.39, 0.74), C(14.39, 0.70).$$

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
故图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \text{ 故图形始终上升, 无极值点.}$$

$$y'' = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$,
在此点切线斜率为 $k = 1$.
经判别此为拐点, 此
时 $y = 0$.

图形如图 2.102 所示.

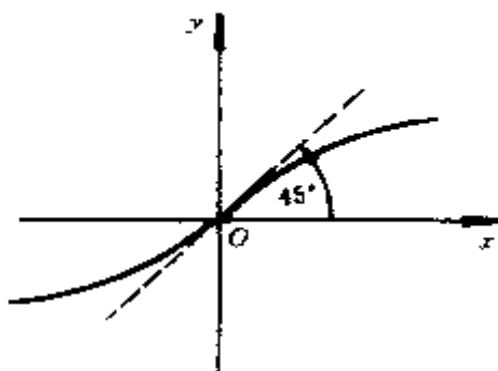


图 2.102

1514. $y = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

当 $x < 0$ 时, 由对称性知图形是凸的.

于是得知 $O(0,0)$ 为拐点, 在此点切线斜率为 $k = 1$.

从而, 函数图形始终上升, 如图 2.103 所示.

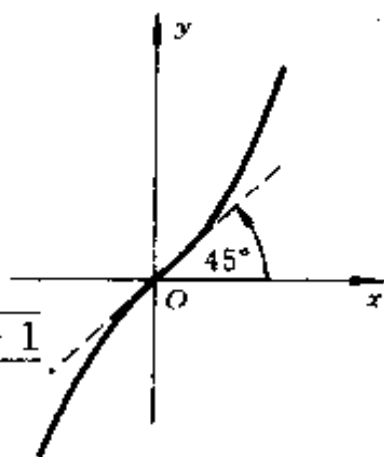


图 2.103

1515. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

存在域: $|x| < 1$.

渐近线: $x = \pm 1$.

$y' =$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

> 0 ($|x| < 1$),

故图形始终上升.

$$y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} +$$

$$\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的,

当 $0 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的, $O(0,0)$ 为拐点处, 在此点切线斜率为 $k = 1$.

图形如图 2.104 所示.

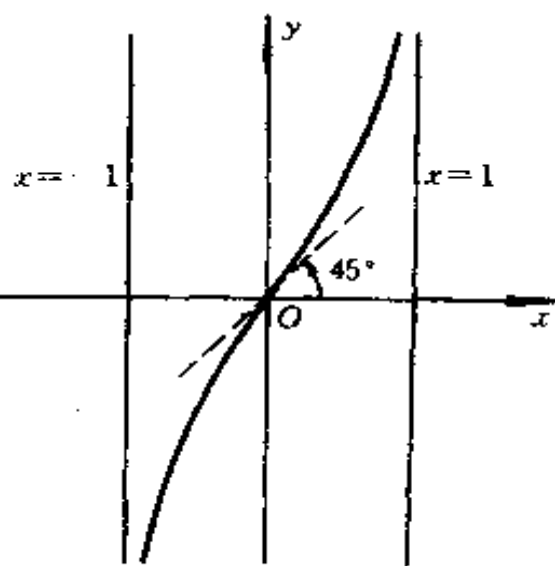


图 2.104

1516. $y = x + \arctan x$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

渐近线: $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - kx) = -\frac{\pi}{2}, b_2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

故图形始终上升,无
极值点.

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$, 判
别知为拐点, 在此点切线
斜率为 $k = 2$.

图形如图 2.105 所示.

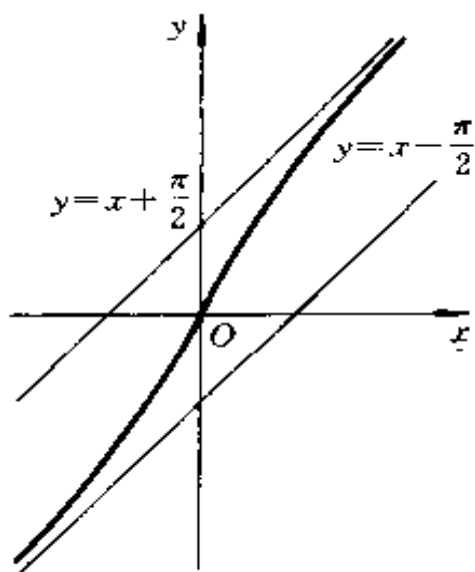


图 2.105

1517. $y = \frac{x}{2} + \text{arc ctg}x.$

解 零点处: $x \approx -5.95.$

渐近线: $y = \frac{x}{2} + \pi.$ 事

实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2} + \text{arc ctg}x}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x}{2} + \text{arc ctg}x \right) - \frac{1}{2}x \right] = \pi;$$

同法还可得渐近线 $y = \frac{x}{2}$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \pm 1.$$

当 $x < -1$ 及当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降;

故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$, 当 $x = -1$

时有极大值 $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856.$

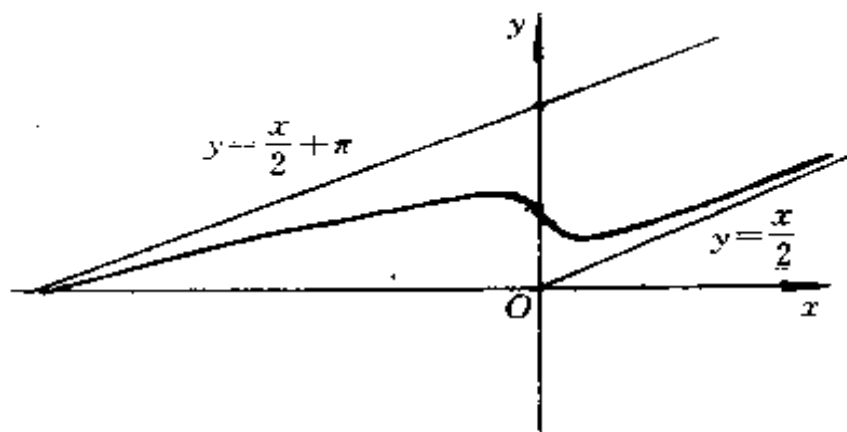


图 2.106

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

从而有拐点 $x = 0$, 此时 $y = \frac{\pi}{2}$, $y' = -\frac{1}{2}$.

图形如图 2.106 所示.

1518. $y = x \arctg x$.

解 零点处: $x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线:

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时);}$$

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时).}$$

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \arctg x,$$

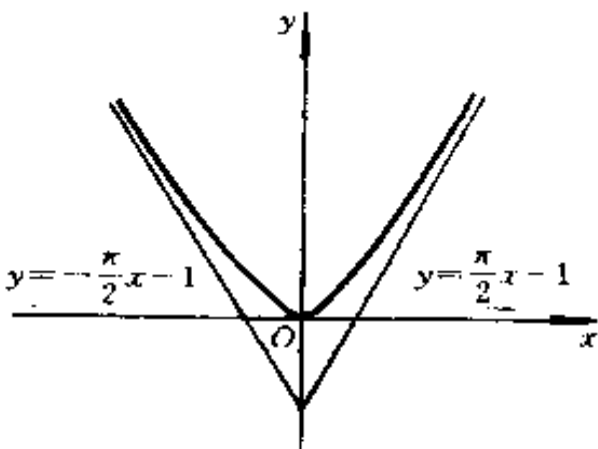
令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 图形下降; 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 图

形上升,故当 $x = 0$ 时,
有极小值 $y = 0$.

$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$, 图
形是凹的.

图形如图 2.107 所示.



1519. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 零点处: $x = 0$.

图形关于坐标原点
对称.

图 2.107

渐近线: $y = 0$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{2 \operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \quad (|x| \neq 1).$$

当 $|x| < 1$ 时, $y' > 0$, 图形上升,

当 $|x| > 1$ 时, $y' < 0$, 图形下降,

当 $x = 1$ 时, 直接从定义出发, 可得

$$y'_-(1) = 1, y'_+(1) = -1,$$

故点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 为角点, 且当 $x = 1$ 时有最大值 $y = \frac{\pi}{2}$.

利用对称性可知点 $(-1, -\frac{\pi}{2})$ 也为角点, 且当 x
 $= -1$ 时有最小值 $y = -\frac{\pi}{2}$;

$$y'_-(-1) = -1, y'_+(-1) = 1.$$

当 $x = 0$ 时, $y' = 1$.
 又点 $x = 0$ 为拐点.
 图形如图 2.108 所示.

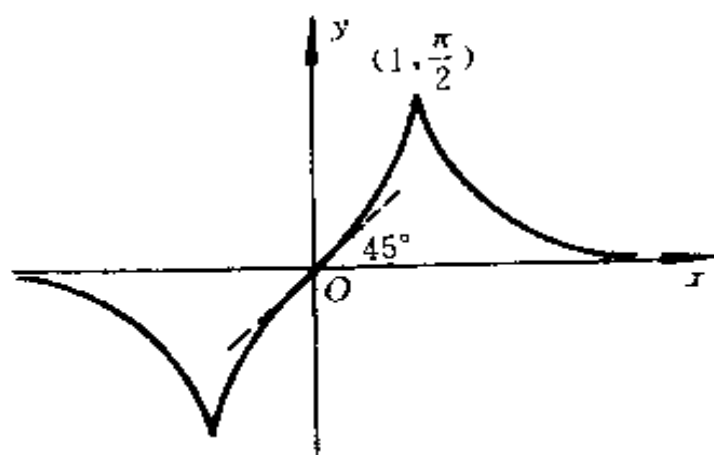


图 2.108

1520. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 零点处: $x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线: $y = \pi$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi.$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} > 0 \quad (x > 0), \text{ 图形上升.}$$

当 $x = 0$ 时, 直接从定义出发, 得

$$y'_+(0) = 2.$$

由对称性知, $y'(0) = -2$, 且当 $x < 0$ 时, 图形下降, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$. 此点为角点.

$$y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad (x > 0), \text{ 图形是凸的.}$$

由对称性知, 当 $x < 0$ 时, 图形也是凸的.

图形如图 2.109 所示.

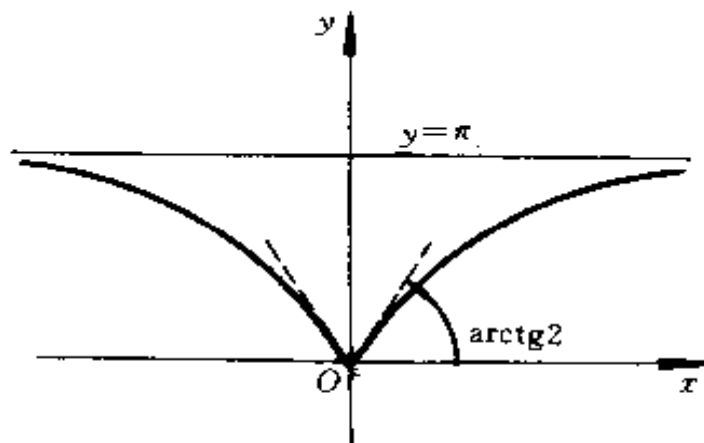


图 2.109

1521. $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处: $x = -2$.

不连续点: $x = 0$.

渐近线: $y = x + 3$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + x + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right] = 3.$$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ 或 -1 .

当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 图形下降,

当 $-1 < x < 0$ 时,

$y' < 0$, 图形下降,

当 $x < -1$ 及 $x > 2$

时,

$y' > 0$, 图形上升;

故当 $x = -1$ 时有极

大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值

$y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4} \right).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -$

$$\frac{2}{5},$$

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的,

当 $x > -\frac{2}{5}$ ($x \neq 0$) 时, $y'' > 0$, 图形是凹的,

故该点是拐点, 此时 $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$.

图形如图 2.110 所示. 图中各点的位置:

$A(-2, 0), B(-1, 0.37),$

$C(-0.40, 0.13), D(2, 6.59).$

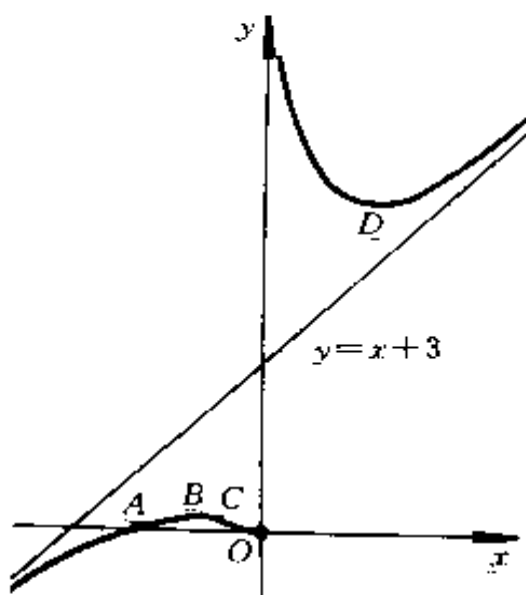


图 2.110

1522. $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

解 存在域: $|x| \geq 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

渐近线: $y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时有边界的极大值 $y = 2\sqrt{2} \approx 2.67$.

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty,$$

$$y'(x) = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \\ \cdot \ln 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right),$$

故当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

$x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 \\ + \ln 2 \cdot 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \\ \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0, \text{ 故图形呈凹状.}$$

图形如图 2.111 所示.

1523. $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$

解 存在域: $x < 1$ 及 $x > 2$.

与坐标轴的交点: $(0, \ln 2)$ 及 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

渐近线: $y = 0$; 事实上,

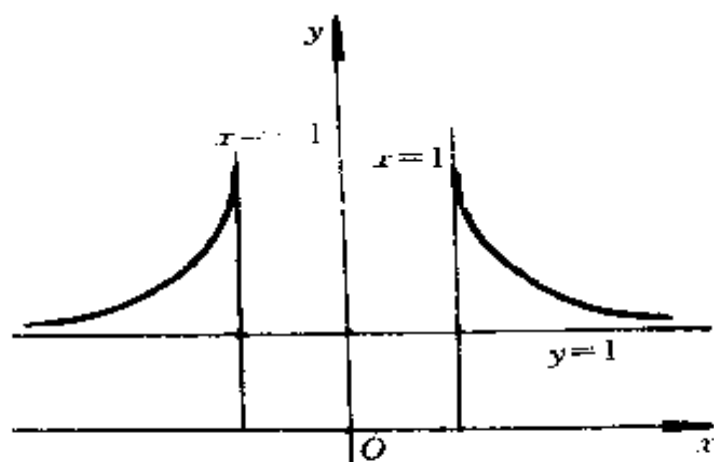


图 2.111

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x =$$

$$\frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0.72 \text{ (另一根不在存在域内), 经判别知}$$

当 $x \approx -0.72$ 时有极大值 $y \approx 1.12$.

$$y'' = \frac{-6x^5 + 15x^4 - 30x^2 + 30x - 13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}, \text{ 令 } y'' =$$

0 得 $x \approx -1.52$. 判别知为拐点, 此时 $y \approx 0.99$.

当 $x < -1.49$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

当 $x > 2$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.

当 $x \rightarrow 1-0$ 及 $x \rightarrow 2+0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

图形如图 2.112 所示.

图中主要点的坐标: $A(-1.52, 0.99)$, $B(-0.72, 1.12)$, $C(0, \ln 2)$, $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

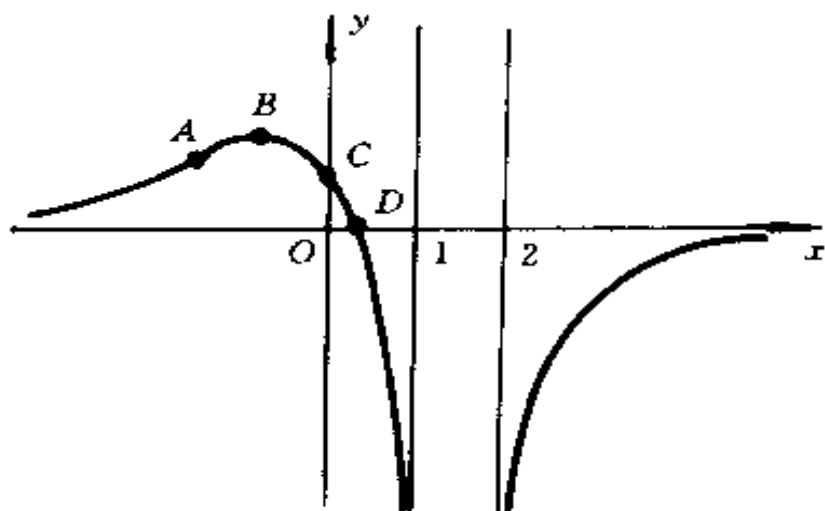


图 2.112

1524. $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

解 存在域: $|x| \leq a$.

与坐标轴交点: $(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x = a$ 时有边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$.

$y' = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} > 0$ (当 $|x| < a$ 时), 故图形单调

上升. 又

$$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0.$$

$$y'' = \frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (|x| < a),$$

故图形是凹的.

图形如图 2.113 所示.

图中主要点的坐

标:

$$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right),$$

$$B(0, -a),$$

$$C(0.67a, 0),$$

$$D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right).$$

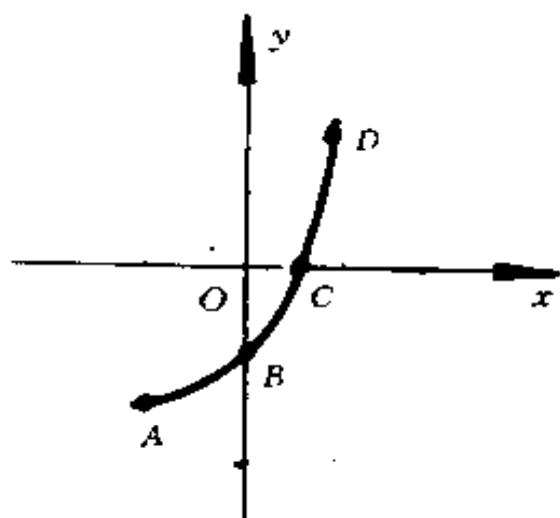


图 2.113

1525. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域: $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \leq 1$, 两端平方之, 解得

$$x \leq 0 \text{ 或 } x \geq \frac{2}{3}.$$

渐近线: $y = \frac{\pi}{3}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当 $x = 0$ 时有边界的极小值 $y = 0$,

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y = \pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{(3x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2x)^2} \cdot (9x - 12x^2 - 1), & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{(3x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2x)^2} (12x^2 - 9x + 1), & \text{当 } x \geq \frac{2}{3} \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $x \leq 0$

时, $y'' < 0$, 图形是凸的;

当 $x \geq \frac{2}{3}$

时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

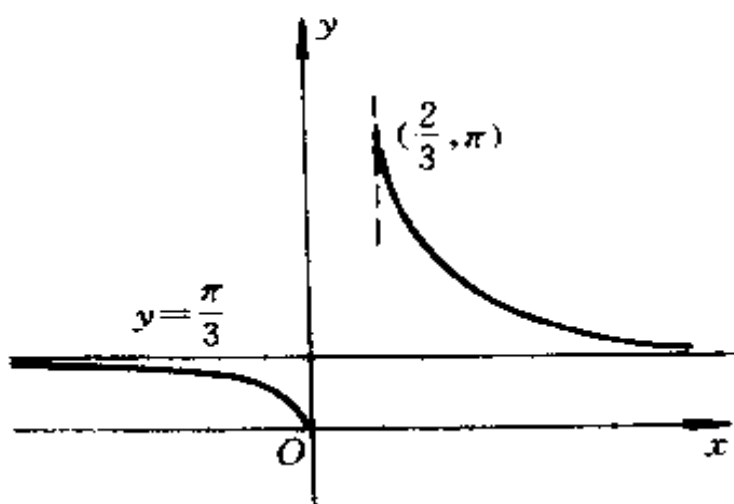


图 2.114

又当 $x < 0$

时, $y' < 0$, 图形

下降;

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y' < 0$, 图形也下降;

$$y'_{-}(0) = -\infty, y'_{+}\left(\frac{2}{3}\right) = -\infty.$$

图形如图 2.114 所示.

1526. $y = x^x$.

解 一般只讨论 $x > 0$. 函数值始终为正的, 故图形在

Ox 轴的上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$. 经判别知此时有极小值

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692.$$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0, \text{图形是凹的.}$$

当 $x \rightarrow +0$ 时有边界值 $y = 1$ (利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x > 0$.

渐近线: $y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时有边界的最小值 $y = 0$.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x). \text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = e.$$

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 图形上升,

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

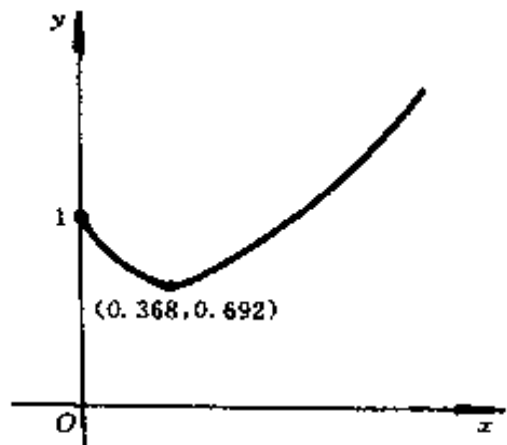


图 2.115

当 $x = e$ 时有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$.

$$y'' = x^{-4}(1 - 2\ln x + \ln^2 x - 3x + 2x\ln x), \text{ 令 } y'' = 0$$

得 $x \approx e^{1.47} (\approx 4.35)$.

当 $0 < x < e^{1.47}$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.

当 $x > e^{1.47}$

时, $y'' > 0$, 图形是

凹的, 故 $x = e^{1.47}$ 是拐点, $y \approx 1.402$.

图形如图 2.116 所示. 图中各点位置:

$$A(e, 1.445), B(4.35, 1.402).$$

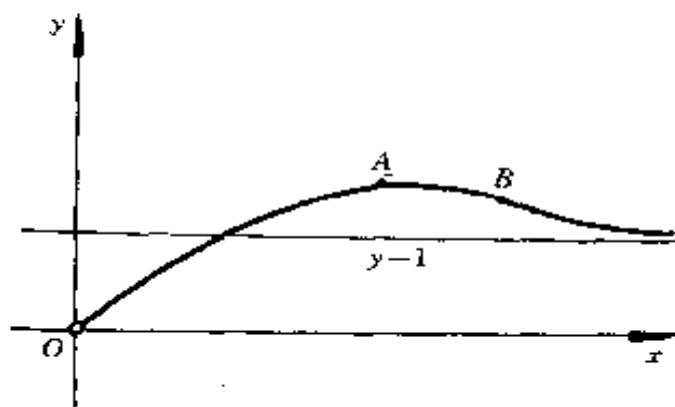


图 2.116

1528. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 存在域: $x > -1, x \neq 0$, 函数值为正的, 故图形在 Ox 轴上方.

$$y' = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left[\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right],$$

易证 $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0$, 故 $y' < 0$, 从而图形下降.

渐近线: $x = -1$ 和 $y = 1$.

图形是凹的. $x = 0$ 为可移去不连续点.

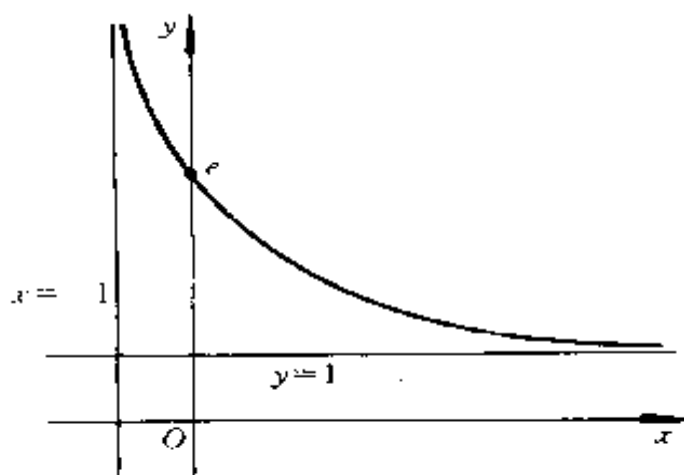


图 2.117

图形如图 2.117 所示.

1529. $y = x\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0).$

解 $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + x\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] > 0,$

易证 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0 (x > 0)$, 故 $y' > 0$, 从而图形上升.

当 $x \rightarrow +0$ 时, 有边界的最小值 $y = 0$.

渐近线: $y = e\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -e \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right. \\
 &\quad \left. + O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x+1}\right] = -\frac{e}{2}.
 \end{aligned}$$

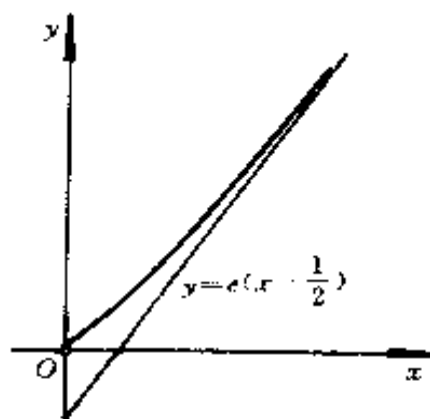


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530. $y = \frac{1}{1+x^2} e^{1-x^2}$ (不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方. 图形关于 Oy 轴对称.

不连续点: $x = 1$ 及 $x = -1$.

$$y' = \frac{2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} (3-x^2)}{(1-x^2)^2 (1+x^2)^2}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pm \sqrt{3}$.

经判别:

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = e$;

当 $x = \pm \sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$;

当 $x = \sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$.

渐近线: $y = 0; x = -1$ 及 $x = 1$;

图形如图 2.119 所示. 图中主要点的坐标:

$A(0, e), B(\sqrt{3}, 0.15), C(-\sqrt{3}, 0.15)$.

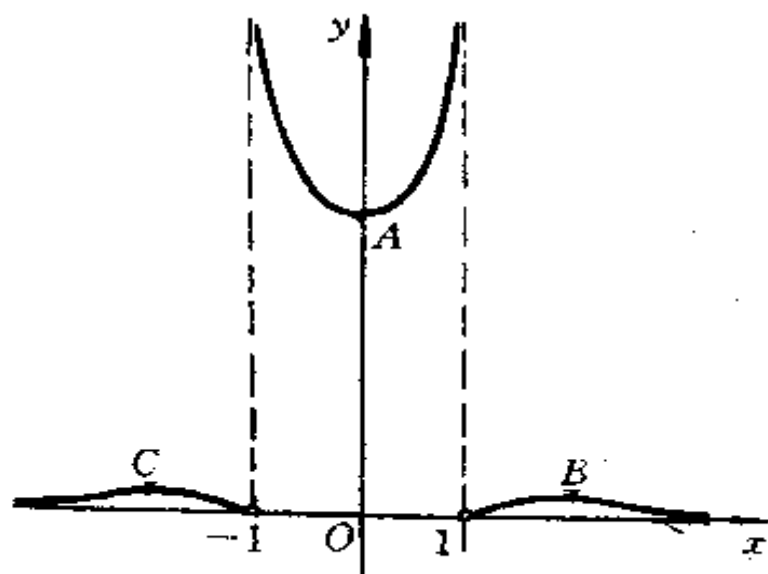


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线:

1531. $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x} = \frac{|t+1|}{2}, \sqrt{y} = \frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t \geq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = \frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 (x \geq 1, x > y); \quad (1)$$

当 $t \leq -1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 (y \geq 1, y > x); \quad (2)$$

当 $-1 \leq t \leq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$, 相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1). \quad (3)$$

由方程(1),(2)及(3)

即得所给曲线的图形. 图形关于 $y = x$ 对称, 如图

2.120 所示.

图中主要点的坐标:

$A(1,0), B(4,1),$

$C(0,1), D(1,4),$

$E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$

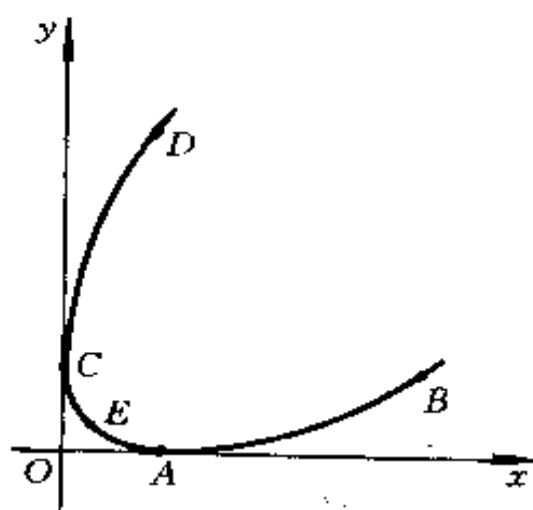


图 2.120

1532. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3.$

解 $x'_t = 2(1-t), y'_t = 3(1-t^2).$ 令 $x'_t = 0, y'_t = 0,$

得 $t = \pm 1.$

作下表：

t 的区间	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1, 1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1, +\infty)$	-	-	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1). \text{ 令 } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 得}$$

$$t = -1, \text{ 此时 } x = -3, y = -2.$$

由于 $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$,

故存在域为 $x \leq 1$, 且图

形有两支, 又因 $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$$\frac{3}{4(1-t)}, \text{ 故当 } t > 1 \text{ 时}$$

图形呈凸状, 而当 $t < 1$

时图形呈凹状.

当 $x = 0$ 时, $t = 0$

或 $t = 2$, 此时 $y = 0$ 或 y

$= -2$.

当 $y = 0$ 时, $t = 0, +\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$, 此时 $x = 0,$

0.464 或 -6.464 .

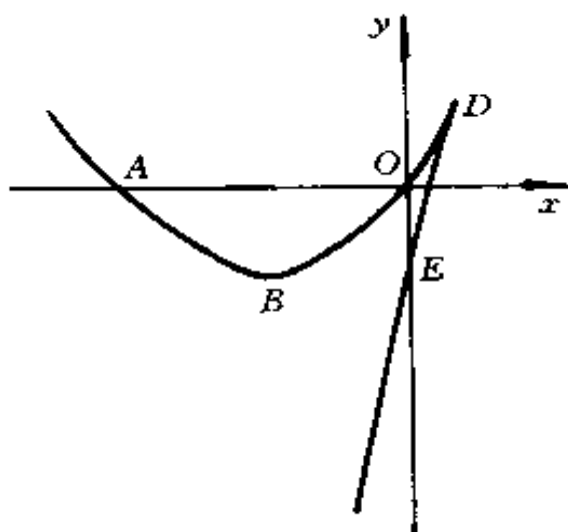


图 2.121

图形如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(-6.464, 0), B(-3, -2), D(1, 2), E(0, -2).$$

1533. $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$

解 $x'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}.$ 考虑 $x'_t = 0,$

$y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值: $t = 0, \pm 1$ 及 $2.$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, 1)$	-	-	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1, 2)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2, +\infty)$	+	-	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 及 $(4, +\infty)$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0,$ 因而曲

线下降.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}, \text{ 令 } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ 得 } t$$

≈ -0.33 , 经判别此时对应于拐点 $(-0.08, 0.30)$.

令 $\frac{dx}{dy} = 0$ 得 $t = 0, 2$ 及 -1 , 其中当 $t = 0$ 及 2 时有垂直切线, 切点为 $(0, 0)$ 及 $(4, \frac{2}{3})$. 当 $t = -1$ 时, $x = -\frac{1}{2}$, 此为垂直渐近线. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{t^2 - 1} = \infty.$$

斜渐近线为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{x}{2} \right) = - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}.$$

又当 $x \rightarrow +\infty$, 即当 $t \rightarrow 1+0$ 时, $y \rightarrow +\infty$ 或当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$;

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 即当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 或当 $t \rightarrow 1-0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

总之, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ 或 0 , $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ 或 $-\infty$. 图形如图

2.122 所示. 图中主要点的坐标:

$$A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), B\left(4, \frac{2}{3}\right).$$

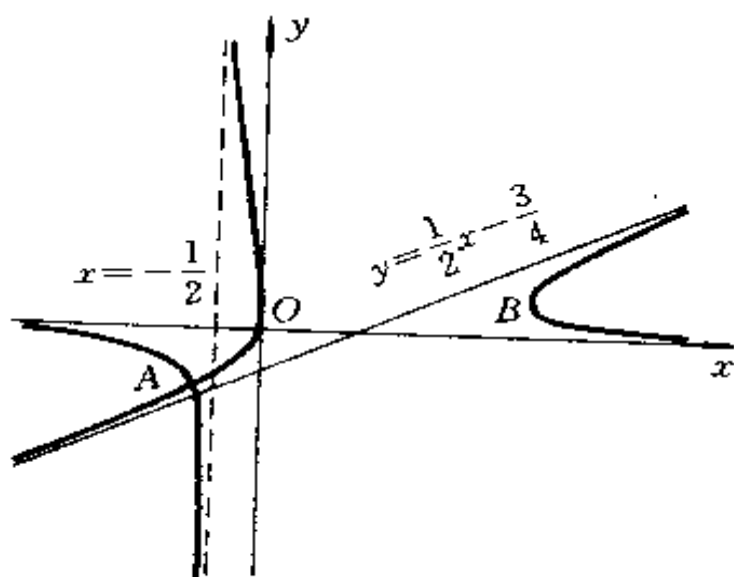


图 2.122

1534. $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以 $-t$ 换 t , x 及 y 值不变, 故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2 = \frac{x}{1+x}$, 故 $x \geq 0$ 或 $x \leq -1$.

$$x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 < 0, \text{ 曲线下降.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}, \text{ 当 } |t| < 1 \text{ 时图形呈凹状, 当 } |t| > 1$$

时图形呈凸状.

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值:

$$t = 0, t = 1.$$

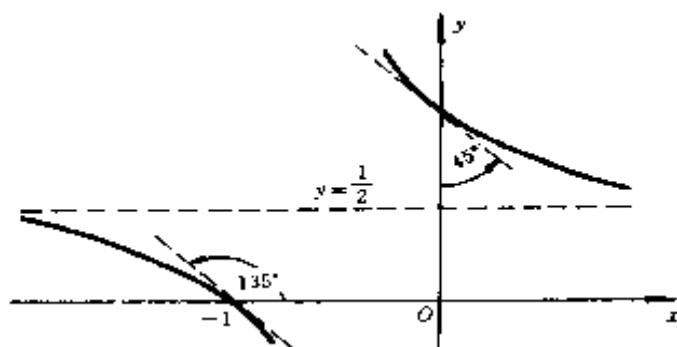


图 2.123

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y
$(0, 1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1, +\infty)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为 $y = \frac{1}{2}$. 事实上

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +1} \frac{1 - t^2}{t^2(1 + t^2)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

在点 $(-1, 0)$ 处 ($t = +\infty$), $\frac{dy}{dx} = -1$; 而在点 $(0, 1)$ 处

($t = 0$) 仍有 $\frac{dy}{dx} = -1$. 这说明在这两点处的切线均与

Ox 轴成 135° 的角. 这两点且为边界极值点.

图形如图 2.123 所示.

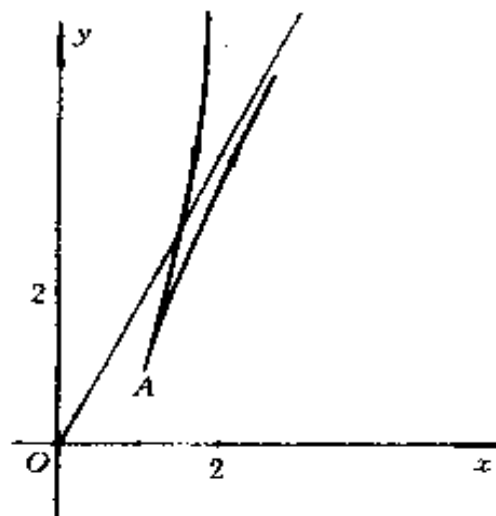
1535. $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$.

解 $x'_t = \frac{e^{-t} - 1}{e^t},$

$y'_t = \frac{2(e^{2t} - 1)}{e^{2t}},$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2(e^t + 1)}{e^t},$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t - 1}.$



作下表:

图 2.124

t 的范围	x'_t, y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图 形
$(-\infty, 0)$	- -	由 $+\infty$ 下降到 1	由 $+\infty$ 下降到 1	+	+	上升, 凹状
$(0, +\infty)$	+ +	由 1 上升到 $+\infty$	由 1 上升到 $+\infty$	+	-	上升, 凸状

渐近线: $y = 2x$, 事实上, 有

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(2t + e^{-2t}) - 2t \cdot 2e^{-t}] = 0.$$

当 $t = 0$ 时, 对应于曲线上的点 $A(1, 1)$, 此点的导数 $\frac{dy}{dx} = 4$. 当 $t = -\ln 2$ 时, 曲线与渐近线相交. 图形如图 2.124 所示.

1536. $x = a \cos 2t, y = a \cos 3t$ ($a > 0$).

解 由于 $a\cos 2(t+2\pi) = a\cos 2t$ 及 $a\cos 3(t+2\pi) = a\cos 3t$. 因此, 我们只须考虑 t 在 $(0, 2\pi)$ 内变化时, x 及 y 的变化情况.

$$x'_t = -2a\sin 2t,$$

$$y'_t = -3a\sin 3t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin 3t}{2\sin 2t}.$$

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 的值:

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3},$$

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \text{ 及 } 2\pi.$$

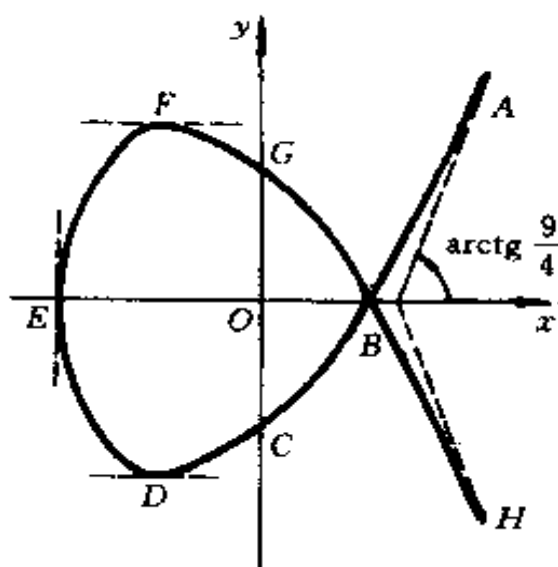


图 2.125

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(0, \frac{\pi}{3})$	-	-	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	+	上升
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	-	+	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	-	下降
$(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$	+	+	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	+	上升
$(\frac{2\pi}{3}, \pi)$	+	-	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 0 下降到 $-a$	-	下降
$(\pi, \frac{4\pi}{3})$	-	+	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	-	下降

(续表)

t 的范围	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$	-	-	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	+	上升
$(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3})$	+	-	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	-	下降
$(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$	+	+	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	+	上升

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = -a$;

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty$ (t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\infty$;

从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = +\infty$), 此时 $x = -a$, $y = 0$;

当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = a$;

当 $t = \pi$ 时, 利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$, 此时 $x = a$, $y = -a$;

当 $t = 0$ 时, 利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}$, 此时 $x = y = a$.

图形如图 2.125 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a, a), B\left(\frac{a}{2}, 0\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2}, -a\right), E(-a, 0), F\left(-\frac{a}{2}, a\right),$$

$$G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right), H(a, a).$$

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t, \sqrt{y} = \sin^2 t,$ 相加即得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$ 图形如图 2.126 所示*).

*) 参看 1531 题 .

1538. $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}.$

解 当 $t > 0$ 时, x 及 y 才有意义 .

当 $0 < t \leq 1$ 时, 令 $t' = \frac{1}{t},$ 则 $t' \geq 1,$ 且 $x = -\frac{\ln t'}{t'},$
 $y = -t' \ln t',$ 所以, 图形关于直线 $x + y = 0$ 对称 .

以下讨论图形的极值点, 凹凸性及拐点, 不妨设 $t \geq 1:$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2}.$$

令 $1 - \ln t = 0,$ 得 $t = e.$ 经判别此时图形有极大值点:

$$A\left(e, \frac{1}{e}\right).$$

令 $\ln^2 t - 2 = 0,$ 得 $t = e^{\sqrt{2}},$ 相应的点

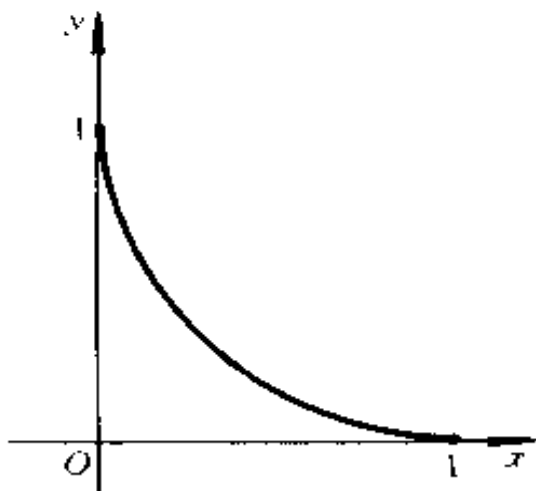


图 2.126

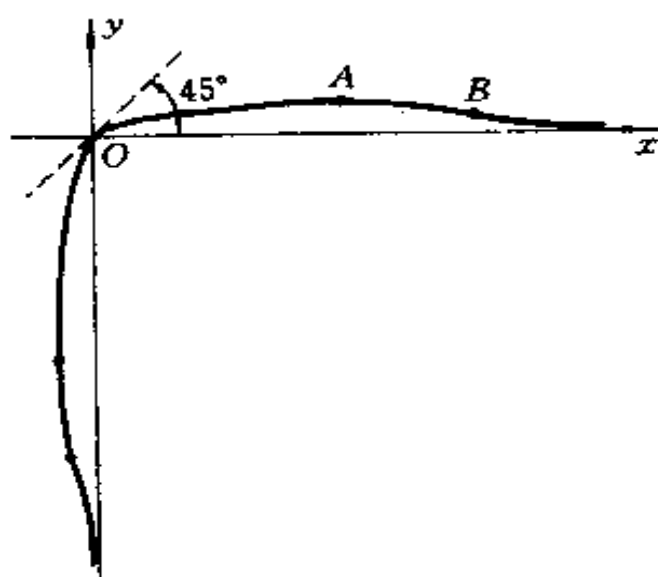


图 2.127

$B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ 为图形的拐点.

当 $1 \leq t \leq e^{\sqrt{2}}$, 即当 $0 \leq x \leq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时, 图形呈凸状. 当 $t \geq e^{\sqrt{2}}$, 即当 $x \geq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时, 图形呈凹状.

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(0, \frac{1}{e})$	-	+	由 0 下降到 $-\frac{1}{e}$	由 $-\infty$ 上升到 $-e$	-	下降
$(\frac{1}{e}, e)$	+	+	由 $-\frac{1}{e}$ 上升到 e	由 $-e$ 上升到 $\frac{1}{e}$	+	上升
$(e, +\infty)$	+	-	由 e 上升到 $+\infty$	由 $\frac{1}{e}$ 下降到 0	-	下降

曲线通过点(0,0),在此点切线的倾角为 45° .

水平渐近线为 $y = 0$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

垂直渐近线为 $x = 0$. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow +0} y = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln t}{t} = -\infty.$$

图形如图 2.127 所示.

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}, y = a \operatorname{tg}^3 t (a > 0).$

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

显然, $|x| \geq a$. 且图形对于两坐标轴都对称,故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}, y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} (y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}).$$

而当 $x > 0, y > 0$ 时,有 $x > y$. 从而有

$$y' > 0, y'' > 0,$$

故图形上升且呈凹状.

在 $(a, 0)$ 点的切线的倾角为 0° . 图形如图 2.128 所示.

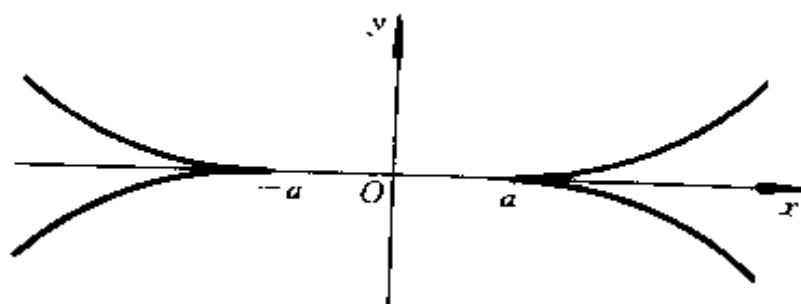


图 2.128

1540. $x = a(\text{sh}t - t), y = a(\text{ch}t - 1) (a > 0)$.

解 当 t 用 $-t$ 换时, x 的大小不变符号相反, 而 y 却不变, 故图形对于 Oy 轴对称.

$$x'_t = a(\text{ch}t - 1), y'_t = a\text{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^4}$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	-	-	下降
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	-	上升

当 $t \rightarrow -0$ 时, $x \rightarrow -0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$;

当 $t \rightarrow +0$ 时, $x \rightarrow +0, \frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty$. 因此在 $(0, 0)$ 点的切

线垂直于 Ox 轴.

图形如图 2.129 所示.

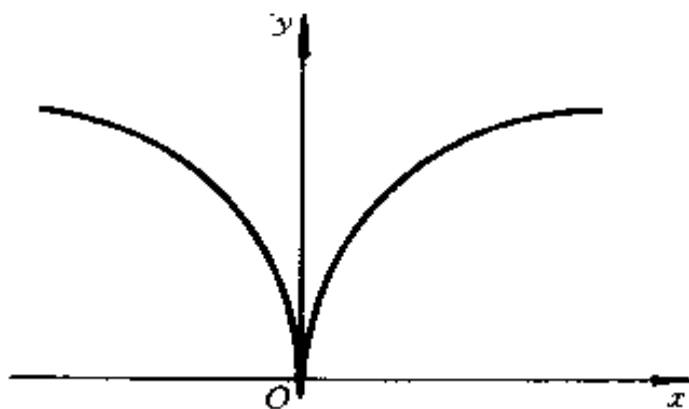


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式,然后作出这些曲线:

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$.

解 设 $y = tx$, 代入方程, 并消去 x^2 , 即得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于无穷的 t 值:

$$t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 及 } \sqrt[3]{2}.$$

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	-	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	-	-	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当 $t = 0$ 时, $x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} = \infty. \text{ 这说明,}$$

坐标原点是曲线的二重点. 曲线的一支与 Ox 轴相切, 一支与 Oy 轴相切.

渐近线: $x + y + a = 0$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2 + 3at}{1 + t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{6at + 3a}{3t^2} \\ = -a.$$

图形如图 2.130 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a \sqrt[3]{4}, a \sqrt[3]{2}),$$

$$B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right),$$

$$C(a \sqrt[3]{2}, a \sqrt[3]{4}).$$

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称, 同时关于直线 $y = x$ 对称.

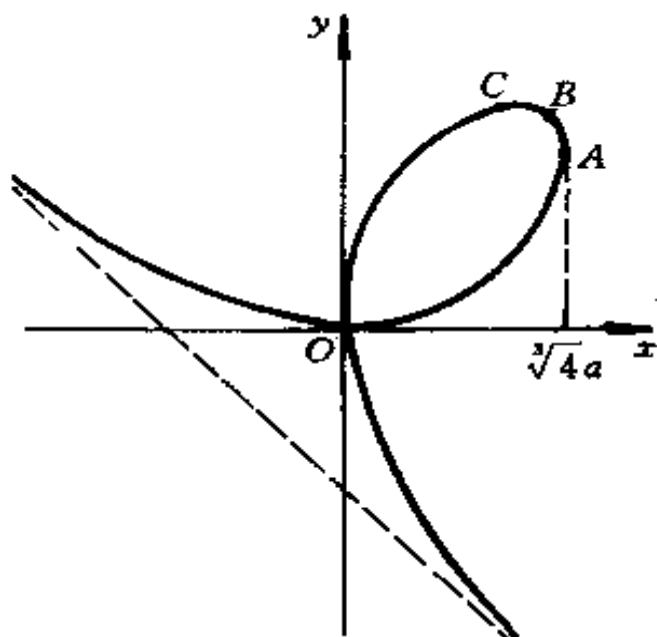


图 2.130

设 $x = ty$, 则当

$y \neq 0$ 时, 得

$$y = \pm \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}.$$

根据对称性, 不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x = t \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}, \\ y = \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

由于 $0 \leq x \leq 1, x \leq y$, 故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y = x$ 之间, 由此根据对称性即可作出全部图形. 当 t 由 0 连续变到 1 时, 曲线上的点 $(0, 1)$ 连续变化到点

(1,1). 由于

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} + \sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}} \cdot \frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}} \cdot \frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = 0, \sqrt{\sqrt{2}-1}$. 相应地, 有 $x = 0$,

$$y = 1; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, y \approx 1.10.$$

经判别知, 当 $x = 0$ 时 y 取得极小值; 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, y 取得极大值. 类似地, 当 $y = 0$ 时, x 取得极小值 $x = 1$; 当 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, x 取得极大值 $x \approx 1.10$.

由对称性即得知: 当 $x = 0$ 时, 有极小值 $|y| = 1$; 当 $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有极大值 $|y| \approx 1.10$; 当 $y = 0$ 时有极小值 $|x| = 1$; 当 $|y| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有极大值 $|x| \approx 1.10$.

值得注意的是, 当 $t = 1$ 时即在点 (1,1) 处, $\frac{dy}{dx} = -1$, 因而曲线在点 (1,1) 光滑联接.

原点 (0,0) 是一个孤立点, 再计算几点的坐标 ($0 \leq t \leq 1$):

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 及 $(0, -1)$, 如图 2.131 所示.

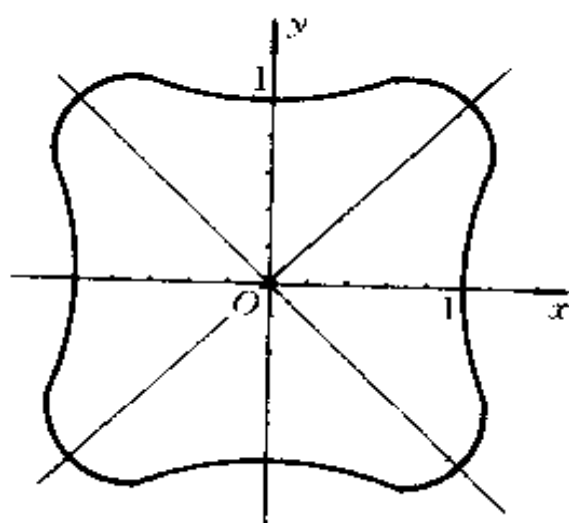


图 2.131

1543. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

解 设 $y = tx$, 代入原方程, 即得

$$x = \frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y = \frac{1-t^3}{t} \quad (t \neq 0).$$

$$x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3}, \quad y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

令 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ , 得

$$t = \dots \sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0.$$

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	-	+	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	-	下降
$(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 上升到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	+	-	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 下降到 $-\infty$	-	下降
$(0, +\infty)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	+	上升

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\sqrt[3]{2}} = \infty, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0,$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

图形通过点 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$, $B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$, 及 $O(0,0)$. 如图 2.132 所示.

1544. $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$.

解 由方程显见直线 $y = x$ 是图形的一部分. 对于 $y \neq x$ 的部分, 图形显然关于直线 $y = x$ 对称.

设 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$, 则 $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$, 即当 $x \neq y$ 时, 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

由条件 $x > 0, y > 0$ 知, t 满足 $-1 < t < +\infty$,

由于

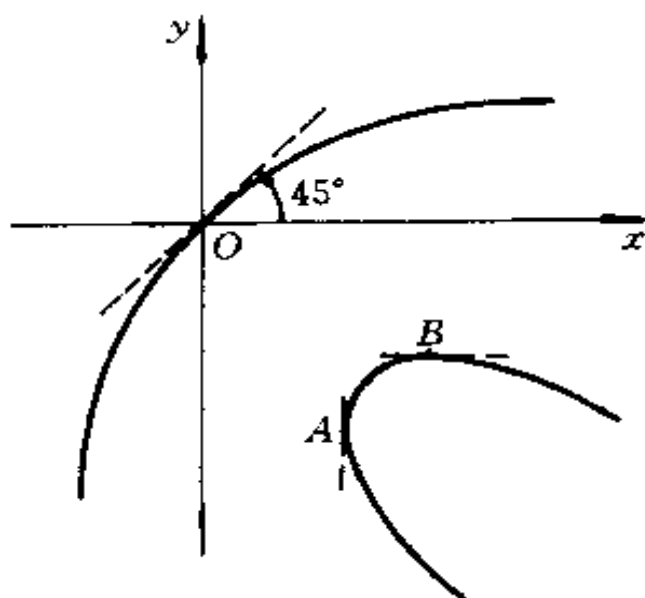


图 2.132

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x = 1$ 和 $y = 1$ 是曲线的渐近线. 又因

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} y = e,$$

故点 (e, e) 是曲线上的二重点. 由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \left[\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \left[\frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} \right],$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 + \frac{t^2}{t - (1+t)\ln(1+t)} \right].$$

容易证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

并且当 $t \in (0, +\infty)$, 从而 $x \in (1, e)$ 时, 恒有 $\frac{dy}{dx} < 0$.

事实上, 设

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t],$$

则 $g(0) = 0$, 并且容易证明

$$g'(t) = 2t - \ln(1+t) > 0,$$

$$(1+t)\ln(1+t) - t > 0.$$

从而, 有

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > 0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} > 1.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 - \frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} \right] < 0.$$

由对称性知, 对于 $t \in (-1, 0)$, 也有 $\frac{dy}{dx} < 0$. 而当 $t \rightarrow 0$ 时, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t \rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

所以, 曲线始终是单调下降的, 并呈凹状, 无极值和拐点. 对应于 t 的变化范围 0 至 1.

计算几点坐标如下:

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t \rightarrow -1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x \rightarrow +\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y \rightarrow 1$

综上所述, 曲线的图形由两部分组成, 一部分是直线, 另一部分是对称于直线 $y = x$ 的曲线(图 2.133).

1545. 作出曲线 $\text{ch}^2 x - \text{ch}^2 y = 1$ 的图形.

解 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的, 故只须在第一象限 $x \geq 0, y \geq 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线:

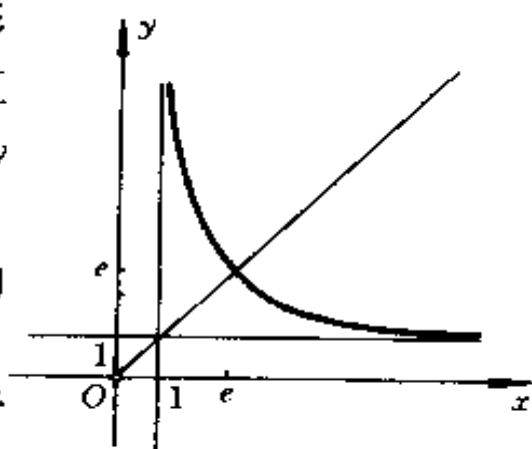


图 2.133

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} \left(\text{ch}x + \frac{\text{sh}x}{\sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} \text{ch}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\text{sh}^2 x + 1}{\text{sh}^2 x - 1}} = 1. \end{aligned}$$

为求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x)$, 令

$$u = y - x = \ln(\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}) - x.$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^u &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}x + \frac{\text{sh}x \text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^2 x - 1}}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}x(\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1})}{e^x \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} = 1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0.$$

因此, 直线 $y = x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y = 0$ 时 $\operatorname{ch}y$ 取最小值 $\operatorname{ch}y = 1$, 所以, x 必须满足

$$\operatorname{ch}^2 x \geq 2 \text{ 或 } |x| \geq \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88,$$

并且当 $y = 0$ 时, $|x| = \ln(1 + \sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y)(\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y) = 1,$$

从而令

$$\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = t,$$

即

$$\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y = \frac{1}{t}.$$

所以, 对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases} \operatorname{ch}x = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \\ \operatorname{ch}y = \frac{\frac{1}{t} - t}{2}, \end{cases} \quad (0 < t \leq \sqrt{2} - 1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x - 2\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y \cdot y' = 0$$

或

$$y' = \frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y} > 0.$$

因而, 曲线是单调上升的.

又由于

$$y'' = \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \cdot y' \cdot \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^3},$$

而

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \\ & \quad + \operatorname{ch}^2 x) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{sh}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) (\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) \\ &= -(\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) < 0. \end{aligned}$$

于是, $y'' < 0$ 恒成立. 所以, 曲线呈凸状.

计算几点的坐标如下:

t	$\sqrt{2} - 1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t \rightarrow 0$
x	$\ln(1 + \sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x \rightarrow +\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y \rightarrow +\infty$

曲线形状如图

2.134 所示. 作出下列用极坐标 (φ, r) ($r \geq 0$) 表示的函数的图形:

1546. $r = a + b \cos \varphi$

$(0 < a \leq b).$

解 当 $a = b$ 时,
 $r = a(1 + \cos \varphi),$
 这就是心脏线, 如

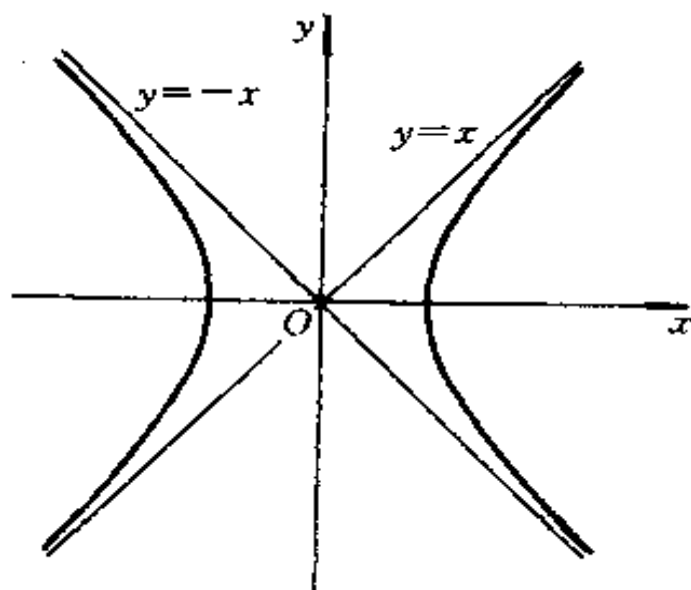


图 2.134

图 2.135 所示.

当 $0 < a < b$ 时, 其几何轨迹叫做蚶线, 由于 $r(-\varphi) = r(\varphi)$, 故图形关于极轴对称. 由于当 $r \geq 0$ 时, $|\varphi| \leq \alpha = \arccos\left[-\frac{a}{b}\right]$, 故当 $\varphi = 0$ 时 r 有极大值 $r = a + b$; 当 $\varphi = \pm\alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r = 0$. 又由于 $r' = -b\sin\varphi < 0$, 故当 φ 由 0 变到 α 时, r 由 $a + b$ 变到 0.

当 $r < 0$ 时, $\alpha < |\varphi| \leq \pi$, 仿照上述讨论, r 由 0 下降到 $a - b$.

极点 O 为二重点, 如图 2.136 所示. 如果不考虑 $r < 0$, 则极点 O 不是二重点.

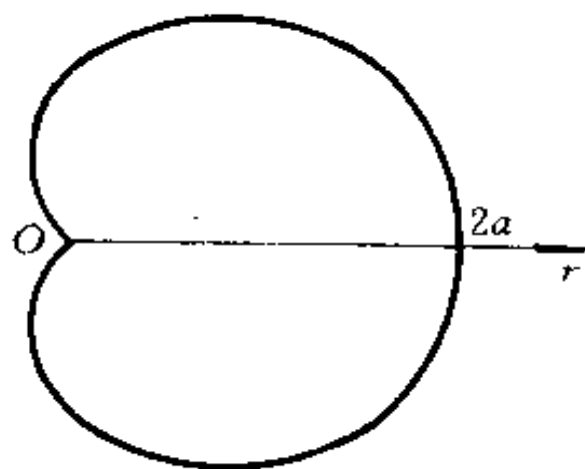


图 2.135

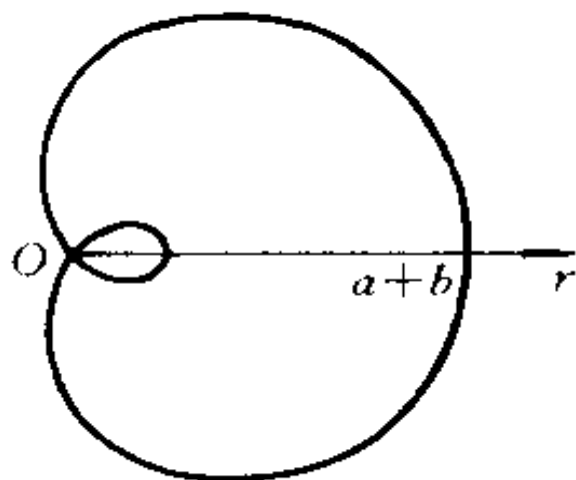


图 2.136

1547. $r = a\sin 3\varphi$ ($a > 0$).

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数.

函数的存在域为:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

为此, 只要讨论 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r' = 3a \cos 3\varphi \begin{cases} > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ < 0, \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r

有极大值 $r = a$; 当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时, r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为图形的三对称轴.

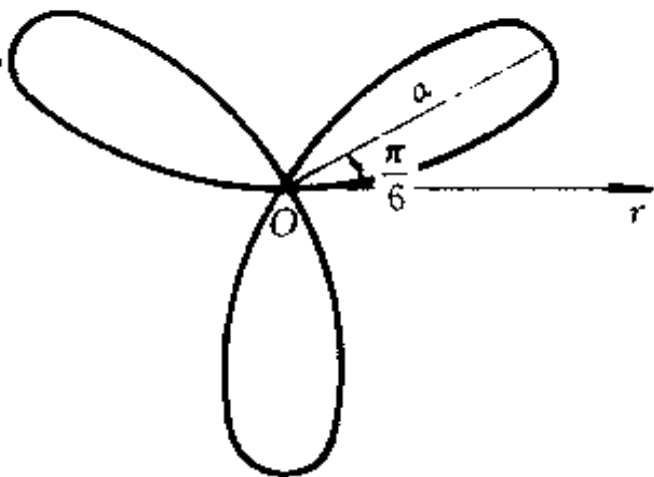


图 2.137

曲线在点 O 自交且为三重点, 整个

图形有三个形状相同的瓣, 如图 2.137 所示.

1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} (a > 0).$

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数. 显然图形关于极轴对称.

函数的存在域为:

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \quad \text{及} \quad \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

为此只要讨论 $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 即可.

$$r' = \frac{3a \sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} < 0, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), \\ > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \end{cases}$$

故当 $\varphi = 0$ 时有极小值 $r = a$. 当 φ 由 0 单调地增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时, r 由 a 单调地增大到 $+\infty$, 在这种意义上, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

为曲线的渐近线. 同样地 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 也为渐近线.

由周期性可知, 当 $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $r = a$. $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$ 均为曲线的渐近线.

最后还要研究在点 $(a, 0)$ 附近的状况. 为此, 只要考虑在该点切线的斜率:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi},$$

再以 $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{3a \sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ 代入上式, 即得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3a \sin 3\varphi \sin \varphi + 2a \cos \varphi \cos 3\varphi}{3a \sin 3\varphi \cos \varphi - 2a \sin \varphi \cos 3\varphi}$$

于是,

$\operatorname{tg} \alpha|_{\varphi=0} = \infty$, 即在 $(a, 0)$ 点曲线的切线垂直于极轴. 如图 2.138 所示.

1549. $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, 其中 $\varphi > 1 (a > 0)$.

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 1} r &= \lim_{\varphi \rightarrow 1} \frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = +\infty, \\ \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r &= \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

从而曲线以 $\varphi = 1$ 为渐近线, 以极点为渐近点. 又

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= a \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}(\varphi - 1) - \operatorname{th} \varphi}{(\varphi - 1)^2} \\ &= a \cdot \frac{(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi}{(\varphi - 1)^2 \operatorname{ch}^2 \varphi}, \end{aligned}$$

当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi < 0$. 事实上, 令

$$y(\varphi) = (\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi,$$

则 $y(1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 < 0$, 而

$$y'(\varphi) = 1 - \operatorname{ch} 2\varphi < 0,$$

故有 $y(\varphi) \leq y(1) < 0$. 这就证明了当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, 即当 φ 增大时 r 单调减小.

为考察当 $r \rightarrow +\infty$ 时曲线的变化趋势, 令

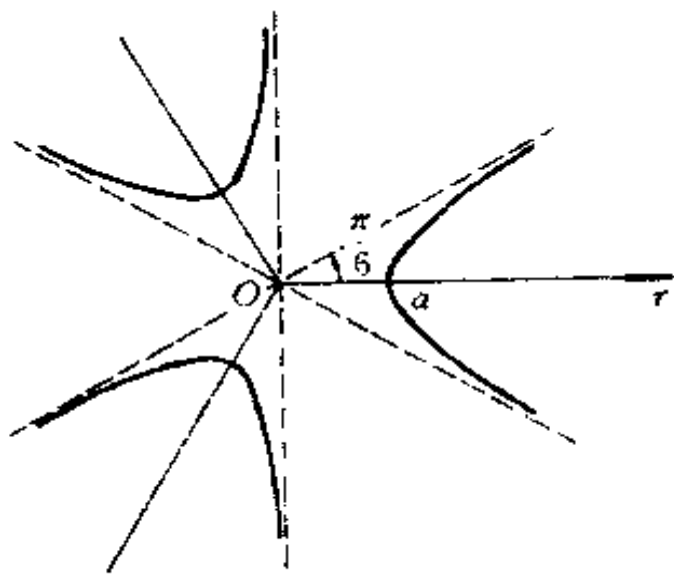


图 2.138

$$y_1 = x \operatorname{tg} l, \quad y_2 = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - x \operatorname{tg} l \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \operatorname{tg} l \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \operatorname{tg} l \\ &= a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} l}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow l} (y_2 - y_1) &= \lim_{\varphi \rightarrow l} a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} l}{\varphi - 1} \\ &= \frac{a \operatorname{th} l}{\cos l}. \end{aligned}$$

于是, 在直角坐标系下, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线 $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$ 以直线

$$y = x \operatorname{tg} l + a \frac{\operatorname{th} l}{\cos l}$$

为渐近线.

计算几点的坐标如下表:

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi \rightarrow +\infty$
r	4.15a	2.20a	1.59a	1.53a	1.17a	0.96a	0.65a	0.46a	0.24a	0.21a	0.18a	0.11a	$r \rightarrow 0$

综上所述知, 曲线是螺状线, 如图 2.139 所示.

1550. $\cos \varphi = \frac{r-1}{r^2}.$

解 由方程容易判定, 曲线关于极轴对称. 因而只需在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 范围内研究图形. 方程可化为

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

由于必有 $1 - 4\cos\varphi \geq 0$, 故角 φ 的最小值应为

$$\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx$$

$75^\circ 30'$,

对应的 $r = 2$. 由 $r > 0$ 知曲线方程为

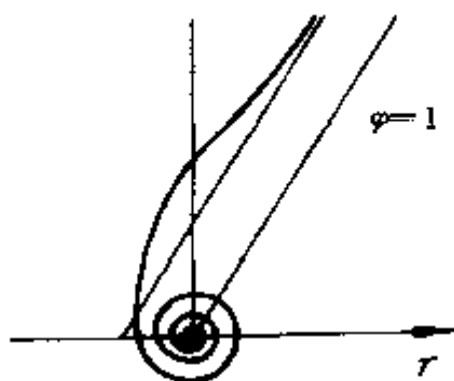


图 2.139

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \left(\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right); \quad (1)$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad (2)$$

首先研究方程(1)所表示的曲线的图形. 因为随着 φ 增加, $2\cos\varphi$ 减小, $\sqrt{1 - 4\cos\varphi}$ 增大, 因而 r 随 φ 增加而单调增加, 事实上, 易证 $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. 又

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = +\infty,$$

所以, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时有渐近线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi =$

$\frac{r-1}{r^2}$, 得

$$x = \frac{r-1}{r},$$

故当 $r \rightarrow +\infty$ 时 $x \rightarrow 1$, 即当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线与直线 $r = \frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近(直角坐标系下 $x = 1$ 为渐近线).

再来研究拐点, 由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr} = \frac{r^2 - 2r(r-1)}{r^4} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{r-2} \sin\varphi,$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\varphi^2} &= \frac{3r^2(r-2) - r^3}{(r-2)^2} \frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^3(2r^3 - 6r^2)}{(r-2)^3} \sin^2\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3} \left[1 - \frac{(r-1)^2}{r^4}\right] + \frac{r^3}{r-2} \cdot \frac{r-1}{r^2} \\ &= \frac{r\{(2r-6)[r^4 - (r-1)^2] + (r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}. \end{aligned}$$

由 $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$ 得 $2r^4 - 3r^2 + 8r - 6 =$

0, 经判别知: 拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = 1,$$

事实上, 由 $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$ 也可得: 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $r = 1$. 因

而点 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 是曲线上的点. 又

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{1}{(2\cos\varphi)^2} \left[(1 - 4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} (-2\sin\varphi) \right. \\ &\quad \left. \cdot (2\cos\varphi) + 2\sin\varphi(1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sin\varphi\{(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi}-2\cos\varphi\}}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}} \\
&= \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}. \quad (1)
\end{aligned}$$

容易证明： $f(\varphi) = \sqrt{1-4\cos\varphi} - (1-2\cos\varphi) < 0$. 事实上，有

$$f'(\varphi) = 2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}} - 1\right) < 0 \quad \text{且} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

又因当 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，(1) 的其它因子均为正，故得 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ ，即 r 随 φ 的增加而单调下降，并且当 $\varphi = \pi$ 时达到极小值

$$r = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

事实上， $\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi = \pi$ 从负变到正。

计算几点的坐标列表如下：

φ	$75^\circ 30'$	$76^\circ 5'$	$77^\circ 10'$	81°	84°	87°	$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r \rightarrow +\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示。

作出下列曲线族的图表(a 表参变量)：

1551. $y = x^2 - 2x + a$.

解 将方程变形：

$$y - (a - 1) = (x - 1)^2.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线.

当 $a > 1$ 时, 抛物线的顶点位于第一象限; 当 $a < 1$ 时, 抛物线的顶点位于第四象限; 当 $a = 1$ 时, 抛物线的顶点在 $(1, 0)$. 不论 a 为何值, 此抛物线族的顶点位于直线 $x = 1$ 上. 如图 2.141 所示.

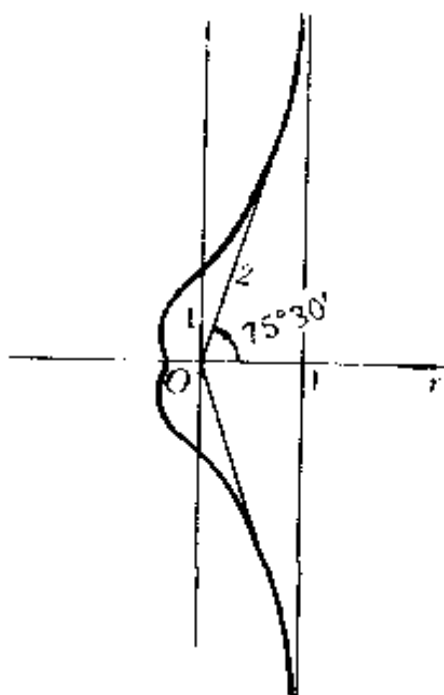


图 2.140

1552. $y = x + \frac{a^2}{x}$.

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族, 其图形可由

$y = x$ 和 $y = \frac{a^2}{x}$ 相加而成, 它们均以直线 $y = x$ 和 $x = 0$ 为渐近线.

当 $x = |a|$ 时, 有极小值 $y = 2|a|$; 当 $x = -|a|$ ($a \neq 0$) 时有极大值 $y = -2|a|$. 如图 2.142 所示.

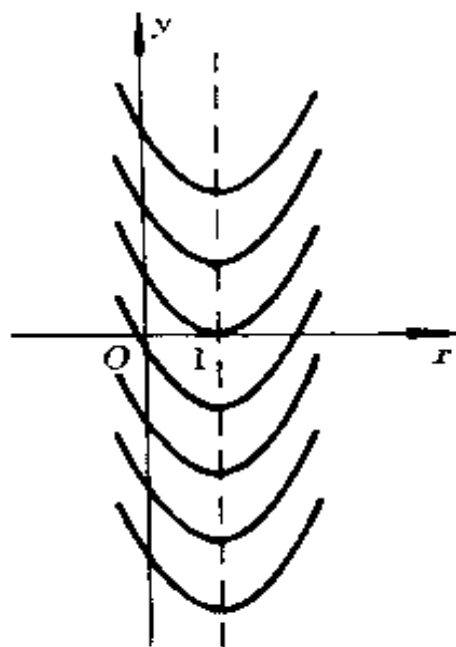


图 2.141

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y - x = \pm \sqrt{a(1-x^2)}$, 即 $(y-x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -x + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2 + a\xi_2^2 = a.$$

当 $0 < a < +\infty$

时为椭圆族; 当 $-\infty$

$< a < 0$ 时为双曲线

族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.

全族曲线均通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$.

$$y' = 1 \mp \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x^2 = \frac{1}{1+a},$$

则 $1+a > 0$ 或 $a > -1$.

$$y'' = \mp \frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $y \geq x$ 时上式取负号; 当 $y \leq x$ 时上式取正号.

于是, 当 $y \geq x$ 时, 有

$$(1) \text{ 若 } a > 0, \text{ 则当 } x = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \text{ 时, 由于 } y'' < 0,$$

故取得极大值 $y = \sqrt{1+a}$.

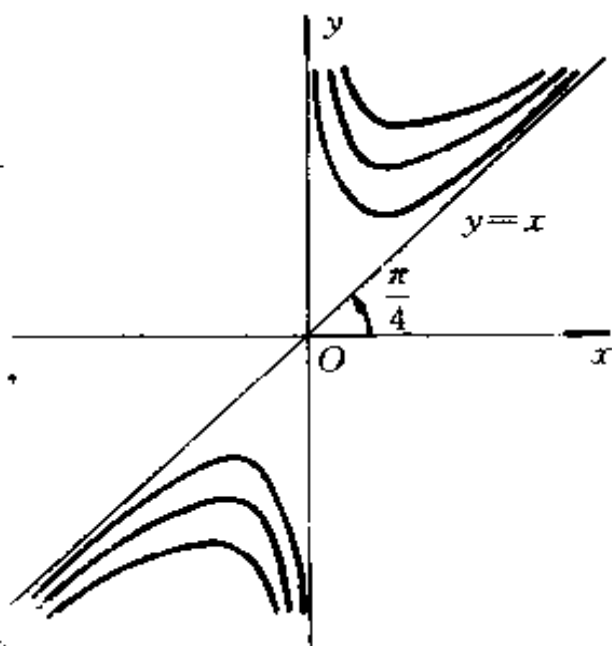


图 2.142

若 $-1 < a < 0$, 则当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极

大值 $y = -\sqrt{1+a}$.

当 $x = \mp 1$ 时取得边界极小值 $y = \mp 1 (a \neq 0)$.

(2) 由于 $y'' < 0$, 故曲线是凸的.

当 $y \leq x$ 时, 有

(1) 若 $a > 0$, 当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y = -\sqrt{1+a}.$$

若 $-1 < a < 0$, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y = \sqrt{1+a}.$$

当 $x = \mp 1$ 时取得边界极大值 $y = \mp 1$.

(2) 由于 $y'' > 0$, 故曲线是凹的.

此外, 当 $a < 0$ 时, 曲线有渐近线, 容易求得它们为 $y = (1 \pm \sqrt{-a})x$.

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉, 故图略.

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$.

解 原方程可变形为

$$y - \frac{x}{2} = e^{-ax}.$$

因此, 若作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{x}{2} + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax}2.$$

当 $a \neq 0$ 时, 表示一指数曲线族; 当 $a = 0$ 时, 表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$.

全族曲线均通过点 $(0, 1)$.

$$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}. \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = \frac{1}{a} \ln 2a.$$

$y'' = a^2 e^{-ax} > 0$, 故曲线呈凹状.

若 $a > 0$, 则当 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a} (1 + \ln 2a);$$

若 $a \leq 0$, 则因 $y' > 0$, 故函数 y 是增大的.

现求渐近线: 当 $a > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0,$$

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

同法求得当 $a < 0$ 时, 渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$, 然此时应考虑 $x \rightarrow -\infty$.

如图 2.143 所示.

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 全族曲线均通过原点.

$$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a} \right). \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x = a.$$

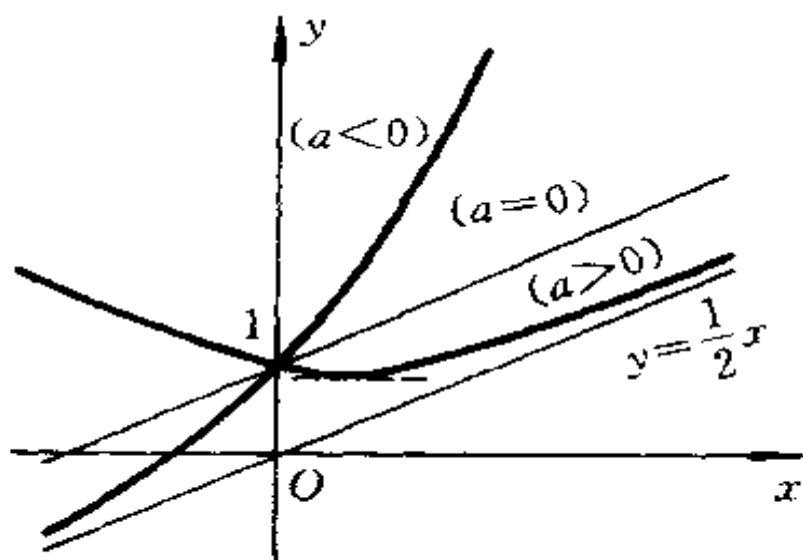


图 2.143

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a} \right). \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得}$$

$$x = 2a.$$

经判别知:若 $a > 0$, 当 $x = a$ 时有极大值 $y = ae^{-1} \approx 0.37a$; 若 $a < 0$, 当 $x = a$ 时有极小值 $y = ae^{-1}$. 拐点 $x = 2a, y = 2ae^{-2} \approx 0.27a$.

容易求得:渐近线为 $y = 0$. 与 1554 题类似, 当 $a > 0$ 时应考虑 $x \rightarrow +\infty$; 当 $a < 0$ 时应考虑 $x \rightarrow -\infty$.

又曲线族与直线 $y = x$ 在原点相切, 如图 2.144 所示.

§ 13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明:若函数 $f(x)$ 不为负, 则函数

$$F(x) = Cf^2(x) (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

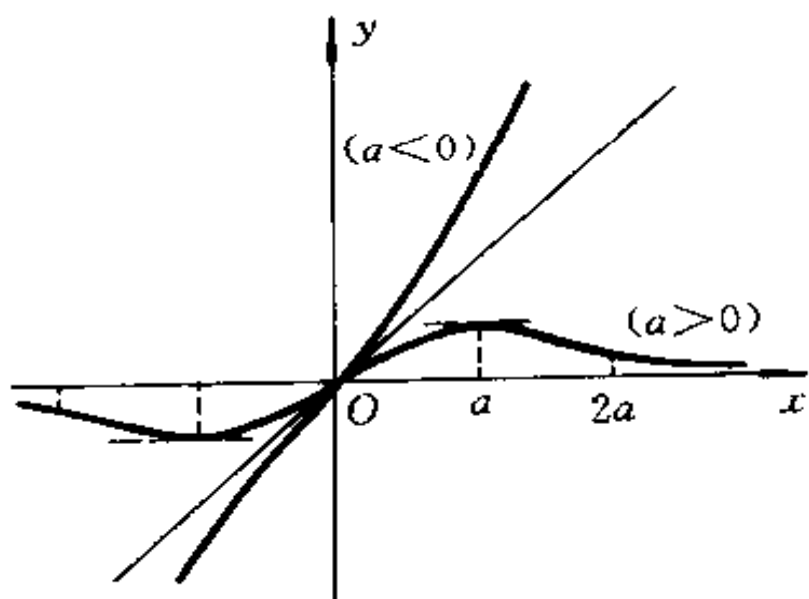


图 2.144

证 如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) > F(x) \quad (x \neq x_0) \quad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$. 根据 $C > 0$, 以及 $f(x)$ 不为负, 必有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近, 且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点. 反之, 若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 附近, 有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0).$$

于是,

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即 $(*)$ 式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理, 若 x_0 为极小值点时, 也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

1557. 证明: 若当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调增加,

则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点, 例如是极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0). \quad (1)$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为单调增加的, 故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \quad (x \neq x_0). \quad (2)$$

这就证明了 x_0 点也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对, 因为由 (2), 从 $\varphi(x)$ 的单调增加性质知必有 (1). 另一种情形, 即设 x_0 点是极小值点时, 也可类似获证. 于是, 原命题得证.

1558. 二正数的和等于常数 a , 求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 相乘积的极大值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们须求函数

$f(x) = x^m(a-x)^n$ ($0 < x < a$) 的极大值. 由于

$f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x]$, 故若令

$f'(x) = 0$, 即得 $x = \frac{ma}{m+n}$. 当 $0 < x < \frac{ma}{m+n}$ 时,

$f'(x) > 0$; 当 $a > x > \frac{ma}{m+n}$ 时 $f'(x) < 0$. 因此, 当

$x = \frac{ma}{m+n}$ 时, $f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数 a , 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之和的极小值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们须求函数

$$f(x) = x^m + \left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0 < x < +\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x) = \frac{mx^{m+n} - na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然, 在此点的左边, $f'(x) < 0$, 而在此点的右边, 有 $f'(x) > 0$, 故知当 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}\right] = (m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数, 它本身和它的对数相等?

解 解法一:

设所求之数为 a , 则对于 $0 < a < 1, 1 < a < +\infty$ 及 $x > 0$ 时

$$\log_a x = x$$

或

$$a^x = x. \quad (1)$$

问题即为 a 取怎样的数, 上式才成立.

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况. 我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases} y = a^x, \\ y = x. \end{cases} \quad (2)$$

在交点处,方程(1)与(2)等价(图 2.145)

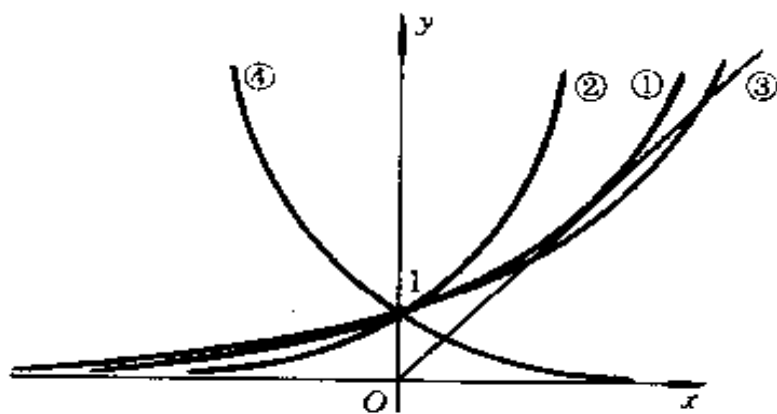


图 2.145

注意,指数曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 是否有公共点,就看其差

$$\Delta = f(x) = a^x - x$$

有无使 $\Delta = f(x) = 0$ 的点 x .

设 $y = a_0^x$ 与 $y = x$ 相切于一点 $(x_0, a_0^{x_0})$, 此时 $f'(x_0) = 0$,

即有

$$a_0^{x_0} \ln a_0 - 1 = 0. \quad (3)$$

从 $\Delta = 0$ 知有(1),即

$$a_0^{x_0} - x_0 = 0. \quad (4)$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0 = e^{\frac{1}{x_0}}, x_0 = e. \quad (5)$$

当 $a > a_0$ 时,易见 $y = a^x$ 比 $y = a_0^x$ 远离直线 $y = x$. 故此时无交点. 实际上,注意到有 $a_0^x \geq x$, 并记 $g(a, x) = a^x$, 对于 $x \geq 0$, 只要 $a > a_0$ 就有 $a^x > a_0^x \geq x$, 也即 $g(a_0, x)$ 是 $g(a, x)$ 的极小值. 故当 $a > a_0$ 时, $y = a$ 与 $y =$

x 无交点. 而当 $0 < a \leq a_0$ 时(且要求 $a \neq 1$), 此时(2) 有解, 从而(1) 有解. 如图 2.145 中曲线 ①、②、③、④ 所示.

解法二:

设 $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$, 则由 $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得 $x = e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负, 故知 $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 为极大值. 从而 $0 < x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$.

因此, 当 $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a \neq 1$ 时, 有 $\log_a x = x$.

1561. 从面积为 S 的一切矩形中, 求其周界为最小者.

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $\frac{S}{x}$, 周界长为

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{S}{x} \right),$$

按题设, 我们须求其最小值.

由于 $f'(x) = 2 \left(1 - \frac{S}{x^2} \right)$, 故令 $f'(x) = 0$, 即得 $x = \sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S}) > 0$ 知此时 $f(x)$ 有极小值. 又由于极值的唯一性, 故此也为最小值. 因此, 所求的矩形为以 \sqrt{S} 为边的正方形.

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求有最大面积的直角三角形.

解 设一直角边为 x , 则按题设, 另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$, 故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - 2ax}.$$

利用极值的解法得: 当 $x = \frac{a}{3}$ 时, $S(x)$ 值为极大值. 又

由于极值的唯一性,故知当 $x = \frac{a}{3}$ 时, $S(x)$ 取最大值.

此时斜边为 $a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$, 它为直角边的两倍,故此三角形的两锐角分别为 30° 及 60° .

本题也可用 1556 题结论求得结果.事实上,令 $F(x) = 4S^2(x)$, 则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点,对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果.

1563. 当有怎样的长度大小时,容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积?

解 设底半径为 x , 则高为 $H = \frac{V}{\pi x^2}$, 故圆柱的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2.$$

由于,

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$ 知, 当 $x =$

$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, $S(x)$ 有极小值

$$s\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值,故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 而高为 $\frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos \varphi$$

$$BC = \sin \alpha,$$

$$BA = \cos \alpha - \cos \varphi.$$

从而矩形面积为

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= 2BC \cdot BA \\ &= 2\sin \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi) \\ &= \sin 2\alpha - 2\sin \alpha \cos \varphi. \end{aligned}$$

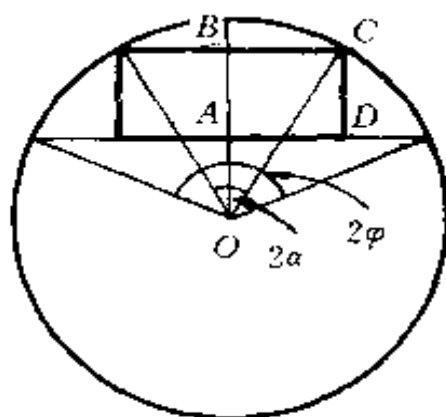


图 2.146

而

$$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos \alpha \cos \varphi = 4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cdot \cos \varphi - 2, \text{ 令 } S'(\alpha) = 0, \text{ 可得}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $\cos \varphi \leq \cos \alpha$, 于是有

$$\begin{aligned} S''(\alpha) &= -4\sin 2\alpha + 2\cos \varphi \sin \alpha \leq -4\sin 2\alpha \\ &\quad + 2\cos \alpha \sin \alpha = -3\sin 2\alpha < 0. \end{aligned}$$

这就说明

$$\alpha = \arccos \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点, 也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中, 嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形.

解 如图 2.147 所示.

由于点 $M(x, y)$ 在椭圆上, 故适合方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ 解之,}$$

$$\text{得 } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是按题设, 求函数

$$f(x) = 4x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

当 x 为何值时最大, 记 $C = \frac{a^2}{16b^2}$, 利用 1556 题的结果,

$f(x)$ 与 $F(x) = Cf^2(x) = x^2(a^2 - x^2)$ 有相同的极值,

但 $F'(x) = 4x\left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)$, 令 $F'(x) = 0$, 则 $x = 0$ (不

合), $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 当 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, 有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -4a^2 <$

0, 故 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2ab$ 为最大面积. 此时矩形的边为 a

$\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$.

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中, 嵌入有最大周长的矩形, 研究此问题有解的可能性.

解 如图 2.148 所示.

$AB = b, CD = h$. 由于 $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$, 故 $x = \frac{b}{h}(h-y)$.

矩形的周长为

$$p = 2\left[y + \frac{b}{h}(h-y)\right] = 2\left[\left(1 - \frac{b}{h}\right)y + b\right].$$

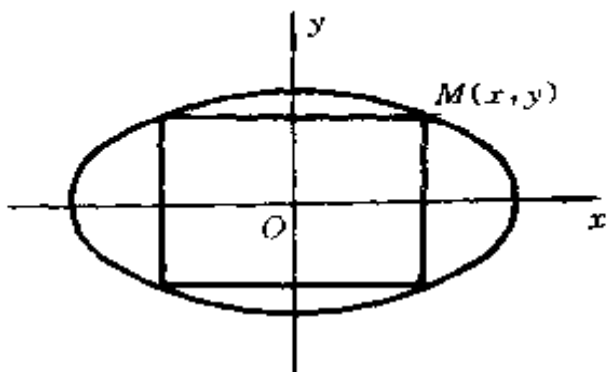


图 2.147

显见,当 $h = b$ 时,周长 $p = 2b$ 为一定值;当 $h > b$ 时, $p'_y > 0$, p 单调增加,故当 $y = h$ 时有边界的极大值 $p = 2h$;当 $h < b$ 时, $p'_y < 0$, p 单调减少,理论上当 $y = 0$ 时有边界的极大值

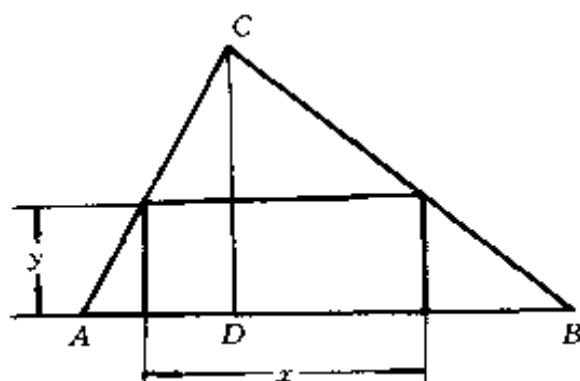


图 2.148

$2b$. 但嵌入的矩形不允许边长为 0, 故当 $h < b$ 时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的, 即此时问题无解.

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁, 此矩形的底等于 b , 高等于 h . 若梁的强度与 bh^2 成比例, 问梁的尺寸为如何时, 其强度最大?

解 由于 $b^2 + h^2 = d^2$, 故 $h^2 = d^2 - b^2$, 从而考虑函数

$$f(b) = b(d^2 - b^2)$$

何时取最大值.

$$\text{由于 } f'(b) = d^2 - 3b^2, \text{ 令 } f'(b) = 0 \text{ 得 } b = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

此时 $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f''(b) = -6b < 0$, $f(b)$ 的值最大. 因

此, 所求的矩形的底为 $\frac{d}{\sqrt{3}}$, 高为 $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1568. 于半径为 R 的半球中, 嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体.

解 设底边之一半为 x , 则按题设, 有

$$2x^2 + y^2 = R^2,$$

其中 y 为平行六面体高之一半。解之，得 $y = \sqrt{R^2 - 2x^2}$ ，由题意求函数

$$f(x) = 4x^2y = 4x^2 \sqrt{R^2 - 2x^2}.$$

何时取最大值。

$$f'(x) = \frac{8x(R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - 2x^2}}, \text{ 令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x =$$

$$\frac{R}{\sqrt{3}}, \text{ 此时 } y = \frac{R}{\sqrt{3}}. \text{ 经判别可知, } f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) \text{ 值为最大.}$$

因此，所求的直角平行六面体之底、宽、高分别为

$$\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \text{ 而最大体积为}$$

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4R^3}{3\sqrt{3}}.$$

1569. 于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱。

解 设圆柱的底半径为 r ，高为 $2h$ ，则有

$$r^2 + h^2 = R^2,$$

即 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$ 。按题设，求函数

$$f(r) = 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

何时最大。

$$f'(r) = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \text{ 令 } f'(r) = 0 \text{ 得 } r = \sqrt{\frac{2}{3}}R,$$

此时 $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ ，且

$$f(r) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知此值即为柱体体积的最大值。

1570. 于半径为 R 的球内嵌入有最大表面积的圆柱。

解 如图 2.149, 圆柱的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi) \cdot (R\sin\varphi) \\ &= \pi R^2(1 + \cos 2\varphi) + 2\pi R^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

由 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$ 得 $\operatorname{tg} 2\varphi = 2$. 记其解为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} 2, \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ 于是}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \text{ 又}$$

由于

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} &= -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi \\ &\quad + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0} \\ &= -4\pi R^2 \left[2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0 \right] \\ &= -10\pi R^2 \sin 2\varphi_0 < 0, \end{aligned}$$

故此时表面积最大, 且最大表面积为

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \pi R^2 (1 + \sqrt{5}) \\ &\approx 0.81 \times 4\pi R^2. \end{aligned}$$

从而, 球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的 81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径为 x , 高为 h , 球的半径为 R ,

则可求得 $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}$, 于是, 外切圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2} = \frac{2}{3} \pi R \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} (x > 0).$$

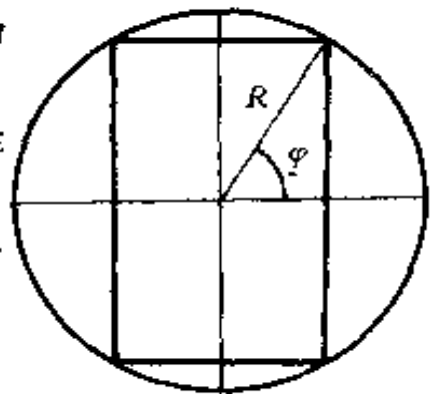


图 2.149

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

$\frac{R-r}{R}rH$, 其中 $H = R \operatorname{ctg} \alpha$ 是已知常数, 于是,

$$S = f(r) = 2\pi \left[r^2 + rH \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right] (0 \leq r \leq R),$$

$$f'(r) = 2\pi \left(2r + H - \frac{2r}{R}H \right).$$

令 $f'(r) = 0$, 得 $r =$

$\frac{HR}{2(H-R)}$, 此值应在 0 与

R 之间, 即 $H > R$ 与 $\frac{R}{H} =$

$\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}$. 经判别可知, 此

时 $f(r)$ 为最大, 因此, 所

求的圆柱当 $\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}$ 及 r

$= \frac{R}{2(1 - \operatorname{tg} \alpha)}$ 时达到最

大值.

当 $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2}$ 即 $H \leq 2R$ 时, 由于 $f'(r) = \frac{2\pi}{R} [(2R - H)r + H(R - r)]$ 大于零, 因此, 当 $r = R$ 时, 达到边界的极大值, 但是, 当 $r = R$ 时, 显然有 $h = 0$, 于是得到的解可以考虑作为一个扁平的圆柱, 它的两底都与已知圆锥的底重合, 而全表面积为 $2\pi R^2$.

1574. 求从点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离.

解 按题设, 只须考虑函数

$$\begin{aligned} f(y) &= (x - p)^2 + (y - p)^2 = x^2 + 2p^2 - 2py \\ &= \frac{y^4}{4p^2} + 2p^2 - 2py \end{aligned}$$

的极值.

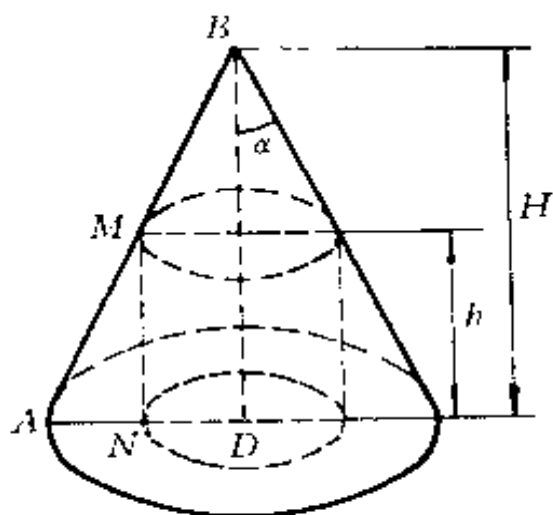


图 2.150

由于 $f'(y) = \frac{y^3 - 2p^3}{p^2}$. 令 $f'(y) = 0$ 得 $y = \sqrt[3]{2}$
 $\cdot p$, 此时 $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} p$. 经判别可知, $f(\sqrt[3]{2} p)$ 为最小.
 因此, 所求的最短距离为

$$\begin{aligned} \sqrt{f(\sqrt[3]{2})} &= p \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - 1\right)^2 + (\sqrt[3]{2} - 1)^2} \\ &= p(\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{4} - 2}{2(\sqrt[3]{2} - 1)}\right]^2 + 1} \\ &= p(\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2} + 2}{2}}. \end{aligned}$$

1575. 求从点 $A(2, 0)$ 到圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的最短与最长距离.

解 显见, 最短距离为 1, 最长距离为 3, 事实上, 用微分法也可解之, 只须求函数

$$(x - 2)^2 + y^2 = 5 - 4x = f(x)$$

的极值.

由于 $f'(x) = -4 < 0$, 故 $f(x)$ 单调下降, 因此, 当 $x = -1$ 时, 有最大值 $\sqrt{f(-1)} = 3$; 而当 $x = 1$ 时有最小值 $\sqrt{f(1)} = 1$.

1576. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) 的经过顶点 $(0, -b)$ 的最大弦.

解 按题设, 我们须求函数

$$\begin{aligned} x^2 + (y + b)^2 &= x^2 + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right) + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 + 2by + (a^2 + b^2) = f(y) \end{aligned}$$

的最大值. 为此, 先求得 $f'(y) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b$. 令 $f'(y) = 0$, 得 $y = \frac{b^3}{a^2 - b^2} = \frac{b^3}{c^2}$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$), 此时

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^6}{c^4} = a^2 \left(1 - \frac{b^4}{c^4}\right),$$

或

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{a}{c^2} \sqrt{c^4 - b^4} \\ &= \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2} \left(b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

经判别可知此时为最大值, 其值为

$$\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{b^4}{c^4}\right) + \left(\frac{b^3}{c^2} + b\right)^2} = \frac{a^2}{c}.$$

此即最大弦长. 弦的一端点为 $(0, -b)$, 另一端点为 $\left(\pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2} \cdot \frac{b^3}{c^2}\right)$, 但必须 $b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $\sqrt{a^2 - 2b^2}$ 才有意义.

若 $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$, 则由于

$$\begin{aligned} f'(y) &= 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b > 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot (-b) \\ &\quad + 2b = \frac{2a^2}{b} > 0, \end{aligned}$$

故当 $y = b, x = 0$ 时, 取得弦长的边界最大值. 此时最大弦长为 $2b$.

1577. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 引切线, 此切线与坐标轴构成一个三角形, 使此三角形的面积为最小.

解 切线斜率为 $k = -\frac{b^2x}{a^2y}$, 于是切线方程为

$$Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x).$$

不失一般性, 可设点 M 在第一象限. 它在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}$ 和 $\frac{b^2}{y}$. 因此, 所求三角形的面积为

$$\frac{a^2b^2}{2xy} = \frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

按题设, 我们考虑函数

$$f(x) = x^2(a^2 - x^2)$$

的最大值. 为此, 先求得

$$f'(x) = 2a^2x - 4x^3.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, 此时, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. 经判别可

知 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为最大值. 因此, 所求的点 M 为

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, 三角形面积的最小值为 ab .

1578. 一物体为直圆柱形, 其上端为半球形. 若此物体的体积等于 V , 问这物体的尺寸如何, 才有最小表面积?

解 设 r 为圆柱的底半径, h 为圆柱的高, 则按题设, 我们有

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \text{ 或 } h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x) = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r \right) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

$$S'(r) = \frac{10}{3}\pi r - \frac{2V}{r^2}, \text{ 令 } S'(r) = 0, \text{ 得}$$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, 此时 $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知 $S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值. 因此, 当 $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小.

1579. 露天水沟的横断面为等腰梯形. 若沟中流水的横断面等于 S , 水面的高等于 h , 问水沟侧边的倾角 φ 如何, 才使横断面被水浸湿的周长为最小?

解 浸湿周长 $l = a + 2hcsc\varphi$, 其中 a 为底边长, 而截面积

$$S = \frac{1}{2}(2a + 2hctg\varphi)h = ah + h^2ctg\varphi.$$

于是,

$$l = 2hcsc\varphi + \frac{S}{h} - hctg\varphi.$$

由 $\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{2hc\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{h}{\sin^2\varphi} = 0$, 得 $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, 所以, $\varphi = 60^\circ$.

因为

$$\left. \frac{d^2l}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=60^\circ} = \frac{2hs\sin^3\varphi - h\sin 2\varphi(1 - 2\cos\varphi)}{\sin^4\varphi} \Big|_{\varphi=60^\circ} > 0,$$

所以, 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 横断面被水浸湿周长为最小.

1580. 设闭曲线所包围的面积为 S 及一圆周也包围同一的面积 S , 则闭曲线的长与圆周长之比为该曲线的“弯曲性”.

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) 的底边 $AD = 2a$ 及锐角 $BAD = \alpha$, 问等腰梯形的形状如何, 才有最小的弯曲性?

解 设腰 $AB = CD = b$, 则梯形的周长为

$$l = 4a + 2b(1 - \cos\alpha),$$

梯形的面积为

$$S = (2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha.$$

令 $S = \pi R^2$ 得

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha},$$

相应的圆周长为

$$L = 2\pi R = 2 \sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha}.$$

令弯曲性为 K , 则

$$K = \frac{l}{L} = \frac{2a + b(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha}}.$$

由 $\frac{dK}{db} = 0$, 得 $b = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$. 可以验证, 当 $AB = CD = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 时, 具有最小的弯曲性, 此时, 梯形恰好外切于某圆.

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形, 才能使余下的部分, 可卷成一漏斗, 其容积为最大?

解 设余下部分的中心角为 x , 则漏斗(呈圆锥状)底的周长为 Rx , 底半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$ (R 为原圆的半径), 其高 h

$$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}, \text{ 其容积为}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

按题设, 我们只须考虑当 x 为何值时, 函数

$$f(x) = x^2(4\pi^2 - x^2)$$

的值最大. 为此, 先求得

$$f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5.$$

令 $f'(x) = 0$, 要注意不允许 $x = 0$, 得 $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 经

判别可知 $f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此, 所割去的扇形的中

心角应为 $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

1582. 从南至北的铁路经过 B 城, 某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a 千米, 距北面之 B 城 b 千米.

为了从 A 到 B 运输货物最经济, 从工厂建设一条侧轨, 若每吨货物沿侧轨运输的价格是每一千米 p 卢布, 而沿

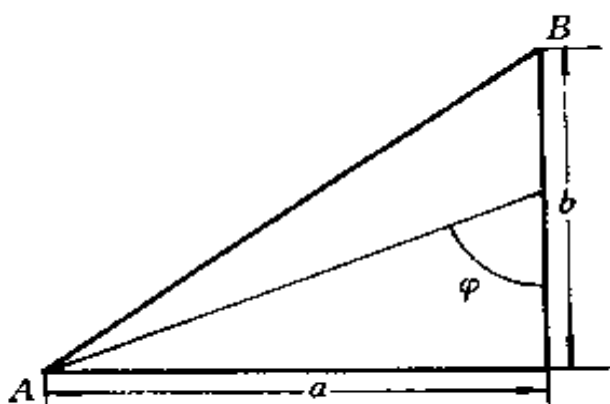


图 2.151

铁路为一千米 q 卢布 ($p > q$), 则侧轨应向铁路取怎样的角度 φ ?

解 所需运费为

$$M = (b - a \operatorname{ctg} \varphi)q + \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} p = qb - aq \operatorname{ctg} \varphi + p a \operatorname{csc} \varphi.$$

由 $\frac{dM}{d\varphi} = \frac{aq}{\sin^2 \varphi} - \frac{ap \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0$, 得 $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$. 又

$$\left. \frac{d^2 M}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = ap \frac{1}{\sin^3 \varphi_0} > 0,$$

故当 $\arccos \frac{q}{p} \geq \arccos \frac{a}{b}$ 时, $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$, 相应运

费最省;当 $\arccos \frac{q}{p} < \arctg \frac{a}{b}$ 时, $\varphi_0 = \arctg \frac{a}{b}$ 运费最省(图 2.151).

1583. 两船各以一定的速度 u 和 v 沿直线前进,两者前进方向所成的角为 θ . 若于某时刻它们与其路线交点之距离分别为 a 和 b , 求二船的最小距离.

解 设两船与路线交点的距离分别为 a, b 时的时刻 $t_0 = 0$, 则时刻为 t 时两船的距离 s 适合下式:

$$s^2 = (a + ut)^2 + (b - vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta,$$

由 $2s \frac{ds}{dt} = 2(a + ut)u + 2(b - vt)v - 2(bu + 2uvt + av)\cos\theta = 0$, 解得

$$t_1 = -\frac{au + bv - (av + bu)\cos\theta}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.$$

于是, 相应地有

$$\begin{aligned} s^2 &= (a^2 - b^2 - 2abc\cos\theta) + 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]t_1 + (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)t_1^2 \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta} \{ (a^2 + b^2 - 2abc\cos\theta) \\ &\quad (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) - 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 + [(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 \} \\ &= \frac{[(av - bu)\sin\theta]^2}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}. \end{aligned}$$

经检验可知, 此时 s 最小:

$$s = \frac{|av - bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

又两船的最小距离也可在 $t_0 = 0$ 之前达到. 类似地, 可

$$\text{求得最小距离为 } s = \frac{|av + bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}.$$

总之, 两船间的最小距离为

$$s = \frac{|av \mp bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}.$$

1584. 在 A 与 B 二点处各有一光源, 其强度分别为 S_1 枝烛光与 S_2 枝烛光. 在线段 $AB = a$ 上求出最小照明的点 M .

解 设 $AM = x$, 则照度

$$I = \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{(a-x)^2}.$$

$$\text{由 } \frac{dI}{dx} = -\frac{2S_1}{x^3} + \frac{2S_2}{(a-x)^3} = 0 \text{ 得}$$

$$S_2 x^3 = S_1 (a-x)^3.$$

解之, 得

$$x = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1}.$$

经检验此时照度最小.

1585. 发光点位于半径为 R 与 r ($R > r$) 的二互不相交之球的连心线上, 并在此二球的外面, 此发光点的位置如何, 才可使二球表面上照明部分之和为最大?

解 设发光点离大球中心之距离为 x , 两球中心之距离为 a , 则按球冠面积公式推知照明部分面积之和为

$$S = 2\pi R \left(R - \frac{R^2}{x} \right) + 2\pi r \left(r - \frac{r^2}{a-x} \right),$$

式中 x 应满足 $R < x \leq a - r$. 由

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{x^2} - 2\pi r^3 \cdot \frac{1}{(a-x)^2} = 0$$

得

$$x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

又由 $x \leq a - r$ 可得

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} a \leq a - r,$$

即

$$a \geq r + R \sqrt{\frac{R}{r}},$$

经检验此时照明面积最大.

当 $R + r < a < r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$ 时, 显然有 $x = a - r$,

经检验此时照明面积也为最大.

1586. 设圆桌面的半径为 a , 应当在圆桌面中央上面怎样高的地方安置电灯, 才可使其桌子边沿上的照度为最大?

解 如图 2.152 所示. 由物理学知, 照度 I 为

$$\begin{aligned} I &= k \frac{\sin \varphi}{r^2} \\ &= k \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3} \quad (k \text{ 为常} \end{aligned}$$

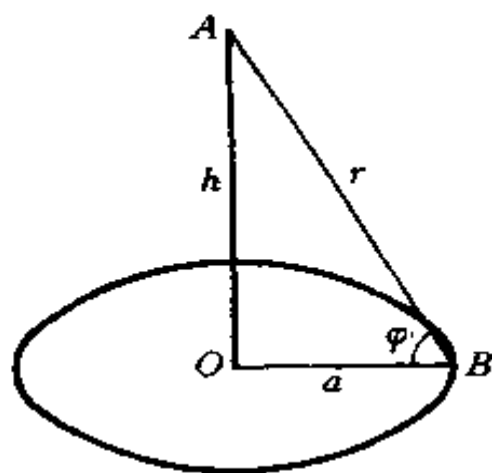


图 2.152

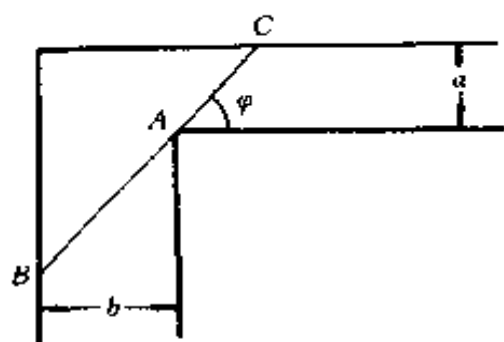
数). 考虑函数

$$f(r) = \frac{r^2 - a^2}{r^3} = \frac{1}{r^4} - \frac{a^2}{r^3} \text{ 何时最大. } f'(r) = -\frac{4}{r^5} +$$

$\frac{6a^2}{r^2} = \frac{6a^2 - 4r^2}{r^2}$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判别可

知 $f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此, 我们应在高 $h = \sqrt{\frac{3}{2}a^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯, 才可使桌子边沿上的照度为最大.

1587. 向宽为 a 米的河修建一宽为 b 米的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?



解 如图 2.153 所示, BC 的长度

$$l = a \csc \varphi + b \sec \varphi.$$

图 2.153

$$l' = \frac{b \sin^3 \varphi - a \cos^3 \varphi}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi},$$

令 $l' = 0$ 得 $\operatorname{tg} \varphi_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 或 $\operatorname{ctg} \varphi_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, 从而有

$$\csc \varphi_0 = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}, \sec \varphi_0 = \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l'' \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 3 \left(\frac{b}{\cos \varphi_0} + \frac{a}{\sin \varphi_0} \right) > 0,$$

因此, $l \Big|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值, 即船的最大长度为

$$l \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

1588. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成: 固定部分等于 a 卢布, 变动部分与速度的立方成比例增加. 在怎样的速度

v 时, 船航行为最经济?

解 设航行的全路程为 s , 速度为 v , 则总耗费

$$Q = (a + kv^3) \frac{s}{v} = \frac{as}{v} + skv^2.$$

由 $\frac{dQ}{dv} = 0$ 得 $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 经检验知, 此时船航行最经济.

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上, 须用力把物体从原位置移动. 若物体摩擦系数等于 k , 问作用力对水平面的倾斜如何, 才使所须的力量为最小?

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α , 则

$$F \cos \alpha = k(P - F \sin \alpha),$$

即

$$F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$$

令 $y = \cos \alpha + k \sin \alpha$, 为使 F 最小, 只要使 y 最大. 由 $y'_\alpha = -\sin \alpha + k \cos \alpha = 0$ 得 $\alpha_0 = \arctan k$. 此时,

$$y''_\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_0} = -\cos \alpha_0 - k \sin \alpha_0 = -\sqrt{1+k^2} < 0.$$

即当 $\alpha_0 = \arctan k$ 时, y 为最大值, 从而 F 为最小值, 也即此时用力最省.

1590. 有一茶杯, 其形状为半径为 a 的半球, 于茶杯中放一长为 $l > 2a$ 的棒, 求棒的平衡位置.

解 取球心为坐标原点. 当 $2a < l \leq 4a$ 时, 设棒的重心的纵坐标为 y , 棒对杯口所在平面的倾角为 φ , 则

$$y = -\left(2a \cos \varphi - \frac{1}{2}\right) \sin \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

当棒平衡时, y 最小, 为此, 求 y 的极值. 由 $y'_\varphi =$

$$-4a\cos^2\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi + 2a = 0 \text{ 得}$$

$$\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a} \text{ (负值不合适, 舍去). 经}$$

检验知此时 y 取最小值, 即当 $\cos\varphi = \frac{l - \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$ 时棒取平衡位置.

当 $l > 4a$ 时, 棒的重心必在半球心外, 于是此时棒失去平衡, 无平衡位置.

§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1° n 阶相切 有两曲线 $y = \varphi(x)$ 及 $y = \psi(x)$, 若于点 x_0 ,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线于点 x_0 有 n 阶相切 (在严格的意义上讲!). 当 $x \rightarrow x_0$ 时在这种情形有:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O((x - x_0)^{n+1})$$

2° 曲率圆 圆周

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

与已知曲线 $y = f(x)$ 有不低于 2 阶的相切, 此圆称为在对应点的曲率圆. 这个圆的半径:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径, 而量 $k = \frac{1}{R}$ 为曲率.

3° 渐屈线 曲率圆中心 (ξ, η) (曲率中心)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y = f(x)$ 的渐屈线。

1591. 选择直线

$$y = kx + b$$

的参数 k 与 b , 使它与曲线

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

有高于二阶的相切。

解 要有高于二阶的相切, 必须使 $y'' = 6x - 6 = 0$, 即要 $x = 1$; 同时在 $x = 1$ 时, 两个一阶导数也应相等, 即 $k = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

当 $x = 1$ 时, 代入方程 $x^3 - 3x^2 + 2 - y = 0$, 得 $y = 0$. 由于直线 $y = kx + b$ 也须通过点 $(1, 0)$, 故有 $0 = -3 \cdot 1 + b$, 即 $b = 3$.

因此, 所求的直线为

$$y = 3(1 - x),$$

参数 $k = -3, b = 3$.

1592. 应当怎样选择系数 a, b 和 c , 才能使抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

于点 $x = x_0$ 与曲线 $y = e^x$ 有二阶的相切?

解 对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 在点 $x = x_0$ 有

$$y' \Big|_{x=x_0} = 2ax_0 + b, y'' \Big|_{x=x_0} = 2a, y''' = 0.$$

按假设, 应有

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = e^{x_0}, \\ 2ax_0 + b = e^{x_0}, \\ 2a = e^{x_0}, \end{cases}$$

解之, 得

$$a = \frac{1}{2}e^{x_0}, b = e^{x_0}(1 - x_0), c = e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right).$$

1593. 下列曲线与 Ox 轴在点 $x = 0$ 相切的阶如何:

(a) $y = 1 - \cos x$; (b) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$;

(B) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$

解 (a) $y' = \sin x, y'' = \cos x$, 于是

$$y' \Big|_{x=0} = 0 \quad y'' \Big|_{x=0} = 1.$$

而对于 Ox 轴 $y = 0$, 始终有 $y' = 0, y'' = 0$. 因此, 曲线 $y = 1 - \cos x$ 与 Ox 轴有一阶的相切.

(b) $y' = \sec^2 x - \cos x, y'' = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x + \sin x,$

$y''' = 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x + \cos x,$

于是 $y' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{x=0} = 0, y''' \Big|_{x=0} = 3 \neq 0$. 因此, 曲线 $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

(B) $y' = e^x - 1 - x, y'' = e^x - 1, y = e^x$, 于是

$$y' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{x=0} = 0, y''' \Big|_{x=0} = 1 \neq 0.$$

因此, 曲线 $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

1594. 证明曲线:

当 $x \neq 0$ 时, $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; 当 $x = 0$ 时, $y = 0$ 在点 $x = 0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

解 利用 1225 题的结果知, 对于任意自然数 n , 有

$$y^{(n)} \Big|_{x=0} = 0,$$

此即证明了所给的曲线在点 $x = 0$ 与 Ox 轴相切的阶为

无穷大.

1595. 求双曲线

$$xy = 1$$

在下列各点的曲率半径和曲率中心:

(a) $M(1, 1)$; (6) $N(100, 0.01)$.

解 $y = \frac{1}{x}, y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$.

(a) 在点 $M(1, 1), y = 1, y' = -1, y'' = 2$, 于是, 曲率半径

$$R = \frac{[1 + (-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2},$$

曲率中心 (ξ, η) 为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = 1 - \frac{-1(1 + 1)}{2} = 2,$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

(6) 在点 $N(100, 0.01)$,

$$y = 0.01, y' = -0.0001, y'' = 0.000002.$$

与(a)相似, 代入公式, 近似地有

曲率半径 $R = 500000$ 和曲率中心 $(150, 500000)$.

求下列曲线的曲率半径:

1596. 抛物线 $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}, y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}$. 于是, 曲率半径

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$= p \left(1 + \frac{y^2}{p^2} \right)^{\frac{3}{2}} = p \left(1 + \frac{2x}{p} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

1597. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 不妨设 $a > b$. 由于

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

于是, 曲率半径

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\ &= \frac{(a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\ &= \frac{a^3 b^3 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(a^2 - \epsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}. \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

1598. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 由于 $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$. 于是, 曲率半径

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\ &= \frac{(a^2 b^2 x^2 - a^4 b^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(\epsilon^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率.

1599. 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|} = \left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

1600. 椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctgt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

于是, 曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^2\operatorname{ctg}^2 t}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2|\sin t|^3}} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \\ &= \frac{a^3\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1 - \epsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

其中 ϵ 为椭圆的离心率.

1601. 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = \frac{1}{4a \cos^4 \frac{t}{2}}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}} = 4a \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2 \sqrt{2ay}.$$

1602. 圆的渐伸线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a t \cos^3 t}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a |t \cos^3 t|}} = a |t|.$$

1603. 证明二次曲线

$$y^2 = 2px - qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成比例.

证 曲线的曲率半径公式为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l = |y \sqrt{1 + y'^2}|,$$

因此, $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{|y^3 y''|}$. 下面求 $y^3 y''$:

因为 $y^2 = 2px - qx^2$, 故在等式两端分别对 x 求两次导数, 即得

$$2yy' = 2p - 2qx \text{ 或 } yy' = p - qx, \quad (1)$$

$$yy'' + y'^2 = -q. \quad (2)$$

以 y^2 乘(2)式两端, 并以(1)式及原二次曲线的表达式代入左右端, 即得

$$y^3 y'' + (p - qx)^2 = -q(2px - qx^2);$$

化简之, 最后得

$$y^3 y'' = -p^2.$$

因此, $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{p^2}$ 为一常数. 证完.

1604. 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

解 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\varphi)$, 则由

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2r'r'' - rr''}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3},$$

其中 $r' = \frac{dr}{d\varphi}, r'' = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}$.

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'r'' - rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表曲线的曲率半径:

1605. 阿基米德螺线 $r = a\varphi$

解 由于 $r' = a, r'' = 0$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}.$$

1606. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

解 由于 $r' = mae^{m\varphi} = mr, r'' = m^2r$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{r^3(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + m^2r^2} = r \sqrt{1 + m^2}.$$

1607. 心脏形线 $r = a(1 + \cos\varphi)$.

解 $r' = -a\sin\varphi, r'' = -a\cos\varphi$.

$$\begin{aligned} R &= \frac{[a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1 + \cos\varphi)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}a^3(1 + \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1 + \cos\varphi)} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2ar}. \end{aligned}$$

1608. 双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

解 $r' = -\frac{a^2\sin 2\varphi}{r}, r'' = -\frac{r^4 + a^4}{r^3}$,

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{3a^4}{r^2} \cdot (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6}{r^4}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}} = \frac{a^2}{3r}.$$

1609. 在曲线 $y = \ln x$ 上求曲率最大的点.

解 由于 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$, 所以, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设,我们只须考虑函数

$$f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{x^2}$$

当 x 取何值时达到最小值. 由于

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3}, \text{ 故令 } f'(x) = 0 \text{ 求}$$

得正根 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) < 0$; 当

$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) > 0$. 因此, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f(x)$ 取

极小值. 又由于只有一个极小值, 故也是最小值.

这样一来, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{\ln 2}{2}$ 时, 曲率半径为最小, 也即曲率为最大. 因此, 所求的点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$.

1610. 三次抛物线 $y = \frac{kx^3}{6}$ ($0 \leq x < +\infty, k > 0$) 的最大曲率

等于 $\frac{1}{1000}$, 求达到此最大曲率的点 x .

解 为方便起见, 令 $c = \frac{k}{6}$. 因为

$$y' = 3cx^2, y'' = 6cx,$$

所以, 曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}} (x \geq 0).$$

由 $\frac{dK}{dx} = 6c \frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3} = 0$, 得

$$x_0^4 = \frac{1}{45c^2}.$$

可证 $\left. \frac{d^2K}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0$, 又根据条件, $K(x_0)$ 为 $K(x)$ 的最大值, 且有

$$K(x_0) = \frac{6c \sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1 + 9c^2 \cdot \frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6 \sqrt{c} \sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10^3},$$

解之, 得

$$c = \frac{18 \sqrt{5}}{5^3 \times 10^6},$$

从而

$$x_0^2 = \frac{1}{\sqrt{45c}} = \frac{5^2 \times 10^6}{54}$$

或

$$x_0 = \sqrt{\frac{5^2 \times 10^6}{54}} \approx 680.$$

此即达到最大曲率的点.

求下列各曲线的渐屈线方程:

1611. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$, 故曲率中心坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{p}{y} \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}}$$

$$= x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p,$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x = \frac{\xi - p}{3}, y^3 = -p^2 \eta. \quad (*)$$

由于 $y^6 = 8p^3 x^3$, 故将 (*) 式代入后, 消去 x 及 y , 即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3.$$

1612. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, 故曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{b^2 x}{a^2 y} \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right)}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \\ &= x - \frac{b^2 x \cdot a^2 y^3 \cdot (a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^6 y^3 b^4} \\ &= x - \frac{xa^2 b^2 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \right)}{a^4 b^2} \\ &= x - \frac{x \left(a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 \right)}{a^2} = \frac{c^2}{a^4} x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}{\frac{b^4}{a^2 y^4}} \\ &= y - \frac{y(a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^2 b^4} \\ &= y - \frac{y a^2 b^2 \left(b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2 \right)}{a^2 b^4} = -\frac{c^2}{b^4} y^3,\end{aligned}$$

即

$$c^2 y^3 = -b^4 \eta, c^2 x^3 = a^4 \xi,$$

于是,

$$c^{\frac{4}{3}} y^2 = b^{\frac{8}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}, c^{\frac{4}{3}} x^2 = a^{\frac{8}{3}} \xi^{\frac{2}{3}},$$

从而, 将 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$ 相加即得渐屈线方程

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2 = a^2 - b^2$. 它为一内摆线.

1613. 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y'' = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$, 故曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned}\xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ &= x + \frac{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \right)}{a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}} = x + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}},\end{aligned}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y + \frac{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \right)}{a^{\frac{2}{3}}}$$

$$= y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \xi + \eta = (x + y) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) \\ & = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) \left[(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \right] \\ & = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \xi - \eta = (x - y) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) \\ & = (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) \left[(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \right] \\ & = (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^3. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & (\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} \\ & = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2 + (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^2 \\ & = 2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

此即所求的渐屈线方程,它仍为一内摆线.

1614. 曳物线 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 的渐屈线.

解 先求 y' 和 y'' . 在等式

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

两端分别对 x 求导,得

$$\begin{aligned} 1 &= a \left(\frac{-1}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y'}{y} \right) \\ &+ \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

化简得

$$y' = - \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (1)$$

再将(1)式两端分别对 x 求导并以(1)式代入,化简即

得

$$y'' = \frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}.$$

于是,曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned}\xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}} \\ &= x + \sqrt{a^2 - y^2}, \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{\frac{a^2}{a^2 - y^2}}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}} = \frac{a^2}{y}.\end{aligned}$$

由于点 (x, y) 的坐标 x 和 y ,适合方程

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

故

$$\xi = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{\frac{\xi}{a}}. \quad (2)$$

将(2)式分子有理化,得

$$\frac{a^2 - (a^2 - y^2)}{y(a - \sqrt{a^2 - y^2})} = e^{\frac{\xi}{a}},$$

即

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{-\frac{\xi}{a}}. \quad (3)$$

(2) + (3) 并除以 2, 即得

$$\frac{a}{y} = \operatorname{ch} \frac{\xi}{a},$$

从而得

$$\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a},$$

此即所要求的渐屈线方程,它为一悬链线.

1615. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ 的渐屈线.

解 利用直角坐标与极坐标的互化公式来求渐屈线方程. 首先,我们有

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{m(xy' - y)}{x^2 + y^2},$$

即

$$x + yy' = m(xy' - y). \quad (1)$$

解(1)式即得

$$y' = \frac{x + my}{mx - y}.$$

由(1)式再对 x 求导,化简得

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{mx - y}.$$

以 y' 及 y'' 代入曲率中心的表达式中,化简整理得

$$\xi = -my, \eta = mx. \quad (2)$$

设 $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi}$, 于是由(2)式得

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = m^2(x^2 + y^2), & (3) \\ \frac{\xi}{\eta} = \frac{y}{x}. & (4) \end{cases}$$

(3) 式即 $\rho = mr = mae^{m\varphi}$, (4) 式即 $-\operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\varphi$ 或 $\varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$. 因此, 最后我们得到所求的渐屈线方程为对数螺线

$$\rho = mae^{m(\varphi - \frac{\pi}{2})}.$$

1616. 证明摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线, 仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = a(t - \sin t) \\ &\quad + \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2})}{\frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}}} \\ &= a(t + \sin)t, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = a(\cos t - 1). \end{aligned}$$

令 $t - \pi = \tau$, 即得

$$\xi = \pi a + a(\tau - \sin\tau), \eta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

此仍为摆线, 显然, 只是位置与原摆线不同而已.

§ 15. 方程的近似解法

1° 比例法 (弦位法) 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续及

$$f(a)f(b) < 0,$$

且当 $a < x < b$ 时, $f'(x) \neq 0$, 则方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

于区间 (a, b) 内有一个而且仅有一个实根 ξ . 可取下面的值作为此根的第一近似值:

$$x_1 = a + \delta_1,$$

式中
$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

更进而对于区间 (a, x_1) 或 (x_1, b) 中, 函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用这方法, 得到根 ξ 的第二近似值 x_2 , 由此类推. 对于第 n 近似值 x_n , 下列公式正确:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

式中 $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

2° 牛顿法(切线法) 若在闭区间 (a, b) 内 $f'(x) \neq 0$ 及 $f(a)f''(a) > 0$, 则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ 的第一近似值 ξ_1 .

重复利用这个方法, 很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 ξ_n ($n = 1, 2, \dots$), 这些近似值的精确性可根据公式(2)来估计.

为了大略的确定方程的根, 最好可作函数 $y = f(x)$ 的图形.

利用比例法, 求下列方程的根(精确到 0.001):

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0.$

解 设 $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续及 $f(0) = 2, f(1) = -3$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6x \neq 0$. 因而所给方程在 $(0, 1)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 . 现求之, 以 x_i 表示此根的第 i 次近似值, 则有

$$x_1 = 0 + \delta_1 = -\frac{f(0)}{f(1) - f(0)}(1 - 0) = 0.4;$$

又因 $f(0.4) = -0.336$, 故

$$x_2 = -\frac{f(0)}{f(0.4) - f(0)}(0.4 - 0) = 0.342;$$

$f(0.342) = -0.012$, 故

$$x_3 = -\frac{f(0)}{f(0.342) - f(0)}(0.342 - 0) = 0.340;$$

由于 $f(0.340) = -0.001$, $m_1 = \inf_{0 < x < 1} |f'(x)| = 3$, 因此, 如果取 0.340 作为此根的第三次近似值, 其误差为

$$|0.340 - \xi_1| \leq \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 0.340.

再求其它的根:

因为 $f(2) = -2$, $f(3) = 11$, 且当 $2 < x < 3$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故方程在 $(2, 3)$ 内有且仅有一实根 ξ_2 . 与求 ξ_1 的方法类似, 分别求得其各次的近似值为:

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f(3) - f(2)}(3 - 2) = 2.15;$$

$$x_2 = 2.15 - \frac{f(2.15)}{f(3) - f(2.15)}(3 - 2.15) = 2.22;$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 2.22 - \frac{f(2.22)}{f(3) - f(2.22)}(3 - 2.22) \\ &= 2.245; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 2.245 - \frac{f(2.245)}{f(3) - f(2.245)}(3 - 2.245) \\ &= 2.256; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 2.256 - \frac{f(2.256)}{f(3) - f(2.256)}(3 - 2.256) \\ &= 2.260; \end{aligned}$$

$$x_6 = 2.260 - \frac{f(2.260)}{f(3) - f(2.260)}(3 - 2.260) \\ = 2.261;$$

$$x_7 = 2.261 - \frac{f(2.261)}{f(3) - f(2.261)}(3 - 2.261) \\ = 2.262.$$

由于 $f(2.262) = 0.003$, $m_2 = \inf_{2 < x < 3} |f'(x)| = 6$, 因此, 如果取 2.262 作为 ξ_2 的第七次近似值, 其误差为

$$|2.262 - \xi_2| \leq \frac{|f(2.262)|}{m_2} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 2.262.

由于此方程为一个三次方程, 最后必然还有一实根.

因为 $f(-2) = 6$, $f(-3) = -7$, 且当 $-3 < x < -2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故此根 ξ_3 介于 -3 和 -2 之间.

同上法求得其各次近似值为

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2) - f(-3)}(-2 + 3) \\ = -2.461;$$

$$x_2 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.461) - f(-3)}(-2.461 + 3) \\ = -2.574;$$

$$x_3 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.574) - f(-3)}(-2.574 + 3) \\ = -2.596;$$

$$x_4 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.596) - f(-3)}(-2.596 + 3) \\ = -2.601;$$

$$x_5 = 3 - \frac{f(-3)}{f(-2.601) - f(-3)}(-2.601 + 3) \\ = -2.602.$$

由于 $f(-2.602) = -0.004$, $m_3 = \inf_{-3 < x < -2} |f'(x)| = 6$, 因此, 如果取 -2.602 作为 ξ_3 的第五次近似值, 则其误差为

$$|-2.602 - \xi_3| \leq \frac{|f(-2.602)|}{m_3} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第三个根的近似值为 -2.602 .

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

解 设 $f(x) = x^4 - x - 1$. 由于 $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, 且当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(1, 2)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 , 按 1617 题的方法, 依次求得该根的各次近似值为

$$x_1 = 1.07; x_2 = 1.12; x_3 = 1.156; x_4 = 1.180;$$

$$x_5 = 1.196; x_6 = 1.205; x_7 = 1.217;$$

$$x_8 = 1.220; x_9 = 1.221.$$

由于 $f(1.221) = 0.002$, $m_1 = \inf_{1 < x < 2} |f'(x)| = 3$, 因此, 如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九次近似值, 其误差为

$$|1.221 - \xi_1| \leq \frac{|f(1.221)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 1.221 .

又因 $f(-1) = 1$, $f(-0.5) = -0.4375$; 且当 $-1 < x < -0.5$ 时 $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(-1, -0.5)$ 内有且仅有一实根 ξ_2 , 依次求得其各次近似值

为

$$x_1 = -0.652; x_2 = -0.789; x_3 = -0.706;$$

$$x_4 = -0.719; x_5 = -0.723; x_6 = -0.724.$$

由于 $f(-0.724) = -0.001$, $m_2 = \inf_{-1 < x < -0.5} |f'(x)| = 1$, 因此, 如果取 -0.724 作为 ξ_2 的第六次近似值, 其误差为

$$|-0.724 - \xi_2| \leq \frac{|f(-0.724)|}{m_2} = 0.001,$$

已达到所需的精确度, 于是, 所给方程的另一近似根为 -0.724 .

由于 $f'(x) = 4x^3 - 1 = 0$ 只有一实根, 且 $f''(x) = 12x^2 > 0 (x \neq 0)$, 故所给方程仅有二实根, 其余二根为一对共轭复根.

1619. $x - 0.1 \sin x = 2$.

解 设 $f(x) = x - 0.1 \sin x - 2$, 则 $f(2) = -0.091$,

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.0237$, 且当 $2 < x < \frac{2\pi}{3}$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所

给方程在 $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 , 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 2.075; x_2 = 2.080; x_3 = 2.083; x_4 = 2.087.$$

由于 $f(2.087) = 0.00003$, $m_1 = \inf_{2 < x < \frac{3\pi}{2}} |f'(x)| = 1 -$

$0.1 \cos 2 \approx 0.959$, 因此, 如果取 2.087 作为 ξ_1 的第四次近似值, 其误差为

$$|2.087 - \xi_1| \leq \frac{|f(2.087)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的近似根为

2.087(验).

又方程 $x - 0.1\sin x = 2$ 与方程 $x - 2 = 0.1\sin x$ 等价, 而曲线 $y = x - 2$ 与 $y = 0.1\sin x$ 只有一个交点, 因此, 原方程只有一个实根.

*) 因 $f'(x) = 1 - 0.1\cos x, f''(x) = 0.1\sin x > 0$, 故 $m_1 = |f'(2)| = 1 - 0.1\cos 2$. 以下同样情况不再说明.

1620. $\cos x = x^2$.

解 设 $f(x) = \cos x - x^2$, 则因 $f(-x) = f(x)$, 故原方程若有一根 ξ , 必有另一根 $-\xi$. 又曲线 $y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 只有两个交点. 因此, 原方程有且仅有两个根 $\pm \xi$. 为此, 只需求一正根即可.

由于 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.09, f(1) = -0.46$, 且当 $\frac{\pi}{4} < x < 1$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 内有且仅有一实根 ξ , 依次求得其各次的近似值为

$$x_1 = 0.821; x_2 = 0.828; x_3 = 0.826; x_4 = 0.825.$$

由于 $f(0.825) = -0.002, m = \inf_{\frac{\pi}{4} < x < 1} |f'(x)| =$

$$\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2.278, \text{ 因此, 如果取 } 0.825 \text{ 作为 } \xi \text{ 的第四次}$$

近似值, 其误差为

$$|0.825 - \xi| \leq \frac{f(0.825)}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度, 于是, 所给方程的二近似根为 ± 0.825 .

如果注意到 $f(0.824) = 0.002, f(0.825) =$

- 0.002, 因此, 取 ± 0.824 作为所给方程的二近似根, 也可保证所需的精确度.

利用牛顿法, 求下列方程的根(精确到所指定的程度):

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (精确到 10^{-3}).

解 曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 与 $y = 10x$ 共有两个交点, 因此, 所给方程共有两个实根.

设 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 10x$, 则因 $f(0.4) = 2.41$, $f(0.5) = -0.75$, 且当 $0.4 < x < 0.5$ 时 $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(0.4, 0.5)$ 内有且仅有一实根. 又由于在 $[0.4, 0.5]$ 内 $f''(x) \neq 0$ 且 $f(0.4)f''(0.4) > 0$, 故利用牛顿法求近似根时, 切点应取 $(0.4, f(0.4))$. 依次求得各次近似值为

$$x_1 = 0.4 - \frac{f(0.4)}{f'(0.4)} = 0.459;$$

$$x_2 = 0.459 - \frac{f(0.459)}{f'(0.459)} = 0.471;$$

$$x_3 = 0.471 - \frac{f(0.471)}{f'(0.471)} = 0.472.$$

今估计误差: $f(0.472) = -0.013$. 由于 $f'(x)$ 为增函数, 且为负的, 故 $m = \inf_{0.4 < x < 0.5} |f'(x)| = |f'(0.5)| = 25$. 此, 如果取 0.472 作为根的近似值, 其误差为

$$|0.472 - \xi| \leq \frac{f(0.472)}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 0.472.

现求第二个近似根, 由于 $f(10) = 0.001$, 故此根可能逼近 10. 现分别以 9.9 及 9.99 试之: $f(9.9) = -0.98, f(9.99) = -0.09$. 因此, $f(9.99) \cdot f(10) < 0$, 加以在 $(9.99, 10)$ 内 $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(9.99, 10)$ 内有且仅有一实根. 又因 $f(10)f''(10) > 0$ 及 $f''(x) \neq 0$, 故应用牛顿法求近似根时, 切点应选在 $(10, f(10))$ 处, 于是

$$x_1 = 10 - \frac{f(10)}{f'(10)} = 9.99999,$$

如果取 9.999 作为根的近似值, 则其误差显然已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的又一近似根为 9.999.

1622. $x \lg x = 1$ (精确到 10^{-4}).

解 曲线 $y = \lg x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 只有一个交点. 因此, 所给方程只有一个实根. 现确定其范围. 设 $f(x) = x \lg x - 1$, 由于 $f(2.506) = -0.0004, f(2.507) = 0.0005$, 且当 $2.506 < x < 2.507$ 时, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 故在 $(2.506, 2.507)$ 内有且仅有一实根, 切点选在 $(2.507, f(2.507))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 2.5064; x_2 = 2.5062.$$

由于 $f(2.5062) = 0.00002, m = \inf_{2.506 < x < 2.507} |f'(x)| = |f'(2.506)| = 0.84$, 因此, 如果取 2.5062 作为根的近似值时, 其误差为,

$$|2.5062 - \xi| \leq \frac{|f(2.5062)|}{m} < 0.0001,$$

已达到所需的精确度, 故所求的唯一近似根为 2.5062.

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (精确到 10^{-3}) (二正根).

解 曲线 $y = \cos x$ 与 $y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 的交点有无穷多个, 其中最小的三个正根分别记为 α, β, γ , 且

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$$

$$2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2},$$

$$\frac{7\pi}{2} < \gamma < 4\pi.$$

现在我们将求 α 与 γ 两正根的计算方法叙述如下. 设 $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x - 1$.

(1) 先求 α .

由于 $f(4.7) = -1.6812, f(4.8) = 4.3159$, 知 $4.7 < \alpha < 4.8$. 又因在 $(4.7, 4.8)$ 内 $f''(x) > 0$, 故切点应取在 $(4.8, f(4.8))$ 处, 依次求得 α 的各次近似值为

$$x_1 = 4.7345; x_2 = 4.7301.$$

本题若采用 $\frac{|f(x_n)|}{m}$ 估计误差, 由于 m 本身也需估计, 而且繁琐, 今用比例法与牛顿法联合使用求根的近似值. 设以右上角带“ i ”的 x'_i 表示用比例法求出的第 i 次近似根, 则有

$$\begin{aligned} x'_1 &= 4.7 - \frac{f(4.7)}{f(4.8) - f(4.7)}(4.8 - 4.7) \\ &= 4.7280, \end{aligned}$$

从而知

$$4.7280 < \alpha < 4.7345.$$

于是,

$$x'_2 = 4.7280 - \frac{f(4.7280)}{f(4.7345) - f(4.7280)} \\ (4.7345 - 4.7280) = 4.7300.$$

因此,

$$4.7300 < \alpha < 4.7301.$$

取 4.730 作为 α 的近似值,即可保证所需的精确度,于是,所给方程的一正根的近似值为 4.730.

(2) 再求 γ .

由于 $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1, f(11) \approx 133$, 故知 $\frac{7\pi}{2} < \gamma < 11$. 切点取在 $(11, f(11))$ 处. 分别用比例法及牛顿法求得

$$x'_1 = 10.9956, x_1 = 10.9956,$$

因而取 10.996 作为 γ 的近似值,即可保证所需的精确度. 于是,所给方程的又一正根的近似值为 10.996.

1624. $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5}).

解 设 $f(x) = x + e^x$, 则 $f'(x) = 1 + e^x > 0, f''(x) = e^x > 0$. 由于 $f(0) = 1, f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, 故在 $(-1, 0)$ 内所给方程有且仅有一实根, 切点选在 $(0, f(0))$ 处. 依次求得此根的各次近似值为

$$x_1 = -0.5; x_2 = -0.56631; x_3 = -0.567132; \\ x_4 = -0.567145.$$

由于

$$|x_4 - \xi| \leq \frac{|f(-0.567145)|}{m} \\ = \frac{|f(-0.567145)|}{1 + e^{-1}} < 10^{-5},$$

故取 -0.56715 作为根的近似值,即可保证所需的精确度.

由于曲线 $y = e^x$ 与 $y = -x$ 只有一个交点,故上述近似根 ≈ 0.56715 即为所给方程的唯一近似根.

1625. $x \operatorname{th} x = 1$. (精确到 10^{-6}).

解 设 $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{x}$, 则因曲线 $y = \operatorname{th} x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 仅有两个交点,故所给方程仅有二实根. 又因在 $x \operatorname{th} x$ 中以 $-x$ 代 x , 其值不变,故方程的二实根为 $\pm \xi$.

由 $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{x^2} > 0$, 知 $f(x)$ 是增函数. 又因 $f(1) = -0.2384, f(2) = 0.4640$. 故所给方程在 $(1, 2)$ 内有且仅有一实根. 又

$$f''(x) = -\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3 x} - \frac{2}{x^3} < 0 \quad (x > 0),$$

因此切点应选为 $(1, f(1))$. 仍以 x'_i 及 x_i 分别表示用比例法及牛顿法求得的根的第 i 次近似值,重复使用,即得

$$x'_1 = 1.339, x_1 = 1.168,$$

故 $1.168 < \xi < 1.339$.

$$x'_2 = 1.2032, x_2 = 1.1989,$$

有 $1.1989 < \xi < 1.2032$.

$$x'_3 = 1.1996796, x_3 = 1.1996781.$$

故 $1.1996781 < \xi < 1.1996796$.

于是,取 ± 1.199678 作为根的近似值,即可保证所需的精确度.

1626. 求方程

$$\operatorname{tg} x = x$$

最小的三个正根(精确到 0.001).

解 由 $y = \operatorname{tg} x$ 及 $y = x$ 的图形知方程有正根,且有无

旁个, 只求其最小三正根, 设 $f(x) = \operatorname{tg}x - x$.

(1) 由于 $f'(x) = \operatorname{tg}^2x > 0$, $f''(x) = 2\operatorname{tg}x \cdot \sec^2x > 0$ ($x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$) 及 $f(\frac{4\pi}{3})f(\frac{23\pi}{16}) < 0$, 故在 $(\frac{4\pi}{3}, \frac{23\pi}{16})$ 内所给方程有且仅有一实根 ξ_1 , 切点应选在 $(\frac{23\pi}{16}, f(\frac{23\pi}{16}))$ 处. 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 4.4959; x_2 = 4.4933.$$

由于 $|f(4.4933)| = 0.0012$, $m = \inf_{\frac{4\pi}{3} < x < \frac{23\pi}{16}} |f'(x)| = \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{3} = 3$, 因此, 如果取 4.493 作为根 ξ_1 的近似值, 其误差为

$$|x_2 - \xi_1| \leq \frac{|f(4.4933)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一最小正近似根为 4.493.

(2) 再求第二个最小正根.

由于 $f(\frac{39\pi}{16}) < 0$, $f(\frac{79\pi}{32}) > 0$, 故在 $(\frac{39\pi}{16}, \frac{79\pi}{32})$ 内方程有且仅有一实根 ξ_2 . 又因在此区间内 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 故切点应选在 $(\frac{79\pi}{32}, f(\frac{79\pi}{32}))$ 处. 依次求得 ξ_2 的各次近似值为

$$x_1 = 7.7325; x_2 = 7.7258; x_3 = 7.7254.$$

由于 $|f(7.7254)| = 0.0083$, $m =$

$\inf_{\frac{39\pi}{16} < x < \frac{79\pi}{32}} |f'(x)| = \operatorname{tg}^2 \frac{39\pi}{16} > 25$, 因此, 如果取 7.725 作

为 ξ_2 的近似值, 其误差为

$$|x_3 - \xi_2| \leq \frac{|f(7.7254)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度。于是, 所给方程的第二个最小正根的近似值为 7.725。

(3) 最后求第三个最小正根。

由于 $f\left(\frac{111\pi}{32}\right) < 0, f\left(\frac{223\pi}{64}\right) > 0$, 故在 $\left(\frac{111\pi}{32}, \frac{223\pi}{64}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_3 。又因在此区间内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 故切点应选在 $\left(\frac{223\pi}{64}, f\left(\frac{223\pi}{64}\right)\right)$ 处, 依次求得 ξ_3 的各次近似值为

$$x_1 = 10.9233; x_2 = 10.9086; x_3 = 10.9041.$$

由于 $|f(10.9041)| = 0.014, m = \operatorname{tg}^2 \frac{111\pi}{32} = 102.78$ 。

因此, 如果取 10.904 作为 ξ_3 的近似值, 其误差为

$$|x_3 - \xi_3| \leq \frac{|f(10.9041)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度。于是, 所给方程的第三个最小正根的近似值为 10.904。

1627. 求方程

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的二正根(精确到 10^{-3})。

解 由 $y = \operatorname{ctg} x$ 与 $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的图形知交点有无穷个, 我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2 :

$$\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \pi, \frac{3\pi}{2} < \xi_2 < 2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1

设 $f(x) = \operatorname{ctg}x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$, 则在所考虑的区间内
 $f'(x) = -\operatorname{ctg}^2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} < 0$, $f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3x} - \frac{2}{x^3}$
 < 0 . 又因 $f(2.0708) = 0.0062$, $f(2.1708) =$
 -0.0593 , 故切点应选在 $(2.1708, f(2.1708))$ 处. 用
 比例法与牛顿法联合求 ξ_1 . 重复应用, 即得

$$x'_1 = 2.0803, x_1 = 2.0923,$$

故 $2.0803 < \xi_1 < 2.0923$.

$$x'_2 = 2.0815, x_2 = 2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值, 即可保证所需的精确度.
 于是, 所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2 .

由于 $f(5.9324) = 0.0648$, $f(5.9424) =$
 -0.0169 , 故

$$5.9324 < \xi_2 < 5.9424,$$

切点取 $(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次, 即得

$$x'_1 = 5.9403, x_1 = 5.9404,$$

因此, 取 5.940 作为 ξ_2 的近似值, 即可保证所需的精确
 度. 于是, 所给方程的又一正根的近似值为 5.940.