

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971.

В книге излагаются современные методы разностного решения задач математической физики и относящиеся сюда вопросы теории разностных схем.

Книга включает следующие разделы: однородные разностные схемы для решения одномерных уравнений параболического и гиперболического типов, разностные схемы для уравнений эллиптического типа, теория устойчивости разностных схем, экономичные методы решения многомерных задач математической физики, итерационные методы решения разностных уравнений.

В книге содержится значительное количество примеров, иллюстрирующих основные положения теории и способствующих более глубокому ее усвоению.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов, специализирующихся в области вычислительной математики, а также на научных сотрудников и инженеров, связанных с численным решением задач математической физики.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие	7
Основные обозначения, принятые в книге	11
Глава I. Предварительные сведения	13
§ 1. Основные понятия	13
1. Сетки и сеточные функции (13). 2. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов (17). 3. Погрешность аппроксимации на сетке (25). 4. Постановка разностной задачи (29). 5. О сходимости и точности схем (31). 6. Метод аппроксимации краевых и начальных условий (34). 7. Примеры устойчивых и неустойчивых разностных схем (38). 8. О понятии корректности разностной задачи (40). 9. Решение разностных уравнений методом прогонки (42).	
§ 2. Некоторые сведения о математическом аппарате теории разностных схем	45
1. Некоторые разностные формулы (45). 2. Отыскание собственных функций и собственных значений на примере простейшей разностной задачи (48). 3. Разностные аналоги теорем вложения (53). 4. Метод энергетических неравенств (56). 5. Принцип максимума (60).	
§ 3. Некоторые сведения из функционального анализа	62
1. Линейные операторы (62). 2. Линейные ограниченные операторы в вещественном гильбертовом пространстве (64). 3. Линейные операторы в пространстве конечного числа измерений (68).	
Глава II. Разностные схемы для уравнений с постоянными коэффициентами	70
§ 1. Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами	70
1. Исходная задача (70). 2. Семейство шеститочечных схем (71). 3. Погрешность аппроксимации (73). 4. Устойчивость по начальным	

данным (76). 5. Устойчивость по правой части (80). 6. Сходимость и точность (82). 7. Метод энергетических неравенств (83). 8. Краевые условия третьего рода (87). 9. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности (89).

- § 2. Разностные схемы для уравнения колебаний струны 92  
1. Постановка разностной задачи и вычисление погрешности аппроксимации (92). 2. Исследование устойчивости (95). 3. Метод энергетических неравенств (101).

Глава III. Однородные разностные схемы 103

- § 1. Однородные схемы для стационарного уравнения с переменными коэффициентами 103

1. Введение (103). 2. Исходная задача (105). 3. Трехточечные схемы (106). 4. Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов (108). 5. Интегро-интерполяционный метод (метод баланса) построения однород-

- ных разностных схем (111). 6. Однородные консервативные схемы (114). 7. Исходный класс консервативных схем. Шаблонные функционалы (116). 8. Разностная функция Грина (119). 9. Априорные оценки (122). 10. Погрешность аппроксимации в классе непрерывных коэффициентов (125). 11. Погрешность аппроксимации в классе разрывных коэффициентов (127). 12. О сходимости и точности (130). 13. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках (130). 14. Точная схема. Схема любого порядка точности (140). 15. Монотонные схемы для уравнения общего вида (145). 16. Третья краевая задача (148). 17. Коэффициентная устойчивость разностных схем (149). 18. Однородные схемы для уравнения в цилиндрической и сферической системах координат (152). 19. Задача с условиями периодичности (163). 20. Разностная задача Штурма — Лиувилля. Постановка задачи и основные свойства (168). 21. Разностная задача Штурма — Лиувилля. Оценка скорости сходимости (178).

- § 2. Однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами 185

1. Однородные разностные схемы (185). 2. Погрешность аппроксимации (189). 3. Погрешность аппроксимации в классе разрывных коэффициентов (190). 4. Устойчивость и априорные оценки (192). 5. Сходимость и точность (197). 6. Однородные схемы на неравномерных сетках (201). 7. Монотонные схемы для параболических уравнений общего вида (206). 8. Цилиндрически- и сферически-симметричные задачи теплопроводности (207). 9. Третья краевая задача (211). 10. Периодическая задача (212). 11. Квазилинейные уравнения (214).

- § 3. Однородные разностные схемы для уравнений гиперболического типа 219  
1. Однородные разностные схемы (219). 2. Погрешность аппроксимации (221). 3. Устойчивость и сходимость (222).

Глава IV. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	226
§ 1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона	226
1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа (227). 2. Разностная задача Дирихле в прямоугольнике (230). 3. Разностная задача Дирихле в области сложной формы (232). 4. Запись разностного уравнения в канонической форме (237). 5. Принцип максимума (239). 6. Оценка решения неоднородного уравнения (242). 7. Оценка решения разностной задачи Дирихле (244). 8. Равномерная сходимость и порядок точности разностной задачи Дирихле (247). 9. Схема повышенного порядка точности для уравнения Пуассона (249).	
§ 2. Некоторые оценки для разностных операторов, аппроксимирующих дифференциальные операторы эллиптического типа	252
1. Разностный оператор Лапласа в прямоугольной области (252). 2. Оператор Лапласа в области, составленной из прямоугольников (258). 3. Операторы с переменными коэффициентами (259). 4. Оператор со смешанной производной (260). 5. Схема повышенного порядка точности для эллиптического уравнения со смешанными производными (263).	
Глава V. Общие формулировки. Операторно-разностные схемы	268
§ 1. Разностные схемы как операторные уравнения в абстрактных пространствах	268
1. Разностные схемы как операторные уравнения (268). 2. Устойчивость разностной схемы (275). 3. Сходимость и аппроксимация (276). 4. Некоторые априорные оценки (279). 5. Коэффициентная устойчивость уравнений первого рода (289).	
§ 2. Операторно-разностные схемы	292
1. Введение (292). 2. Операторно-разностные схемы (293). 3. Каноническая форма двухслойных схем (294). 4. Канонические формы трехслойных схем (295). 5. Понятие, устойчивости (295). 6. Достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах (297),	
Глава VI. Теория устойчивости разностных схем	301
§ 1. Классы устойчивых двухслойных схем	301
1. Постановка задачи (301). 2. Исходное семейство схем (302). 3. Энергетическое тождество (303). 4. Устойчивость по начальным данным в $H_A$ (303). 5. Устойчивость по начальным данным в $H_B$ (305). 6. Необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным (306). 7. Метод разделения переменных (309). 8. Некоторые вспомогательные неравенства (311). 9. Устойчивость по правой части (312). 10. Устойчивость схемы с весами (314). 11. Априорные оценки в случае переменного оператора $A$ (320)г. 12. Пример (322).	
§ 2. Классы устойчивых трехслойных схем	324

1. Постановка задачи (324).
2. Основное энергетическое тождество (326).
3. Устойчивость по начальным данным (327).
4. Устойчивость по правой части (329).
5. Схемы с переменными операторами (333).
6. Схема с весами (335).
7. Примеры (337).
8. Другие априорные оценки (338).
9. О регуляризации разностных схем (345).
10. О работах по устойчивости разностных схем (348).

Задачи к главе VI	351
Глава VII. Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики	356
§ 1. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) для уравнения теплопроводности	356
1. Об экономичных схемах (356).	
2. Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) (359).	
3. Устойчивость (361).	
4. Сходимость и точность (364).	
5. Схема, для уравнения с переменными коэффициентами (364).	
§ 2. Экономичные факторизованные схемы	367
1. Схемы с факторизованным оператором (367).	
2. Краевые условия (369).	
3. Построение экономичных факторизованных схем (370).	
4. Схемы расщепления как факторизованные схемы (374).	
5. Трехслойные факторизованные схемы (376).	
6. Схема повышенного порядка точности для уравнения параболического типа с эллиптическим оператором, содержащим смешанные производные (381).	
7. Экономичные схемы для систем уравнений параболического и гиперболического типов (387).	
§ 3. Метод суммарной аппроксимации	394
1. Составные схемы. Суммарная аппроксимация (394).	
2. Методы построения аддитивных схем (397).	
3. Аппроксимация «многомерной» задачи Коши системой «одномерных» задач Коши (400).	
4. Методы оценки сходимости аддитивной схемы (407).	
5. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности в произвольной области (413).	
6. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы (417).	
7. Устойчивость локально-одномерной схемы (418).	
8. Равномерная сходимость локально-одномерной схемы (423).	
9. Локально-одномерная схема для уравнений с переменными коэффициентами (425).	
10. Продольно-поперечная схема как аддитивная схема (427).	
11. Локально-одномерные схемы для многомерного гиперболического уравнения второго порядка (429).	
12. Аддитивные схемы для систем уравнений (438).	
Задачи к главе VII	443
Глава VIII. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений	449
§ 1. Двухслойные итерационные схемы для разностной задачи Дирихле	449
1. Итерационные схемы (449).	
2. Схема простой итерации (явная	

схема) (454). 3. Неявный метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) (457). 4. Выбор итерационных параметров (461). 5. Итерационная схема для разностной задачи Дирихле повышенного порядка точности (466). 6. Метод переменных направлений для трехмерной задачи Дирихле (470).	
§ 2. Теория итерационных двухслойных схем общего вида	475
1. Итерационная схема с чебышевским набором параметров (475). 2. Основная теорема для стационарных схем (490). 3. Вычисление нормы оператора перехода двухслойной схемы с весами (491). 4. Неявный метод переменных направлений для случая непостоянных операторов (492). 5. Факторизованные итерационные схемы (497). 6. Факторизованный оператор $B$ с перестановочными операторами $R_1$ и $R_2$ (501),	
§ 3. Итерационные двухслойные схемы для несамосопряженных уравнений	503
1. Метод переменных направлений в случае несамосопряженных операторов (503). 2. Случай несамосопряженного оператора перехода (505). 3. Оценка $\ S\ $ при увеличении объема информации (506). 4. Неявный метод наискорейшего спуска и метод минимальных поправок (509). 5. Двухступенчатый метод (513).	
§ 4. Трехслойные итерационные схемы	517
1. Постановка задачи (518). 2. Выбор итерационных параметров (519). 3. Явная схема (521). 4. Оценка скорости сходимости явной схемы (522). 5. Априорные оценки для неявной схемы в энергетических пространствах $H_A$ и $H_B$ (525). 6. Факторизованные схемы (526). 7. Двухступенчатый метод (527).	
Дополнение. Некоторые варианты метода прогонки	529
§ 1. Поточковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами	529
§ 2. Матричная прогонка	532
§ 3. Циклическая прогонка	535
Литература	538
Предметный указатель	551

### ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аппроксимация оператора 278	— — продольно-поперечная 457
— разностная 18	— — Ричардсона 479
— суммарная 397	— — стационарная 490
Интегро-интерполяционный метод 111	— — трехслойная 517
	— — факторизованная 497, 526
Исходное семейство разностных схем 303, 320	Итерационный метод
	двухступенчатый 513, 527
Итерационная схема 449	— — двухшаговый 451
— — двухслойная 452	— — для квазилинейных уравнений

- 216
- — одношаговый 451
  - Каноническая форма двухслойной разностной схемы 294
  - — трехслойной разностной схемы 295
  - Корректность разностной задачи 41, 275, 296
  - Коши — Буняковского неравенство 48
  - — — обобщенное 66
  - Краевая задача первая 226, 230, 235
  - — с условиями периодичности 163, 212
  - — третья 34, 35, 87, 148, 211, 239, 287
  - Липшица условие 195, 320
  - Метод баланса 111
  - выделения стационарных неоднородностей 199
  - итерационный одношаговый, двухшаговый 451
  - — минимальных поправок 503
  - — наискорейшего спуска 509
  - Метод переменных направлений 359
  - — — итерационный 457, 492
  - приближенной факторизации 370
  - прогонки 42
  - — матричной 532
  - — потоковой 529
  - — циклической 535
  - простой итерации 454
  - разделения переменных 76, 309
  - расщепления 374
  - расщепляющегося оператора 370
  - суммарной аппроксимации 397
  - установления 450
  - энергетических неравенств 56, 83, 101
  - Норма негативная 26, 66
  - оператора 63
  - сеточная 16
  - Окрестность узла сетки 239
  - Оператор Лапласа разностный 227,
- 252
  - линейный 63
  - обратный 63
  - перехода 295
  - положительный 64
  - постоянный 302
  - — разрешающий 298
  - сопряженный 65
  - треугольный 347
  - факторизованный 367
  - Операторы энергетически эквивалентные 263
  - Оценка априорная 42
  - Параметры итерационные 452, 461, — — «по Жордану» 462
  - — циклические 463
  - Погрешность аппроксимации 19, 277
  - — на решении дифференциальной задачи 29
  - — оператора 25
  - Принцип максимума 60, 239
  - суперпозиции 98, 336
  - Пространство сеточных функций 16
  - энергетическое 66
  - Разностная производная 18, 19
  - схема 29, 275
  - — аддитивная 395
  - — двухслойная 72
  - — Дюфорта — Франкела 89, 337
  - — консервативная 110, 111
  - — локально-одномерная 407, 413
  - — монотонная 146, 206
  - — наилучшая 119, 131
  - — неявная 31, 73
  - — однородная 103, 105, 106, 201, 219
  - — Писмена — Рекфорда 360
  - — повышенного порядка точности 71, 249
  - — предиктор-корректор 217
  - — Ричардсона 89
  - — Саульева 323
  - — с весами 71, 220
  - — с расщепляющимся оператором

368  
— — сквозного счета 218  
— — составная 395  
— — точная 140  
— — трехслойная 37  
— — усеченная 144  
— — факторизованная 368  
— — шеститочечная симметричная  
73, 188  
— — экономичная 358  
— — явная 31, 72, 188  
Регуляризатор 345  
Регуляризация разностных схем 345  
Сетка 14  
— квадратная 231  
— неравномерная 15, 24  
Сетка прямоугольная 231  
— равномерная 14  
— — связанная 234, 239  
Скорость сходимости 33, 277  
Слой 72  
Стефана задача 218  
Схема разностная см. Разностная  
схема  
Сходимость итераций 455  
— разностной схемы 33, 277  
Теорема вложения разностная 53, 257  
Точность разностной схемы 277

Узел сетки 14, 230, 232  
— — внутренний 15, 230, 232, 233  
— — граничный 15, 230, 232  
— — нерегулярный 233  
— — приграничный 233  
Устойчивость абсолютная 79  
— абстрактной задачи Коши 293  
— безусловная 79  
— двухслойной разностной схемы  
296, 305, 309  
— коэффициентная 149, 289  
— по начальным данным 76, 298  
— разностной схемы 33, 41, 275  
— трехслойной разностной схемы  
325  
— условная 79  
Формула Грина разностная 47, 255  
— разностного дифференцирования  
45  
— суммирования по частям 46  
Функционал шаблонный 105, 116  
Функция Грина разностная 119, 120  
— сеточная 14  
Шаблон 18  
— нерегулярный 24  
— пятиточечный нерегулярный 228  
— регулярный 227  
Шаг сетки 14

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Значительное число задач физики и техники приводит к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (уравнениям математической физики). Универсальным и чрезвычайно эффективным методом решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток. Он позволяет сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений.

Настоящая книга представляет собой введение в теорию разностных схем. В ней дается по-возможности элементарное и систематическое изложение основных принципиальных вопросов теории, иллюстрируемых на простейших задачах математической физики для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов. При этом рассматриваются прежде всего те схемы, которые представляют практический интерес, т. е. пригодны для решения конкретных задач на ЭВМ. Это — однородные разностные схемы, устойчивые на любых допустимых сетках и пригодные для решения классов задач при помощи одних и тех же вычислительных алгоритмов.

Поскольку мы рассматриваем лишь простейшие схемы для уравнений второго порядка, то при решении разностных уравнений используется лишь алгоритм одномерной прогонки (для систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей).

Для теории разностных схем типично предположение о том, что решение исходной задачи для дифференциального уравнения существует и имеет нужное по ходу изложения число производных, обеспечивающее максимальный порядок аппроксимации. Мы не останавливаемся на перечне условий, обеспечивающих требуемую гладкость решения, отсылая читателя к книгам по



общей теории дифференциальных уравнений. Предполагается, что читатель знаком с основами университетского курса теории уравнений в частных производных и элементами функционального анализа. Перечень некоторых сведений из функционального анализа в форме, удобной для дальнейшего использования, дан в главе I.

Понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости поясняются в главах I, II на примерах разностных схем для стационарных и нестационарных задач теплопроводности (диффузии).

В главе III излагается теория однородных разностных схем для стационарных и нестационарных одномерных задач теплопроводности с разрывными коэффициентами, а также для одномерного уравнения колебаний.

При помощи разностной функции Грина, принципа максимума и энергетического метода проводится исследование порядка точности однородных схем в различных классах коэффициентов дифференциального уравнения.

В главе IV изучается разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области, а также разностные аппроксимации для эллиптических операторов с переменными коэффициентами.

В главах V, VI дается изложение теории разностных схем на языке функционального анализа. Характерной чертой излагаемой теории разностных схем является то, что она позволяет не только дать обоснование имеющихся разностных схем (доказать их устойчивость, сходимость, получить оценку порядка точности и т. д.), но и позволяет сформулировать общие принципы построения разностных схем заданного качества для решения различных классов задач математической физики.

Разностные схемы трактуются как операторные или операторно-разностные уравнения с линейными операторами, зависящими от параметра  $h$  (аналога шага сетки) и заданными на абстрактном линейном нормированном пространстве любого числа измерений.

Ключевым понятием теории разностных схем является устойчивость. Поэтому основное внимание в главе VI уделяется изучению устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем в гильбертовом пространстве. Найдены эффективные до-

статочные условия и получены априорные оценки, выражающие устойчивость двухслойных и трехслойных схем.

Сформулированы и проиллюстрированы на ряде примеров правила проверки устойчивости конкретных разностных схем.

Достаточные условия устойчивости позволяют формулировать общий принцип регуляризации схем для получения разностных схем заданного качества.

В главе VII суммированы результаты многочисленных исследований, посвященных экономичным методам решения многомерных задач математической физики. Экономичные схемы для нестационарных задач делятся на две группы:

1) факторизованные схемы, обладающие аппроксимацией в обычном смысле,

2) аддитивные схемы, которые представляют собой систему простых промежуточных схем, осуществляющую переход со слоя  $j$  на слой  $j + 1$ , и аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение в суммарном смысле.

Для каждого типа схем указаны методы исследования аппроксимации и устойчивости.

В главе VIII дано изложение итерационных методов решения уравнений  $Au = f$ , где  $A$  — линейный (не обязательно самосопряженный) оператор в гильбертовом пространстве.

Теория итерационных методов трактуется как раздел общей теории устойчивости операторно-разностных схем (двухслойных и трехслойных). Основное внимание уделяется получению эффективных оценок скорости сходимости итераций и выбору оптимальных параметров. В § 1 гл. VIII дано изложение методов переменных направлений для решения разностной задачи Дирихле и указаны оптимальные наборы итерационных параметров.

Мы ограничились, в основном, изложением теории разностных схем для линейных уравнений. В этом случае теоретическое исследование можно провести с достаточной полнотой. В тексте приведены некоторые схемы для квазилинейных уравнений параболического типа.

В конце книги дан список литературы, не претендующий на полноту, но позволяющий читателю получить более полное представление об объектах и методах исследований, проводившихся большим числом авторов.

В основу книги положены лекции, читавшиеся автором в 1960—1970 гг. в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова для студентов физического и механико-математического факультетов. При написании текста использовался также конспект лекций в Летней школе по численным методам в г. Киеве (1966). Эти лекции были изданы на рота-принте в 1969 г. (А. А. Самарский, Лекции по теории разностных схем, издание Вычислительного центра АН СССР, Москва, 1969 г.).

Считаю приятным долгом выразить благодарность моему учителю Андрею Николаевичу Тихонову, многолетняя совместная работа с которым способствовала определению содержания и характера изложения теории разностных схем. С признательностью отмечаю помощь, которую оказали при оформлении конспекта лекций в Летней школе В. Б. Андреев, А. В. Гулин, Л. М. Дегтярев, Т. С. Иванова, И. Н. Молчанов, Ю. П. Попов, В. Г. Приказчиков, А. П. Фаворский, И. В. Фрязинов. Глубокую благодарность выражаю А. В. Гулину и И. В. Фрязинову за большую помощь, оказанную ими при подготовке к печати этой книги.

*А. Самарский*

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В КНИГЕ

$\omega_h = \{x_i = ih, h > 0, i = 1, 2, \dots, N-1, hN = l\}$  — равномерная сетка на интервале  $(0, l)$ ,

$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, h > 0, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$  — равномерная сетка на отрезке  $[0, l]$ ,

$h$  — шаг сетки  $\omega_h$ ,

$x = x_i$  — узел сетки  $\omega_h$ ,

$y = y_i = y(x_i)$  — функция, заданная на  $\omega_h$ ,

$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h$  — правая разностная производная в точке  $x_i$ ,

$y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h$  — левая разностная производная в точке  $x_i$ ,

$y_{\bar{x}x} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$  — вторая разностная производная в точке  $x_i$ ,

$\hat{\omega}_h = \{x_i \in (0, l), i = 1, 2, \dots, N-1\}$  — неравномерная сетка на интервале  $(0, l)$ ,

$\hat{\bar{\omega}}_h = \{x_i \in [0, l], i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$  — неравномерная сетка на отрезке  $[0, l]$ ,

$h_i = x_i - x_{i-1}$  — шаг сетки  $\hat{\omega}_h$ ,

$\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ ,

$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}$ ,  $y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i$ ,

$y_{\bar{x}} = (y_{i+1} - y_i)/\bar{h}_i$ ,

$y_{\bar{x}x} = \frac{1}{\bar{h}_i} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$ .

Скалярные произведения и нормы на сетке:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$\|y\|_C = \max_{x_i \in \hat{\omega}_h} |y(x_i)|,$$

$$\|\Phi\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h \Phi_k \right|,$$

$$\|\Phi\|_{(-2)} = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \sum_{k=1}^i h \Phi_k \right)^2 \right)^{1/2}.$$

$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \tau > 0, j = 0, 1, \dots\}$  — временная сетка,

$\tau$  — шаг сетки  $\omega_\tau$ ,

$y = y^j = y(t_j)$  — функция, заданная на  $\omega_\tau$ ,

$\hat{y} = y^{j+1} = y(t_{j+1}), \check{y} = y^{j-1} = y(t_{j-1}),$

$y_t = (\hat{y} - y)/\tau, y_{\check{t}} = (y - \check{y})/\tau, y_0 = (\hat{y} - \check{y})/(2\tau),$

$y_{\bar{t}} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2,$

$x = x_i = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \dots, x_\rho^{(i_\rho)})$  — узел  $p$ -мерной прямоугольной сетки  $\omega_h$ ,

$x_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha i_\alpha,$

$h_\alpha$  — шаг сетки  $\omega_h$  по направлению  $\alpha$ ,

$x_i^{(\pm 1\alpha)} = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_\alpha^{(i_\alpha)} \pm h_\alpha, \dots, x_\rho^{(i_\rho)}),$

$y = y(x_i), y^{(\pm 1\alpha)} = y(x_i^{(\pm 1\alpha)}),$

$y_{x_\alpha} = (y^{(+1\alpha)} - y)/h_\alpha,$

$y_{\bar{x}_\alpha} = (y - y^{(-1\alpha)})/h_\alpha,$

$y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = (y^{(+1\alpha)} - 2y + y^{(-1\alpha)})/h_\alpha^2,$

$\tilde{\Omega}$  — множество функций, заданных на некоторой сетке  $\omega_h$  и обращающихся в нуль на ее границе,

$H$  — гильбертово пространство,

$(y, v)$  — скалярное произведение элементов  $y, v \in H, \|y\| = \sqrt{(y, y)},$

$\mathcal{D}(A)$  — область определения оператора  $A,$

$\mathcal{R}(A)$  — множество значений оператора  $A,$

$E$  — единичный оператор,

$A: H \rightarrow H$  — оператор  $A$  с  $\mathcal{D}(A) = H$  и  $\mathcal{R}(A) \subseteq H,$

$A^*$  — оператор, сопряженный оператору  $A,$

$A^{-1}$  — оператор, обратный оператору  $A,$

$S$  — оператор перехода,

$T$  — разрешающий оператор,

$A > 0$  — положительный оператор,

$A \geq 0$  — неотрицательный оператор,

$A \geq \delta E, \delta > 0$  — положительно определенный оператор,

$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}, y \in H,$

$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}, \varphi \in H.$

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

---

Настоящая глава носит вводный характер. В §§ 1, 2 на простейших примерах поясняются основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость и дается представление о некоторых методах исследования устойчивости и сходимости, таких как метод разделения переменных, принцип максимума, метод энергетических неравенств. В § 3 изложены необходимые для дальнейшего вспомогательные сведения из функционального анализа.

---

### § 1. Основные понятия

**1. Сетки и сеточные функции.** Для того, чтобы написать разностную схему, приближенно описывающую данное дифференциальное уравнение, нужно совершить следующие два шага.

1. Необходимо заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения.

2. Необходимо заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и для начальных данных.

После осуществления такой процедуры мы приходим к алгебраической системе уравнений. Таким образом, задача о численном решении исходного (линейного) дифференциального уравнения сводится к вопросу о нахождении решения полученной алгебраической системы.

Остановимся на этих вопросах несколько подробнее.

При численном решении той или иной математической задачи мы, очевидно, не можем воспроизвести разностное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства.

Естественно поэтому выбрать в этой области некоторое конечное множество точек и приближенное решение искать только

в этих точках. Такое множество точек называется *сеткой*. Отдельные точки называют *узлами* сетки.

Функция, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*. Таким образом, мы заменили область непрерывного изменения аргумента сеткой, т. е. областью дискретного изменения аргумента; иными словами, мы осуществили аппроксимацию пространства решений дифференциального уравнения пространством сеточных функций.

Свойства разностного решения и, в частности, его близость к точному решению зависят от выбора сетки.

Рассмотрим несколько примеров сеток.

**Пример 1.** Равномерная сетка на отрезке. Разобьем единичный отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  равных частей. Расстояние между соседними узлами  $x_i - x_{i-1} = h = 1/N$  назовем *шагом* сетки. Точки деления  $x_i = ih$  — узлы сетки. Множество всех узлов  $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\}$  и составляет сетку (рис. 1), в данном случае введенную на отрезке.



Рис. 1.

В это множество можно включить граничные точки  $x_0 = 0, x_N = 1$ . Обозначим  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N-1, N\}$ .

На отрезке  $[0, 1]$  вместо функции непрерывного аргумента  $y(x)$  будем рассматривать функцию дискретного аргумента  $y_h(x_i)$ . Значения этой функции вычисляются в узлах сетки  $x_i$ , а сама функция зависит от шага сетки  $h$  как от параметра.

**Пример 2.** Равномерная сетка на плоскости. Рассмотрим множество функций двух аргументов  $u(x, t)$ . В качестве области определения выберем прямоугольник

$$\bar{\mathcal{D}} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}.$$

Разобьем отрезки  $[0, 1]$  оси  $x$  и  $[0, T]$  оси  $t$  соответственно на  $N_1$  и  $N_2$  частей; пусть  $h = 1/N_1, \tau = T/N_2$ . Через точки деления проведем прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получим узлы  $(x_i, t_j)$ , которые и образуют сетку (рис. 2)

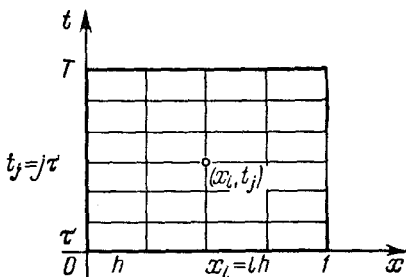


Рис. 2.

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) \in \bar{\mathcal{D}}\}.$$

Эта сетка имеет шаги  $h$  и  $\tau$  соответственно по направлениям  $x$  и  $t$ . Соседними узлами сетки называются узлы, лежащие на од-

ной и той же прямой (горизонтальной или вертикальной), расстояние между которыми равно шагу сетки ( $h$  или  $\tau$ ).

Пример 3. Неравномерная сетка на отрезке. Рассмотрим отрезок  $0 \leq x \leq 1$ . Вводя произвольные точки  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < 1$ , разобьем его на  $N$  частей. Множество узлов  $\{x_i, i = 0, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$  образует неравномерную сетку  $\bar{\omega}_h$   $[0, 1]$ . Расстояние между соседними узлами — шаг сетки, — равно  $h_i = x_i - x_{i-1}$  и зависит уже от номера  $i$  узла, т. е. является сеточной функцией. Шаги сетки удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1.$$

Пример 4. Сетка в двумерной области. Пусть на плоскости  $x = (x_1, x_2)$  дана область  $G$  сложной формы с границей  $\Gamma$ . Проведем прямые  $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_1 > 0$ ;  $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_2 > 0$ . Тогда на плоскости  $(x_1, x_2)$  получим сетку (решетку) с узлами  $(i_1 h_1, i_2 h_2), i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Эта решетка равномерна по каждому из направлений  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . Нас интересуют только те узлы, которые принадлежат области  $\bar{G} = G + \Gamma$ , включая границу  $\Gamma$ . Те узлы  $(i_1 h_1, i_2 h_2)$ , которые попали внутрь  $G$ , назовем *внутренними*, а их совокупность обозначим  $\omega_h$  (рис. 3). Рассмотрим точки пересечения прямых  $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$  и  $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  с границей  $\Gamma$ ; эти точки на-

зовем *граничными* узлами, а множество всех граничных узлов обозначим  $\gamma_h$ . На рис. 3 знаком  $\times$  обозначены граничные узлы, а значком  $\circ$  — внутренние узлы. Из рис. 3 видно, что имеются граничные узлы, которые отстоят от ближайших к ним внутренних узлов на расстоянии, меньшем  $h_1$  или  $h_2$ . Таким образом, хотя сетка на плоскости и равномерна по  $x_1$  и  $x_2$ , но сетка  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  для области  $\bar{G}$  неравномерна вблизи границы. Более подробно эта сетка будет рассмотрена в гл. IV.

Итак, область  $\bar{G}$  изменения аргумента  $x$  мы заменяем сеткой  $\bar{\omega}_h$ , т. е. конечным множеством точек  $x_i$ , принадлежащих  $\bar{G}$ .

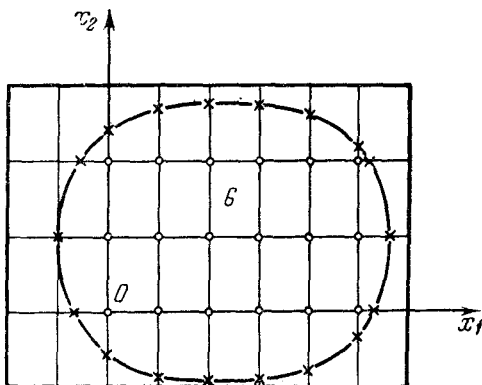


Рис. 3.



Вместо функций  $u(x)$  непрерывного аргумента  $x \in \bar{G}$  будем рассматривать сеточные функции  $y(x_i)$ , т. е. функции точки  $x_i$ , являющейся узлом сетки  $\omega_h = \{x_i\}$ . Сеточную функцию  $y(x_i)$  можно представить в виде вектора. Если перенумеровать все узлы в некотором порядке  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , то значения сеточной функции в этих узлах можно рассматривать как компоненты вектора

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Если область  $G$ , в которой построена сетка, конечна, то размерность  $N$  вектора  $Y$  конечна. В случае неограниченной области  $G$  сетка состоит из бесконечного числа узлов и размерность вектора  $Y$  также бесконечна.

Обычно рассматриваются множества сеток  $\{\omega_h\}$ , зависящих от шага  $h$  как от параметра. Поэтому и сеточные функции  $y_h(x)$  зависят от параметра  $h$  (или от числа узлов  $N$  в случае равномерной сетки). Если сетка  $\omega_h$  неравномерна, то под  $h$  следует понимать вектор  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$  с компонентами  $h_1, \dots, h_N$ . Это же замечание относится и к случаю, когда область  $G$  многомерна,  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ; тогда  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ , если сетка  $\omega_h$  равномерна по каждому из аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_p$ .

Функции  $u(x)$  непрерывного аргумента  $x \in G$  являются элементами некоторого функционального пространства  $H_0$ . Множество сеточных функций  $y_h(x)$  образует пространство  $H_h$ . Таким образом, используя метод конечных разностей, мы заменяем пространство  $H_0$  пространством  $H_h$  сеточных функций  $y_h(x)$ .

Рассматривая множество сеток  $\{\omega_h\}$ , получаем множество  $\{H_h\}$  пространств сеточных функций, зависящих от параметра  $h$ . На линейном пространстве  $H_h$  вводится норма  $\|\cdot\|_h$ , являющаяся сеточным аналогом нормы  $\|\cdot\|_0$  в исходном пространстве  $H_0$ .

Укажем простейшие типы норм в  $H_h$  для случая сеток  $\omega_h = \{x_i = ih\}$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  (индекс  $h$  у  $y_h$  опускаем).

1) Сеточный аналог нормы в  $C$ :

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)| \quad \text{или} \quad \|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|.$$

2) Сеточные аналоги нормы в  $L_2$ :

$$\|y\| = \left( \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h \right)^{1/2} \quad \text{или} \quad \|y\| = \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 h \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем будем, как правило, пользоваться нормами, индуцированными скалярными произведениями на  $H_h$  (сеточными аналогами норм в  $L_2$ ,  $W_2^1$  и др.).

Пусть  $u(x)$  — решение исходной непрерывной задачи,  $u \in H_0$ ,  $y_h$  — решение приближенной (разностной) задачи,  $y_h \in H_h$ . Основным интересом для теории приближенных методов представляет оценка близости  $y_h$  к  $u$ . Однако  $y_h$  и  $u$  являются векторами из разных пространств. Имеются две возможности:

1. Сеточная функция  $y_h$ , заданная в узлах  $\omega_h(G)$  доопределяется (например, при помощи линейной интерполяции) во всех остальных точках  $x$  области  $G$ . В результате получаем функцию  $\tilde{y}(x, h)$  непрерывного аргумента  $x \in G$ . Разность  $\tilde{y}(x, h) - u(x)$  принадлежит  $H_0$ . Близость  $y_h$  к  $u$  характеризуется числом  $\|\tilde{y}(x, h) - u(x)\|_0$ , где  $\|\cdot\|_0$  — норма на  $H_0$ .

2. Пространство  $H_0$  отображается на пространство  $H_h$ . Каждой функции  $u(x) \in H_0$  ставится в соответствие сеточная функция  $u_h(x)$ ,  $x \in \omega_h$ , так что  $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$ , где  $\mathcal{P}_h$  — линейный оператор из  $H_0$  в  $H_h$ . Это соответствие можно осуществить различными способами (выбирая разные операторы  $\mathcal{P}_h$ ). Если  $u(x)$  — непрерывная функция, то полагаем  $u_h(x) = u(x)$ , где  $x \in \omega_h$ . Иногда определяют  $u_h(x_i)$  в узле  $x_i \in \omega_h$  как интегральное среднее значение  $u(x)$  по некоторой окрестности (например, диаметра  $O(h)$ ) данного узла  $x_i \in \omega_h$ . В дальнейшем всюду будем предполагать, что  $u(x)$  непрерывная функция и  $u_h(x_i) = u(x_i)$  для всех  $x_i \in \omega_h$ .

Имея сеточную функцию  $u_h$ , образуем разность  $y_h - u_h$ , являющуюся вектором пространства  $H_h$ . Близость  $y_h$  к  $u$  характеризуется числом  $\|y_h - u_h\|_h$ , где  $\|\cdot\|_h$  — норма на  $H_h$ . При этом естественно требовать, чтобы норма  $\|\cdot\|_h$  аппроксимировала норму  $\|\cdot\|_0$  в следующем смысле:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

для любого вектора  $u$  из  $H_0$ . Это условие будем называть условием согласования норм в  $H_h$  и  $H_0$ .

Мы всюду используем второй путь, исследуем погрешность разностных методов в пространстве сеточных функций. В большинстве случаев эти пространства являются конечномерными.

Как будет показано в дальнейшем, оказывается возможным провести изложение основных вопросов теории разностных схем, трактуя  $H_h$  как абстрактные линейные пространства любой размерности.

После того, как мы познакомились на простейших примерах со способами построения сеток и тем самым пространств  $H_h$  сеточных функций, перейдем к вопросу о разностной аппроксимации дифференциальных операторов.

**2. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов.** Пусть дан дифференциальный оператор  $L$ , действующий на функцию  $v = v(x)$ . Заменяя входящие в  $Lv$

производные разностными отношениями, мы получим вместо  $Lv$  разностное выражение  $L_h v_h$ , являющееся линейной комбинацией значений сеточной функции  $v_h$  на некотором множестве узлов сетки, называемом *шаблоном*:

$$L_h v_h(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}(x)} A_h(x, \xi) v_h(\xi)$$

или

$$(L_h v_h)_i = \sum_{x_j \in \mathcal{M}(x_i)} A_h(x_i, x_j) v_h(x_j),$$

где  $A_h(x, \xi)$  — коэффициенты,  $h$  — шаг сетки,  $\mathcal{M}(x)$  — шаблон в точке  $x$ . Такая приближенная замена  $Lv$  на  $L_h v_h$  называется аппроксимацией дифференциального оператора разностным оператором (или *разностной аппроксимацией оператора  $L$* ).

Изучение разностных аппроксимаций оператора  $L$  обычно проводят локально, т. е. в любой фиксированной точке  $x$  пространства. Если  $v(x)$  непрерывная функция, то  $v_h(x) = v(x)$ . Прежде чем приступить к разностной аппроксимации оператора  $L$ , необходимо выбрать шаблон, т. е. указать множество соседних с узлом  $x$  узлов, в которых значения сеточной функции  $v(x)$  могут быть использованы для аппроксимации оператора  $L$ .

В этом пункте рассматриваются примеры разностной аппроксимации для простейших дифференциальных операторов.

**Пример 1.**  $Lv = \frac{dv}{dx}$ .

Фиксируем некоторую точку  $x$  оси  $Ox$  и возьмем точки  $x - h$  и  $x + h$ , где  $h > 0$ . Для аппроксимации  $Lv$  можно воспользоваться любым из следующих выражений

$$L_h^+ v \equiv \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \equiv v_x, \quad (1)$$

$$L_h^- v \equiv \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \equiv v_{\bar{x}}. \quad (2)$$

Выражение (1) есть *правая разностная производная* (ее мы будем обозначать  $v_x$ ), а (2) — *левая разностная производная* (обозначение  $v_{\bar{x}}$ ). Разностные выражения  $L_h^+ v$  и  $L_h^- v$  определены на двух точках (имеют двухточечные шаблоны  $x, x+h$  и  $x-h, x$  соответственно, см. рис. 4).

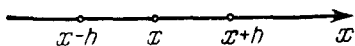


Рис. 4.

Кроме того, в качестве разностной аппроксимации производной  $\frac{dv}{dx}$  можно взять линейную комбинацию выражений (1) и (2)

$$L_h^{(\sigma)} v \equiv \sigma v_x + (1 - \sigma) v_{\bar{x}}, \quad (3)$$

где  $\sigma$  — любое вещественное число. В частности, при  $\sigma = 0, 5$  получаем так называемую *центральную (двухстороннюю) разностную производную*

$$v_x^\circ = \frac{1}{2} (v_x + v_{\bar{x}}) = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h}. \quad (4)$$

Таким образом, оказывается, что можно написать бесчисленное множество разностных выражений, аппроксимирующих  $Lv = v'$ . Возникает вопрос: какую ошибку мы допускаем, используя ту или иную разностную аппроксимацию, и как ведет себя разность  $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$  в точке  $x$  при  $h \rightarrow 0$ . Величина  $\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$  называется *погрешностью разностной аппроксимации  $Lv$  в точке  $x$* . Разложим  $v(x)$  по формуле Тейлора

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) + O(h^3)$$

(предполагая при этом, что функция  $v(x)$  — достаточно гладкая в некоторой окрестности  $(x - h_0, x + h_0)$  точки  $x$  и  $h < h_0$ ,  $h_0$  — фиксированное число). Подставляя это разложение в (1), (2) и (4), получим

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \frac{h}{2} v''(x) + O(h^2), \\ v_{\bar{x}} &= \frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v'(x) - \frac{h}{2} v''(x) + O(h^2), \\ v_x^\circ &= \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} = v'(x) + O(h^2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Отсюда видно, что

$$\psi = v_x - v'(x) = O(h), \quad \psi = v_{\bar{x}} - v'(x) = O(h), \quad \psi = v_x^\circ - v'(x) = O(h^2).$$

Пусть  $V$  — класс достаточно гладких функций  $v \in V$ , заданных в окрестности  $\mathcal{M}(x, h_0)$  точки  $x$ , содержащей при  $h < h_0$  шаблон  $\mathcal{M}(x, h)$  разностного оператора  $L_h$ . Будем говорить, что  $L_h$  *аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$  с порядком  $m > 0$  в точке  $x$* , если

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m).$$

Таким образом, левая и правая разностные производные аппроксимируют  $Lv = v'$  с первым порядком, а центральная разностная производная — со вторым порядком.

Пример 2.  $Lv = v'' = \frac{d^2 v}{dx^2}$ .

Чтобы написать разностную аппроксимацию второй производной, надо использовать три точки  $(x - h, x, x + h)$ , т. е. взять

трехточечный шаблон. В этом случае

$$L_h v = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}. \quad (6)$$

Замечая, что правая разностная производная в точке  $x$  совпадает с левой разностной производной в точке  $x+h$ , т. е.  $v_x(x) = v_{\bar{x}}(x+h)$ , перепишем (6) в виде

$$L_h v = \frac{v_x(x) - v_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h} [v_{\bar{x}}(x+h) - v_{\bar{x}}(x)] = v_{\bar{x}x}(x). \quad (7)$$

Пользуясь разложением функции  $v(x)$  по формуле Тейлора, нетрудно показать, что порядок аппроксимации в этом случае равен двум, т. е.

$$v_{\bar{x}x} - v''(x) = O(h^2),$$

так как

$$v_{\bar{x}x} = v'' + \frac{h^2}{12} v^{(4)} + O(h^4). \quad (8)$$

Пример 3.  $Lv = v^{(4)}$ .

Выберем пятиточечный шаблон, состоящий из точек

$$(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h)$$

и определим

$$L_h v = v_{\bar{x}x\bar{x}x}.$$

Нетрудно проверить, что  $L_h$  аппроксимирует  $L$  со вторым порядком, причем

$$v_{\bar{x}x\bar{x}x} - v^{(4)} = \frac{h^2}{6} v^{(6)} + O(h^4).$$

Разложение погрешности аппроксимации  $\psi = L_h v - Lv$  по степеням  $h$  можно использовать для повышения порядка аппроксимации. В самом деле, имеем

$$v_{\bar{x}x} - v'' = \frac{h^2}{12} v^{(4)} + O(h^4) = \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x\bar{x}x} + O(h^4)$$

Отсюда следует, что оператор

$$L'_h v = v_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x\bar{x}x},$$

определенный на шаблоне  $(x-2h, x-h, x, x+h, x+2h)$  аппроксимирует  $Lv = v''$  с четвертым порядком.

В принципе такой процесс повышения порядка аппроксимации можно продолжить дальше и получить любой порядок аппроксимации в классе достаточно гладких функций  $v \in V$ . При этом шаблон, т. е. число используемых узлов, возрастает. Однако указанный прием повышения порядка разностной аппроксимации не всегда можно рекомендовать для практического

применения, так как качество получающихся при этом операторов ухудшается (в смысле монотонности, условий существования обратного оператора, устойчивости и т. д.).

Пример 4.  $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ,  $v = v(x, t)$ .

Пусть  $(x, t)$  — фиксированная точка плоскости  $(x, t)$ ,  $h > 0$  и  $\tau > 0$  — два числа (шаги). Чтобы написать разностную аппроксимацию  $L_{h\tau}$  для оператора  $L$ , мы должны прежде всего определить шаблон.

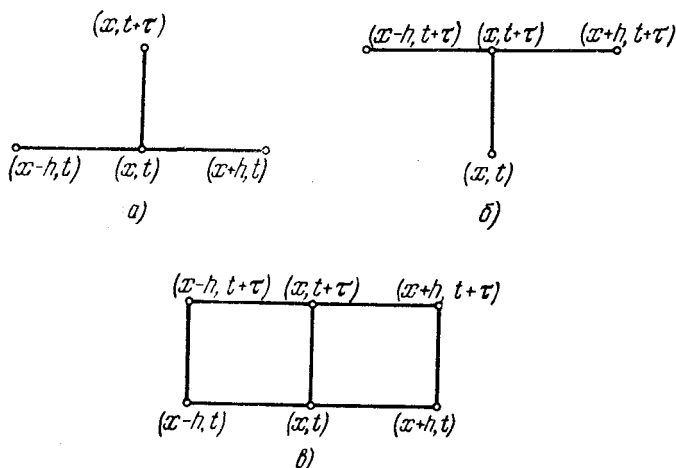


Рис. 5.

Остановимся сначала на аппроксимациях простейшего типа. Пусть шаблон состоит из четырех точек (рис. 5, а).

Определим  $L_{h\tau}$  так:

$$L_{h\tau}^{(0)}v = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} - \frac{v(x + h, t) - 2v(x, t) + v(x - h, t)}{h^2}. \quad (9)$$

Для упрощения записи разностных выражений весьма важным является вопрос о введении рациональной символики.

Условимся о следующих обозначениях:

$$v = v(x, t), \quad \hat{v} = v(x, t + \tau), \quad \check{v} = v(x, t - \tau).$$

В этих обозначениях, например, разностная производная по  $t$  может быть записана следующим образом:

$$v_t = \frac{v(x, t + \tau) - v(x, t)}{\tau} = \frac{\hat{v} - v}{\tau}. \quad (10)$$

Учитывая (7) и (10), запишем (9) в виде

$$L_{h\tau}^{(0)}v = v_t - v_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (9')$$

При построении  $L_{h\tau}^{(0)}$  мы взяли значение  $v_{\bar{x}x}$  в момент  $t$  (на нижнем слое).

Используя шаблон, изображенный на рис. 5, б, можно взять  $v_{\bar{x}x}$  в момент  $t + \tau$  (на верхнем слое), что дает

$$L_{h\tau}^{(1)}v = v_t - \hat{v}_{\bar{x}x}. \quad (11)$$

Взяв линейную комбинацию (9') и (11), получим однопараметрическое семейство разностных операторов

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}v = v_t - (\sigma \hat{v}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma) v_{\bar{x}x}), \quad (12)$$

определенных при  $\sigma \neq 0$  и  $\sigma \neq 1$  на шеститочечном шаблоне, указанном на рис. 5, в.

Для оценки порядка разностной аппроксимации воспользуемся формулами

$$v_t = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v(x, t + \tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2),$$

$$\begin{aligned} v_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + O(h^4) = \\ &= \frac{\partial^2 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2 + \tau^2), \end{aligned}$$

$$\hat{v}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2 \partial t} + O(h^2 + \tau^2).$$

Подставляя эти выражения в формулы для  $L_{h\tau}^{(0)}v$ ,  $L_{h\tau}^{(1)}v$ ,  $L_{h\tau}^{(\sigma)}v$ , получим

$$1) \quad L_{h\tau}^{(0)}v = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau) = Lv(x, t) + O(h^2 + \tau),$$

т. е.

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)}v - Lv(x, t) = O(h^2 + \tau),$$

$$\begin{aligned} 2) \quad L_{h\tau}^{(1)}v &= \frac{\partial v(x, t + \tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau) = \\ &= Lv(x, t + \tau) + O(h^2 + \tau), \end{aligned}$$

т. е.

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)}v - Lv(x, t + \tau) = O(h^2 + \tau),$$

$$\begin{aligned} 3) \quad L_{h\tau}^{(0,5)}v &= \frac{\partial v(x, t + \tau/2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(x, t + \tau/2)}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau^2) = \\ &= Lv(x, t + \tau/2) + O(h^2 + \tau^2), \end{aligned}$$

т. е.

$$\psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)}v - Lv(x, t + \tau/2) = O(h^2 + \tau^2).$$

Таким образом, оператор  $L_{h\tau}^{(\sigma)}$  аппроксимирует  $L$  со вторым порядком по  $h$  при любом  $\sigma$ , с первым порядком по  $\tau$  при  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 1$  и со вторым порядком по  $\tau$  при  $\sigma = 0,5$ .

Пример 5.  $Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ .

В этом случае для записи разностного оператора  $L_{h\tau}$  надо использовать значения сеточной функции в три момента времени  $t - \tau$ ,  $t$ ,  $t + \tau$ . Минимальным является пятиточечный шаблон (рис. 6, а, б, в, г).

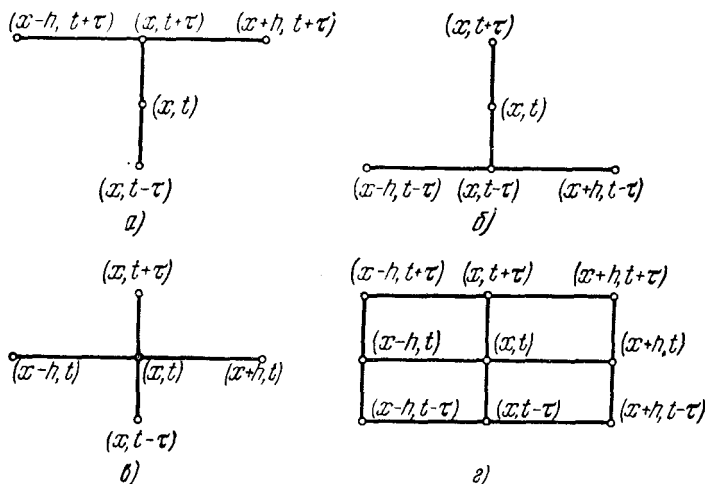


Рис. 6.

Одна из возможных аппроксимаций (на шаблоне 6, в), использующая значение  $v_{\bar{x}\bar{x}}$  на среднем слое  $t$ , имеет вид

$$L_{h\tau}v = v_{\bar{t}\bar{t}} - v_{\bar{x}\bar{x}}, \quad (13)$$

где

$$v_{\bar{t}\bar{t}}(x, t) = (v(x, t + \tau) - 2v(x, t) + v(x, t - \tau))/\tau^2.$$

Аналогично можно написать оператор

$$L_{h\tau}v = v_{\bar{t}\bar{t}} - \hat{v}_{\bar{x}\bar{x}} \quad (\text{на шаблоне 6, а}). \quad (14)$$

На девятиточечном шаблоне (рис. 6, г) можно написать двухпараметрическое семейство разностных операторов

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)}v = v_{\bar{t}\bar{t}} - (\sigma_1 \hat{v}_{\bar{x}\bar{x}} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) v_{\bar{x}\bar{x}} + \sigma_2 \check{v}_{\bar{x}\bar{x}}). \quad (15)$$

При  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  отсюда следует (13), и при  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = 1$  следует (14). Замечая, что  $v_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2)$ ,  $v_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2)$ , видим, что оператор (13) имеет аппроксимацию  $O(h^2 + \tau^2)$ . Этот же порядок аппроксимации имеет и оператор (15) при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , где  $\sigma$  — любое число.



Отметим, что параметры  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , так же, как и параметр  $\sigma$  в предыдущем примере, управляют не только порядком аппроксимации, но, как будет показано ниже, и таким важным свойством, как устойчивость соответствующей разностной схемы.

Пример 6.  $Lv = v''$ . Нерегулярный шаблон (неравномерная сетка).

Пусть  $h_- > 0$  и  $h_+ > 0$  — два числа. Возьмем трехточечный шаблон  $(x - h_-, x, x + h_+)$ . Если  $h_- \neq h_+$ , то шаблон будем называть *нерегулярным* (сетка, построенная из таких шаблонов, *неравномерна*). Введем обозначения

$$v_{\bar{x}} = \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-}, \quad v_x = \frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_+}, \quad h = 0,5(h_- + h_+)$$

и определим  $L_h v$  по формуле

$$L_h v = \frac{1}{h} \left[ \frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_+} - \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-} \right] = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h}. \quad (16)$$

Если  $h_- = h_+ = h$ , то  $L_h v$  совпадает с выражением (7) (см. пример 2). Вычислим локальную погрешность аппроксимации (в точке  $x$ ):

$$\psi(x) = L_h v(x) - Lv(x).$$

Учитывая разложение достаточно гладкой функции  $v(x)$  в окрестности узла  $x$ :

$$v(x + h_+) = v(x) + h_+ v'(x) + \frac{h_+^2}{2} v''(x) + \frac{h_+^3}{6} v'''(x) + O(h_+^4),$$

$$v(x - h_-) = v(x) - h_- v'(x) + \frac{h_-^2}{2} v''(x) - \frac{h_-^3}{6} v'''(x) + O(h_-^4),$$

получаем

$$v_x = v'(x) + \frac{h_+}{2} v''(x) + \frac{h_+^2}{6} v'''(x) + O(h_+^3),$$

$$v_{\bar{x}} = v'(x) - \frac{h_-}{2} v''(x) + \frac{h_-^2}{6} v'''(x) + O(h_-^3),$$

$$L_h v = \frac{v_x - v_{\bar{x}}}{h} = v''(x) + \frac{h_+^2 - h_-^2}{6h} v'''(x) + O(h^2)$$

(пользуемся тем, что  $h_{\pm} < 2h$ ).

Выражение для  $\psi(x)$  примет вид

$$\psi = L_h v - Lv = \frac{h_+ - h_-}{3} v''' + O(h^2) = O(h). \quad (17)$$

Таким образом, оператор (16) на нерегулярном шаблоне ( $h_+ \neq h_-$ ) имеет первый локальный порядок аппроксимации.

**3. Погрешность аппроксимации на сетке.** До сих пор мы рассматривали локальную разностную аппроксимацию (аппроксимацию в точке). Именно в этом смысле и шла речь о порядке аппроксимации в предыдущем пункте. Обычно требуется оценка порядка разностной аппроксимации на всей сетке.

Пусть  $\omega_h$  — сетка в некоторой области  $G$  евклидова пространства  $\{x = (x_1, \dots, x_p)\}$ ,  $H_h$  — линейное пространство сеточных функций, заданных на  $\omega_h$ ,  $H_0$  — пространство гладких функций  $v(x)$ ,  $\|\cdot\|_0$  — норма на  $H_0$ ,  $\|\cdot\|_h$  — норма на  $H_h$ . Предполагается, что 1) существует оператор  $\mathcal{P}_h$  такой, что  $\mathcal{P}_h u = u_h \in H_h$  для любого  $u \in H_0$ , 2) нормы  $\|\cdot\|_h$  и  $\|\cdot\|_0$  согласованы, т. е.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_h u\|_h = \|u\|_0,$$

где  $|h|$  — норма вектора  $h$ .

Рассмотрим некоторый оператор  $L$ , заданный в  $H_0$ , и оператор  $L_h$ , преобразующий сеточную функцию  $v_h$  в сеточную функцию  $L_h v_h$ , заданную на  $\omega_h$  (т. е. действующий из  $H_h$  в  $H_h$ ).

Назовем *погрешностью аппроксимации* оператора  $L$  разностным оператором  $L_h$  сеточную функцию

$$\psi_h = L_h v_h - (Lv)_h,$$

где  $v_h = \mathcal{P}_h v$ ,  $(Lv)_h = \mathcal{P}_h(Lv)$ ,  $v$  — любая функция (вектор, элемент) из  $H_0$ .

Если  $\|\psi_h\|_h \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ , то говорят, что разностный оператор  $L_h$  *аппроксимирует* дифференциальный оператор  $L$ .

Будем говорить, что разностный оператор  $L_h$  *аппроксимирует* дифференциальный оператор  $L$  с *порядком*  $m > 0$ , если

$$\|\psi_h\|_h = \|L_h v_h - (Lv)_h\|_h = O(|h|^m), \quad (18)$$

или  $\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leq M |h|^m$ , где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $|h|$ .

**Замечания.** 1. Если  $h = (h_1, \dots, h_p)$  — вектор с компонентами  $h_1, h_2, \dots, h_p$ , то под  $|h|$  можно понимать длину  $|h| = (h_1^2 + \dots + h_p^2)^{1/2}$ . Может оказаться, что аппроксимация по  $h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  различна по порядку. Тогда вместо (18) будем иметь

$$\|L_h v_h - (Lv)_h\|_h \leq M \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^{m_\alpha}, \quad \text{где } m_\alpha > 0.$$

Выбирая среди  $m_1, \dots, m_p$  наименьшее число и обозначая его через  $m$ , получим оценку (18).

2. Если сетка  $\omega_h$  неравномерна, т. е.  $h = (h_1, \dots, h_N)$ , где  $N$  — число узлов, то, например,  $|h| = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$  или  $|h|$  есть среднее квадратичное значение.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Разностная аппроксимация на неравномерной сетке. Рассмотрим оператор  $Lv = \frac{d^2v}{dx^2}$  в пространстве  $H_0 = C^{(4)}$  функций, заданных на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Выберем на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  произвольную неравномерную сетку

$$\widehat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Оператору  $Lv$ , согласно примеру 6 предыдущего пункта, поставим в соответствие разностный оператор

$$(L_h v)_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \left[ \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right], \quad v_i = v(x_i), \quad \bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}),$$

определенный в узле  $x_i$  на нерегулярном трехточечном шаблоне  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ .

Вводя обозначения

$$v_{\bar{x}, i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{x, i} = v_{\bar{x}, i+1} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \quad v_{\hat{x}, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\bar{h}_i},$$

оператор  $L_h v$  можно записать в виде

$$(L_h v)_i = v_{\bar{x}\hat{x}, i} - v_{\hat{x}\bar{x}, i}.$$

В п. 2 была найдена локальная погрешность аппроксимации

$$\psi_i = (L_h v)_i - (Lv)_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отсюда видно, что оператор  $L_h v$  имеет в сеточной норме  $C$  первый порядок аппроксимации

$$\|\psi\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\psi_i| = O(h), \quad h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

В сеточной норме  $L_2$  также получаем первый порядок:

$$\|\psi\| = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h_i \psi_i^2 \right)^{1/2} = O(h).$$

Однако в норме

$$\|\psi\|_{(-2)} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left( \sum_{k=1}^i h_k \psi_k \right)^2 \right]^{1/2} \quad (19)$$

$\psi$  имеет второй порядок, так что

$$\|\psi\|_{(-2)} = O(h^2), \quad \text{где } h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

Докажем это утверждение. Перепишем  $\psi$  в виде

$$\psi_i = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6\bar{h}_i} v_i''' + O(h_i^2).$$

Принимая во внимание, что  $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$ , находим

$$\psi_i = \frac{h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i'''}{6h_i} + \psi_i^* = \overset{\circ}{\psi}_i + \psi_i^*,$$

где  $\psi_i^* = O(h^2)$  в любой норме. Главный член  $\overset{\circ}{\psi}_i$  в разложении

$\psi_i = \overset{\circ}{\psi}_i + \psi_i^*$  имеет «дивергентный вид». Поэтому

$$S_i = \sum_{k=1}^i h_k \overset{\circ}{\psi}_k = \sum_{k=1}^i (h_{k+1}^2 v_{k+1}''' - h_k^2 v_k''')/6 = (h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_1^2 v_1''')/6.$$

Отсюда видно, что

$$|S_i| \leq Mh^2,$$

и, следовательно,

$$\|\overset{\circ}{\psi}\|_{(-2)} = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h_i S_i^2 \right)^{1/2} = O(h^2).$$

Так как

$$\|\psi\|_{(-2)} \leq \|\overset{\circ}{\psi}\|_{(-2)} + \|\psi^*\|_{(-2)} \quad \text{и} \quad \|\psi^*\|_{(-2)} = O(h^2),$$

то  $\|\psi\|_{(-2)} \leq Mh^2$ , т. е. погрешность аппроксимации в норме  $\|\cdot\|_{(-2)}$  имеет второй порядок.

Отметим, что норма  $\|\cdot\|_{(-2)}$  согласована с нормой  $\|u\|_0 =$

$$= \left[ \int_0^1 dx \left( \int_0^x u(\xi) d\xi \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \text{так что} \quad \|u_h\|_{(-2)} \rightarrow \|u\|_0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Разобранный пример показывает, что исследование локальной аппроксимации может оказаться недостаточным для суждения о порядке разностной аппроксимации и тем самым для суждения о качестве разностного оператора.

Выбор подходящей нормы для оценки погрешности аппроксимации связан со структурой оператора и в каждом конкретном случае должен быть предметом изучения. Связь между оператором и нормой для оценки погрешности аппроксимации в общем виде установлена в гл. V. Ее конкретизация для данного случая естественно приводит к норме  $\|\cdot\|_{(-2)}$ .

Аналогичная ситуация встречается и при изучении разностных аппроксимаций для оператора  $Lu = (ku)'$ , где  $k(x)$  — кусочно-непрерывная функция (см. гл. III).

Если ищется решение  $u(x, t)$  нестационарного уравнения (например, уравнения теплопроводности), то переменная  $t$  (время) выделяется. Функция  $u(x, t)$  как функция аргумента  $x$  является элементом пространства  $H_0$ . Пусть  $\omega_h$  — сетка в области  $G$  пространства  $\{x = (x_1, \dots, x_p)\}$ ,  $\omega_\tau$  — сетка на отрезке

$0 \leq t \leq t_0$ . Сеточная функция  $y(x, t) = y_{h\tau}(x, t)$  определена на сетке

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x, t), x \in \omega_h, t \in \omega_\tau\}.$$

Как функция аргумента  $x \in \omega_h$  она является вектором пространства  $H_h$  с нормой  $\|\cdot\|_h$ . Для оценки  $y(x, t)$  на сетке  $\omega_{h\tau}$  обычно используется норма

$$\|y\|_{h\tau} = \max_{t \in \omega_\tau} \|y(t)\|_h, \quad (20)$$

или одна из норм

$$\|y\|_{h\tau} = \sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|y(t)\|_h, \quad \|y\|_{h\tau} = \left[ \sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|y(t)\|_h^2 \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Пусть  $L_{h\tau}v_{h\tau}$  — разностная аппроксимация оператора  $Lu$ ,  $u = u(x, t)$ . Оператор  $L_{h\tau}$  определен на сеточных функциях  $v_{h\tau}(x, t)$ , заданных на сетке  $\omega_{h\tau}$ .

Пусть  $v(x, t)$  как функция  $x$  принадлежит  $H_0$ . Тогда  $v_h(x, t) = \mathcal{P}_h v(x, t)$  принадлежит  $H_h$  для любого  $t \in [0, t_0]$ . Если  $v(x, t)$  непрерывна по  $t$ , то можно положить  $v_{h\tau}(x, t) = v_h(x, t)$  для всех  $t \in \omega_\tau$ . Таким образом,  $v_{h\tau}(x, t)$  задана на сетке  $\omega_{h\tau}$  и можно определить погрешность аппроксимации

$$\psi_{h\tau}(x, t) = L_{h\tau}v_{h\tau}(x, t) - (Lv)_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}.$$

Будем говорить, что  $L_{h\tau}$  аппроксимирует  $L$  с порядком  $m > 0$  по  $x$  и с порядком  $n > 0$  по  $t$ , если в классе достаточно гладких функций  $v(x, t)$  выполняется оценка

$$\|\psi_{h\tau}(x, t)\|_{h\tau} = O(|h|^m + \tau^n) \quad \text{или} \quad \|\psi_{h\tau}\|_{h\tau} \leq M(|h|^m + \tau^n),$$

где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $|h|$  и  $\tau$ .

Пример 2.  $Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$L_{h\tau}v = v_t - v_{\bar{x}x}.$$

Оператор  $L_{h\tau}$  пишется во всех внутренних узлах сетки

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, t_j = j\tau, 0 < i < N, 0 < j < j_0, j_0 = t_0/\tau\}.$$

Если  $v(x, t)$  имеет две производных по  $t$  и четыре производных по  $x$  ( $v \in C_2^4$ ), непрерывных в прямоугольнике

$$\bullet \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_0),$$

то в каждом внутреннем узле сетки  $\omega_{h\tau}$ , согласно п. 2, имеем

$$\psi_{h\tau}(x, t) = L_{h\tau}v_{h\tau} - (Lv)_{h\tau} = O(h^2 + \tau).$$

Отсюда следует, что  $L_{ht}$  аппроксимирует  $L$  со вторым порядком по  $x$  и с первым порядком по  $t$  в любой из норм (20) и (21), где  $\|\psi\|_h = \max_{x \in \omega_h} |\psi|$  либо  $\|\psi\|_h = \left( \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^2 h \right)^{1/2}$  и т. д. Таким образом, в этом случае из локальной аппроксимации следует аппроксимация на сетке.

До сих пор мы рассматривали погрешность разностной аппроксимации на функциях  $v$ , принадлежащих некоторому классу  $V$ . В частности, в наших примерах в качестве  $V$  выбирался класс достаточно гладких функций.

Пусть теперь  $v$  является решением некоторого дифференциального уравнения:  $v = u$ ; например,

$$Lu = u'' = -f.$$

В качестве разностной аппроксимации оператора, стоящего слева,  $Lv = v''$  выберем  $L_h v = v_{\bar{x}\bar{x}}$ . Выше было показано, что на равномерной сетке

$$L_h v = v'' + \frac{h^2}{12} v^{(4)} + \frac{h^4}{360} v^{(6)}(x + \theta h), \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Подставим сюда  $v = u$ ,  $u'' = -f$ ,  $u^{(4)} = -f''$  и предположим, что  $f'' = 0$ , а следовательно, и  $f^{(k)} \equiv 0$  для  $k > 2$ . Тогда  $L_h u = u'' = -f = Lu$ , т. е. погрешность аппроксимации в классе решений уравнения  $Lu = -f$ , где  $f$  — линейная функция, тождественно равна нулю,  $\psi = 0$ . В этом случае говорят, что аппроксимация точная. Если же  $f'' \neq 0$ , то разностный оператор можно подправить, вводя оператор

$$\tilde{L}_h v = L_h v + \frac{h^2}{12} f'',$$

и для этого оператора имеем  $\tilde{\psi} = L_h u - Lu = O(h^4)$ .

Таким образом, рассмотрение погрешности разностной аппроксимации на решении дифференциального уравнения может использоваться для повышения порядка аппроксимации.

**4. Постановка разностной задачи.** До сих пор мы занимались приближенной заменой дифференциальных операторов разностными. Однако задачи математической физики помимо дифференциального уравнения включают и дополнительные условия — краевые и начальные, которые обеспечивают выделение единственного решения из всей совокупности возможных решений.

Поэтому при формулировке разностной задачи, помимо аппроксимации дифференциального уравнения, необходимо эффективно описывать в разностном виде эти дополнительные условия. Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и дополнительные условия (краевые и начальные), называют *разностной схемой*.

Сначала проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

$$u' = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = u_0. \quad (22)$$

Выберем простейшую равномерную сетку

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots\}$$

и поставим в соответствие задаче (22) разностную задачу:

$$\left. \begin{array}{l} y_x = \Phi, \\ y_0 = u_0 \end{array} \right\} \text{ или } \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots; \quad y_0 = u_0.$$

При этом правую часть  $\varphi_i$  можно задавать различными способами, например,

$$\varphi_i = f(x_i), \quad \varphi_i = 0,5(f(x_i) + f(x_{i+1})),$$

лишь бы выполнялось условие  $\varphi_i - f_i = O(h)$ .

Для нахождения решения получаем рекуррентную формулу

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где } y_0 = u_0.$$

Пример 2. Краевая задача.

$$u''(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \quad (23)$$

Выберем опять равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1\}.$$

Разностную задачу запишем в виде:

$$\left. \begin{array}{l} y_{\bar{x}\bar{x}} = -\Phi, \\ y_0 = \mu_1, \\ y_N = \mu_2 \end{array} \right\} \text{ или } \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (23_h)$$

В результате получим систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Такую систему можно решать, например, методом прогонки (см. п. 9).

Пример 3. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности.

$$\left. \begin{array}{l} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{array} \right\} \quad (24)$$

Выбрав равномерную сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i = ih, \quad t_j = j\tau), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

и простейший четырехточечный шаблон (см. п. 2, пример 4), получим разностную задачу

$$y_t = y_{\bar{x}x} + \Phi,$$

или в индексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \Phi_i^j, & 1 \leq i \leq N_1 - 1, & 0 \leq j \leq N_2 - 1, \\ y_i^j &= \mu_1(t_j), & y_{N_1}^j &= \mu_2(t_j), \\ y_i^0 &= u_0(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (24_h)$$

Правую часть  $\Phi$  можно задавать различными способами

$$\Phi_i^j = f(x_i, t_j), \quad \Phi_i^j = f(x_i, t_{j+1/2}), \quad \text{и т. д.}$$

Разностная задача (24<sub>h</sub>) является примером использования так называемой *явной схемы*: значения решения на верхнем временном слое  $y^{j+1}$  определяется через значение на предыдущем слое по явным формулам

$$y^{j+1} = y^j + \tau(y_{\bar{x}x}^j + \Phi^j).$$

Рассмотрим *неявную схему*

$$\begin{aligned} y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \Phi, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \\ t \in \omega_\tau, \quad x \in \omega_h. \end{aligned}$$

Для определения значений  $\hat{y} = y^{j+1}$  на  $(j+1)$ -м слое получаем систему алгебраических уравнений

$$y^{j+1}/\tau - y_{\bar{x}x}^{j+1} = F^j, \quad F^j = y^j/\tau + \Phi^j$$

с трехдиагональной матрицей. Эту систему можно решать методом прогонки (см. п. 9).

До сих пор мы рассматривали краевые условия первого рода, которые на разностной сетке аппроксимировались точно. В случае краевых условий третьего рода вопрос об их аппроксимации требует специального исследования. На этом вопросе мы остановимся позже.

**5. О сходимости и точности схем.** При решении некоторой задачи приближенным методом в конечном счете надо иметь предварительное суждение о том, с какой точностью можно приблизить при помощи этого метода точное решение задачи.

Поэтому следует рассмотреть вопрос о сходимости и точности разностных схем.

Пусть в области  $G$  с границей  $\Gamma$  требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \quad (25)$$



удовлетворяющее дополнительным (краевым или начальным) условиям

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (26)$$

где  $f(x)$  и  $\mu(x)$  заданные функции (входные данные задачи),  $l$  — некоторый линейный дифференциальный оператор. Предположим, что решение задачи (25) — (26) существует и единственно.

Область  $G + \Gamma$  непрерывного изменения аргумента (точки) заменяется дискретным множеством точек (узлов)  $x_i$  — сеткой.

Пусть  $h$  — векторный параметр, характеризующий плотность расположения узлов,  $\omega_h$  — множество внутренних узлов сетки,  $\gamma_h$  — множество граничных узлов. Задаче (25) — (26) поставим в соответствие разностную задачу

$$L_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \omega_h; \quad l_h y_h = \chi_h \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h, \quad (27)$$

где  $\varphi_h(x)$  и  $\chi_h(x)$  — известные сеточные функции. Здесь  $L_h$  и  $l_h$  — операторы, действующие на сеточные функции, заданные для  $x \in \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ . Решение  $y_h$  задачи (27) есть сеточная функция, определяемая в узлах сетки  $\bar{\omega}_h$ . Меняя  $h$ , т. е. выбирая различные сетки  $\bar{\omega}_h$ , мы получаем множество решений  $\{y_h\}$ , зависящих от параметра  $h$ . Таким образом, следует рассматривать семейство схем (27), соответствующих различным значениям параметра  $h$ .

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной (непрерывной) задачи с заданной точностью  $\varepsilon > 0$  за конечное число действий. Чтобы выяснить принципиальную возможность приближения решения  $u$  задачи (25) — (26) решением  $y_h$  задачи (27) с любой заданной точностью  $\varepsilon > 0$  в зависимости от выбора шага  $h(\varepsilon)$ , мы должны сравнить  $y_h$  и  $u(x)$ .

Это сравнение будем проводить в пространстве  $H_h$  сеточных функций. Пусть  $u_h$  — значение  $u(x)$  на сетке  $\omega_h$ , так что  $u_h \in H_h$ .

Рассмотрим погрешность разностной схемы (27):

$$z_h = y_h - u_h.$$

Напишем условие для  $z_h$ . Подставив  $y_h = z_h + u_h$  в (27), получим для  $z_h$  задачу того же типа, что и (27):

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h; \quad l_h z_h = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (28)$$

где

$$\psi_h = \varphi_h - L_h u_h, \quad \nu_h = \chi_h - l_h u_h.$$

Правые части  $\psi_h$  и  $\nu_h$  задачи (28) называются погрешностью аппроксимации уравнения (25) разностным уравнением (27) и соответственно погрешностью аппроксимации условия (26) разностным условием  $l_h y_h = \chi_h$  на решении задачи (25) — (26).

Обычно говорят короче:  $\psi_h$  — погрешность аппроксимации для схемы  $L_h u_h = \varphi_h$  на решении  $u(x)$  уравнения (25),  $v_h$  — погрешность аппроксимации для условия  $l_h u_h = \chi_h$  на решении задачи (25) — (26).

Для оценки погрешности схемы  $z_h$  и погрешности аппроксимации  $\psi_h$ ,  $v_h$  введем на множестве сеточных функций нормы  $\|\cdot\|_{(1_h)}$ ,  $\|\cdot\|_{(2_h)}$  и  $\|\cdot\|_{(3_h)}$  соответственно.

Будем говорить, что решение разностной задачи (27) сходится к решению задачи (25) — (26) (схема (27) сходится), если

$$\|z_h\|_{(1_h)} = \|y_h - u_h\|_{(1_h)} \rightarrow 0 \quad \text{при } |h| \rightarrow 0,$$

или  $\|z_h\|_{(1_h)} = \rho(|h|)$ , где  $\rho(|h|) \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ .

Разностная схема (27) сходится со скоростью  $O(|h|^n)$  или имеет  $n$ -й порядок точности (имеет точность  $O(|h|^n)$ ), если при достаточно малом  $|h| \leq h_0$  выполняется неравенство

$$\|z_h\|_{(1_h)} = \|y_h - u_h\|_{(1_h)} \leq M |h|^n,$$

где  $M > 0$  — постоянная, не зависящая от  $|h|$ ,  $n > 0$ .

Говорят, что разностная схема (27) обладает  $n$ -м порядком аппроксимации, если

$$\|\Psi_h\|_{(2_h)} = O(|h|^n), \quad \|v_h\|_{(3_h)} = O(|h|^n).$$

Обозначая  $f_h$  и  $(Lu)_h$  значения  $f(x)$  и  $Lu(x)$  на сетке  $\omega_h$  и учитывая, что  $(f - Lu)_h = 0$ , запишем  $\psi_h$  в виде

$$\psi_h = (\varphi_h - L_h u_h) - (f_h - (Lu)_h) = (\varphi_h - f_h) + ((Lu)_h - L_h u_h) = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}.$$

Таким образом, погрешность аппроксимации схемы  $\psi_h$  складывается из погрешности аппроксимации  $\psi_h^{(1)} = \varphi_h - f_h$  правой части и погрешности аппроксимации  $\psi_h^{(2)} = (Lu)_h - L_h u_h$  дифференциального оператора.

Так как  $\psi_h$  есть погрешность аппроксимации в классе решений дифференциального уравнения, то условие  $\|\psi_h\|_{(2_h)} = O(|h|^n)$  может быть выполнено, если  $\psi_h^{(1)}$  и  $\psi_h^{(2)}$  не имеют по отдельности  $n$ -го порядка. Иллюстрирующий это утверждение пример был рассмотрен в п. 3.

Возникает вопрос: как зависит порядок точности схемы от порядка аппроксимации на решении? Погрешность  $z_h = y_h - u_h$  есть решение задачи (28) с правой частью  $\psi_h$  (и  $v_h$ ). Поэтому вопрос о связи порядка точности с порядком аппроксимации сводится к вопросу о характере зависимости решения разностной задачи от правой части. Если  $z_h$  непрерывно (и притом равномерно по  $h$ ) зависит от  $\psi_h$  и  $v_h$  (схема устойчива), то порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Определение устойчивости разностной схемы будет дано в п. 8. Остановимся сначала на связанном с постановкой разностных задач вопросе об аппроксимации краевых и начальных условий на решении исходной задачи.

**6. Метод аппроксимации краевых и начальных условий.** Из предыдущего пункта следует, что точность схемы зависит от порядка аппроксимации на решении исходной задачи не только уравнения, но и дополнительных условий (краевых или начальных).

В этом пункте мы рассмотрим ряд примеров повышения порядка аппроксимации краевых и начальных условий без увеличения числа узлов сетки, участвующих в аппроксимации.

**Пример 1.** Третья краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - qu &= -f(x), \quad q = \text{const}, \quad 0 < x < 1, \\ \frac{du(0)}{dx} &= \sigma u(0) - \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Выбрав равномерную сетку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$ , запишем разностное уравнение в виде

$$y_{\bar{x}\bar{x}} - qy = -\varphi, \quad (30)$$

где  $\varphi_i = f(x_i)$ , если  $f(x)$  — непрерывная функция.

Краевое условие при  $x = 1$  удовлетворяется точно

$$y(1) = y_N = \mu_2. \quad (31)$$

Первую производную  $u'(0)$  заменим правой разностной производной  $y_{x,0} = (y_1 - y_0)/h$  и краевое условие при  $x = 0$  напомним в виде

$$y_{x,0} = \sigma y_0 - \mu_1 \quad \text{или} \quad l_h y = \mu_1, \quad (32)$$

причем оператор  $l_h$  определен на двухточечном шаблоне  $(0, h)$ . Подставляя сюда  $y = z + u$ , где  $u$  — решение задачи (29), получим для погрешности  $z$  условие

$$z_{x,0} = \sigma z_0 - \nu_1,$$

где  $\nu_1$  — погрешность аппроксимации для краевого условия на решении, равная

$$\nu_1 = \mu_1 + u_{x,0} - \sigma u_0.$$

Разлагая  $u(x)$  в окрестности узла  $x = 0$  по формуле Тейлора:

$$u_1 = u_0 + hu'_0 + \frac{h^2}{2} u''_0 + O(h^3),$$

находим

$$u_{x,0} = u'_0 + 0,5hu''_0 + O(h^2), \quad (33)$$

$$v_1 = [\mu_1 + u'(0) - \sigma u(0)] + 0,5hu''(0) + O(h^2) = 0,5hu''(0) + O(h^2),$$

так как  $\mu_1 + u'(0) - \sigma u(0) = 0$ . Отсюда видно, что  $v_1 = O(h)$ . Подправим условие (32) так, чтобы порядок аппроксимации составлял  $O(h^2)$ . Используем для этого тот факт, что  $u(x)$  есть решение исходной задачи (29). Выразим из дифференциального уравнения  $u''(0)$ :

$$u''(0) = qu(0) - f(0). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получим

$$u_{x,0} - 0,5h(qu(0) - f(0)) = u'(0) + O(h^2), \quad (35)$$

т. е. выражение в левой части (35) аппроксимирует производную  $u'(x)$  в точке  $x = 0$  на решении уравнения  $u'' - qu = -f$  со вторым порядком.

Отсюда и из (32) следует, что краевое условие

$$y_{x,0} = \bar{\sigma}y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\sigma} = \sigma + 0,5hq, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0) \quad (36)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении задачи (29).

Отметим, что нам удалось повысить порядок аппроксимации, не увеличивая числа узлов сетки, которые использовались для аппроксимации краевого условия.

Пример 2. Третья краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \sigma u(0, t) - \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

На сетке  $\omega_{h\tau}$ , описанной в п. 1, напишем явную схему

$$y_t = y_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad (38)$$

где  $\varphi = \varphi^j = f(x_j, t_j)$ .

Эта схема имеет аппроксимацию  $O(h^2 + \tau)$ . Построим разностную аппроксимацию того же порядка для краевого условия при  $x = 0$ . Для этого рассмотрим

$$u_{x,0} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Пользуясь уравнением теплопроводности при  $x = 0$ , найдем  $\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} - f(0, t)$ . Отсюда следует, что

$$u_x(0, t) - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} - f(0, t) \right) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + O(h^2),$$

т. е. выражение, стоящее слева, аппроксимирует производную  $\frac{\partial u}{\partial x}$  при  $x=0$  с точностью  $O(h^2)$ .

Заменяя  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0}$  разностной производной  $u_{t,0} = \frac{u(0, t+\tau) - u(0, t)}{\tau}$ , получим разностное краевое условие при  $x=0$ :

$$y_{x,0} = 0,5hy_{t,0} + \sigma y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0, t). \quad (39)$$

Оно имеет аппроксимацию  $O(h^2 + \tau^2)$  на решении задачи (37). В случае неявной схемы

$$y_t = \hat{y}_{xx} + \Phi$$

вместо (39) следует взять условие

$$\hat{y}_{x,0} = 0,5hy_{t,0} + \sigma \hat{y}_0 - \hat{\mu}_1, \quad \hat{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0, t). \quad (40)$$

Пример 3. Гиперболическое уравнение второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq t_0, \\ u(0, t) &= u_1(t), & u(1, t) &= u_2(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \bar{u}_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Очевидно, что при аппроксимации задачи (41) особое внимание следует обратить на запись в разностном виде начального условия для производной  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

Пусть дана равномерная по  $x$  и  $t$  сетка  $\omega_{ht}$  с шагами  $h$  и  $\tau$  (см. п. 1).

Если мы воспользуемся простейшей аппроксимацией

$$u_t(x, 0) = \bar{u}_0(x),$$

то погрешность аппроксимации будет величиной  $O(\tau)$ . Представим  $u_t(x, 0)$  в виде

$$u_t(x, 0) = \frac{u(x, \tau) - u(x, 0)}{\tau} = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Обратимся теперь к исходному дифференциальному уравнению и найдем

$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + f(x, 0) = Lu_0(x) + f(x, 0), \quad Lu_0 = \frac{d^2 u_0}{dx^2},$$

так как  $\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{d^2 u_0(x)}{dx^2}$ . Отсюда следует, что

$$u_t(x, 0) - 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0)) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + O(\tau^2).$$

Поэтому разностное начальное условие

$$y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad \text{где} \quad \tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0)),$$

аппроксимирует на решении задачи (41) условие  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$  со вторым порядком по  $\tau$ .

Условие  $u(x, 0) = u_0(x)$  и краевые условия в данном случае аппроксимируются точно. В качестве разностной аппроксимации уравнения можно взять, например, одну из схем, рассмотренных в п. 2.

Из предыдущего изложения следует, что при повышении порядка аппроксимации краевых и начальных условий мы существенно использовали существование и непрерывность производных, входящих в уравнение, на границе области (при  $x = 0$  или  $t = 0$ ), а также существование и ограниченность третьих производных решения.

Пример 4. Трехслойная разностная схема для уравнения теплопроводности. Рассмотрим первую краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq t_0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Для решения уравнения теплопроводности (42) часто применяются так называемые трехслойные схемы, использующие значения сеточной функции  $y^{j-1}(x)$ ,  $y^j(x)$ ,  $y^{j+1}(x)$  на трех временных слоях  $t_{j-1}$ ,  $t_j$ ,  $t_{j+1}$ .

Например, трехслойная симметричная схема на равномерной сетке  $\omega_{h\tau}$  с шагами  $h$  и  $\tau$  выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} &= \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1 - 2\sigma)y^j + \sigma y^{j-1}) + \varphi^j, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_0^j = u_1^j, \quad y_N^j = u_2^j, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где  $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$ ,  $\sigma$  — вещественный параметр,  $\varphi^j = f(x_i, t_j)$ .

Так как центральная разностная производная по  $t$  аппроксимирует  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_j}$  со вторым порядком по  $\tau$ , а  $\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2)$ , то схема (43) аппроксимирует уравнение (42) с  $O(h^2 + \tau^2)$ . Нетрудно, однако, заметить, что задача (43) недоопределена. Для применения трехслойной схемы требуется задать еще одно начальное условие, например, задать  $y(x, t)$  на первом слое. Естественно потребовать, чтобы введение этого условия сохраняло аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Можно указать два способа задания  $y(x, \tau)$ . Первый способ состоит в том, что мы делаем первый шаг по двухслойной схеме

$$\frac{y^1 - y^0}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y^1 + y^0) + \Phi^0,$$

обеспечивающей определение  $y(x, \tau)$  с точностью  $O(\tau^2 + h^2)$ . Второй способ состоит в том, что мы ищем значение  $y(x, \tau)$  в виде

$$y(x, \tau) = u_0(x) + \tau \mu(x)$$

и подбираем  $\mu$  так, чтобы погрешность  $y(x, \tau) - u(x, \tau)$  не превосходила  $O(\tau^2 + h^2)$ . Подставим в формулу

$$u(x, \tau) - u_0(x) = \tau \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} + O(\tau^3)$$

значение  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0}$ , исходя из дифференциального уравнения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = Lu_0 + f(x, 0), \quad Lu_0 = \frac{d^2 u_0}{dx^2}.$$

Тогда получим

$$\mu = Lu_0 + f(x, 0),$$

и, следовательно,

$$y(x, \tau) = u_0(x) + \tau (u_0''(x) + f(x, 0)).$$

### 7. Примеры устойчивых и неустойчивых разностных схем.

Использование разностных схем позволяет свести решение задачи для дифференциального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом правые части уравнений, краевые и начальные данные, которые мы будем в дальнейшем называть одним общим термином — *входные данные* — задаются с определенной погрешностью. В процессе самого численного решения системы также неизбежны ошибки, связанные с округлением. Естественно потребовать от разностной схемы, чтобы малые ошибки, допущенные во входных данных, не нарастали в процессе вычислений и не приводили к искажению решения.

Схемы, которые в процессе счета усиливают начальные погрешности, именуются неустойчивыми и не могут быть использованы на практике.

Прежде чем дать определение устойчивости разностной схемы по входным данным, к понятию которого мы интуитивно подошли, приведем несколько примеров.

Пример 1.

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0. \quad (44)$$

Точным решением задачи (44), как нетрудно видеть, является функция  $u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$ . Задачу (44) на равномерной

сетке  $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots\}$  аппроксимирует разностная задача

$$(y_i - y_{i-1})/h + \alpha y_i = 0, \quad y_0 = u_0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (45)$$

Задачу (45) можно переписать в виде

$$y_i = s y_{i-1}, \quad s = 1/(1 + \alpha h), \quad i = 1, 2, \dots, \quad y_0 = u_0.$$

Отсюда следует

$$y_i = s^i y_0.$$

Рассмотрим фиксированную точку  $\bar{x}$  и выберем такую последовательность шагов  $h$ , чтобы  $\bar{x}$  все время оставалось узловой точкой,  $\bar{x} = i_0 h$ . Тогда при измельчении сетки,  $h \rightarrow 0$ , номер  $i_0$ , соответствующий выбранной нами точке  $\bar{x}$ , неограниченно возрастает.

Вычислим значение  $y$  в этой точке

$$y_{i_0} = s^{i_0} y_0 = e^{i_0 \ln s} y_0.$$

В силу разложения

$$\ln s = -\ln(1 + \alpha h) = -\alpha h(1 + O(h)),$$

имеем

$$y_{i_0} = y_0 e^{-\alpha h i_0 (1 + O(h))} = y_0 e^{-\alpha \bar{x} (1 + O(h))} = y_0 e^{-\alpha \bar{x}} (1 + O(h)).$$

Из последнего равенства видно, что решение разностной задачи (45) непрерывно зависит от начальных данных. В таких случаях будем говорить, что разностная схема устойчива по начальным данным.

Пример 2. Неустойчивая схема. Для задачи (44) рассмотрим схему

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \alpha y_i = 0, \quad y_0 = u_0, \quad y_1 = \bar{u}_0, \quad (46)$$

$$i = 1, 2, \dots,$$

где  $\sigma > 1$  — числовой параметр. Так как схема трехточечная (разностное уравнение имеет второй порядок), то помимо  $y_0$ , следует задать  $y_1$ . При любом  $\sigma$  схема (46) имеет, по крайней мере, первый порядок аппроксимации. Если положить  $\bar{u}_0 = (1 - \alpha h) u_0$ , то  $\bar{u}_0 - u(h) = O(h^2)$ . Частные решения разностного уравнения (46) ищем в виде  $y_i = s^i$ . Подставляя  $y_i = s^i$  в (46), получим для  $s$  квадратное уравнение

$$(\sigma - 1)s^2 - (2\sigma - 1 + \alpha h)s + \sigma = 0,$$

которое имеет два различных корня

$$s_{1,2} = \frac{2\sigma - 1 + \alpha h \pm \sqrt{1 + 2(2\sigma - 1)\alpha h + \alpha^2 h^2}}{2(\sigma - 1)}.$$



Общее решение уравнения (46) имеет вид

$$y_i = As_1^i + Bs_2^i.$$

Полагая  $i = 0$  и  $i = 1$  и учитывая, что  $y_0 = u_0$ ,  $y_1 = \bar{u}_0$ , найдем постоянные  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{\bar{u}_0 - s_2 u_0}{s_1 - s_2}, \quad B = \frac{s_1 u_0 - \bar{u}_0}{s_1 - s_2}.$$

Предположим, что  $\alpha h \ll 1$ . Тогда получим

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1} (1 + \alpha h + O(h^2)), \\ s_2 = 1 - \alpha h + O(h^2).$$

Как и в рассмотренном выше примере, зафиксируем точку  $\bar{x}$  и выберем последовательность сеток  $\bar{\omega}_h$  таких, чтобы  $\bar{x} = i_0 h$ . Нетрудно видеть, что

$$s_1^{i_0} = \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)^{i_0} e^{\alpha \bar{x}} (1 + O(h)), \quad s_2^{i_0} = e^{-\alpha \bar{x}} (1 + O(h)),$$

т. е.

$$y_{i_0} = A \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)^{\bar{x}/h} e^{\alpha \bar{x}} (1 + O(h)) + B e^{-\alpha \bar{x}} (1 + O(h)).$$

Так как  $\sigma > (\sigma - 1)$ , то при  $h \rightarrow 0$  первое слагаемое неограниченно возрастает. Не спасает положение и выбор  $\bar{u}_0 = u_0(1 - \alpha h)$ , при котором  $A = (\sigma - 1)O(h^2)$ , поскольку функция  $h^n e^{\bar{x}/h} \rightarrow \infty$  при любом конечном показателе  $n > 0$ . Можно, наконец, выбрать  $\bar{u}_0$  так, что  $A = 0$ . Для этого достаточно положить  $\bar{u}_0 = u_0 \cdot s_2$ . Однако в процессе вычислений из-за ошибок округления, решение  $s_1^i$  неизбежно появляется, что приводит к неустойчивости указанного типа. При фиксированном  $h$  эта схема приводит к нарастанию решения с ростом  $x_i = ih$ . Сгущение сетки (уменьшение  $h$ ) приводит к нарастанию ошибок. Малое изменение начальных данных приводит при  $h \rightarrow 0$  к неограниченному возрастанию решения задачи в любой фиксированной точке  $\bar{x}$ .

Разобранные примеры позволяют сделать вывод, что понятие устойчивости по входным данным совпадает с понятием непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных при  $h \rightarrow 0$ .

**8. О понятии корректности разностной задачи.** Применительно к задачам математической физики принято говорить (см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [6]), что задача поставлена корректно, если выполнены два условия:

- 1) задача однозначно разрешима при любых входных данных из некоторого класса,
- 2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных.

Аналогично определяют понятие корректности разностной задачи. Пусть  $y_h$  — решение, а  $\varphi_h$  — входные данные некоторой разностной задачи. Они зависят от параметра  $h$  (шага сетки). Меняя  $h$ , мы получим последовательности решений  $\{y_h\}$  и входных данных  $\{\varphi_h\}$ . Таким образом, мы рассматриваем не одну разностную задачу, а семейство задач, зависящее от параметра  $h$ . Понятие корректности вводится для семейства разностных задач (схем) при  $|h| \rightarrow 0$ .

Будем говорить, что *разностная задача (схема) корректна*, если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$ :

1) решение  $y_h$  разностной задачи существует и единственно для всех входных данных  $\varphi_h$  из некоторого допустимого семейства,

2) решение  $y_h$  непрерывно зависит от  $\varphi_h$ , причем эта зависимость равномерна относительно  $h$ .

Более точно, второе условие означает, что существует такая постоянная  $M > 0$ , не зависящая от  $h$ , что при достаточно малом  $|h| \leq h_0$  выполняется неравенство

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{(1_h)} \leq M \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{(2_h)}, \quad (47)$$

где  $\tilde{y}_h$  — решение задачи с входными данными  $\tilde{\varphi}_h$ , а  $\|\cdot\|_{(1_h)}$  и  $\|\cdot\|_{(2_h)}$  — нормы на множестве сеточных функций, заданных на сетке  $\omega_h$ .

Свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных, выраженное неравенством (47), называется устойчивостью схемы по входным данным или просто *устойчивостью*.

Пусть дана непрерывная задача (см. (25) — (26))

$$Lu = f(x) \text{ при } x \in G, \quad lu = \mu(x) \text{ при } x \in \Gamma, \quad (48)$$

и пусть на сетке  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  ее аппроксимирует разностная задача

$$L_h y_h = \varphi_h \text{ при } x \in \omega_h, \quad l_h y_h = \tilde{\mu}_h \text{ при } x \in \gamma_h. \quad (49)$$

Задача для погрешности  $z_h = y_h - u_h$ , где  $u_h$  — значение (проекция) решения  $u$  задачи (48) на сетке  $\omega_h$ , имеет вид

$$L_h z_h = \psi_h \text{ при } x \in \omega_h, \quad l_h z_h = \nu_h \text{ при } x \in \gamma_h, \quad (50)$$

где  $\psi_h, \nu_h$  — погрешности аппроксимации уравнения и дополнительного условия. Вместо (50) напомним формально

$$\tilde{L}_h z_h = \tilde{\psi}_h.$$

Если оператор  $\tilde{L}_h$  линеен и разностная схема корректна, то, в силу (47), будем иметь

$$\|z_h\|_{(1_h)} \leq M \|\tilde{\psi}_h\|_{(2_h)} \quad \text{или} \quad \|z_h\|_{(1_h)} \leq M (\|\psi_h\|_{(2_h)} + \|\nu_h\|_{(3_h)}). \quad (51)$$

Отсюда видно, что если схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится (обычно говорят «из аппроксимации и устойчивости следует сходимостъ»), причем порядок точности (скорость сходимости) схемы определяется ее порядком аппроксимации (см. А. Ф. Филиппов [1]).

Из сказанного выше следует, что изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости, т. е. к получению оценок вида (51), называемых *априорными оценками*.

Отметим, что решение  $z_h$  и правая часть  $\psi_h$  разностной задачи оцениваются, вообще говоря, в разных нормах (являются элементами разных пространств).

Ранее уже приводились примеры норм, в которых оцениваются решение и погрешность аппроксимации на сетке  $\omega_h$ . К сожалению, мы не можем сейчас же получить оценки устойчивости вида (51) для конкретных разностных задач. Для этого нам понадобится вспомогательный математический аппарат, а именно: формулы суммирования, разностные формулы Грина, простейшие сечочные аналоги теорем вложения. Такие минимальные средства позволят получить оценки решения разностных аналогов краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. На этом примере мы познакомимся с типичными ситуациями, которые возникают для значительно более сложных задач при изучении устойчивости, аппроксимации и точности разностных схем.

**9. Решение разностных уравнений методом прогонки.** Одним из наиболее употребительных способов решения разностных уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач для уравнений математической физики, является в настоящее время метод прогонки.

Рассмотрим трехточечное разностное уравнение

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (52)$$

с крайвыми условиями

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \nu_2. \quad (53)$$

Здесь  $A_i, B_i, C_i, \kappa_1, \nu_1, \kappa_2, \nu_2$  — заданные числа.

Будем искать решение уравнения (52) в том же виде, в котором заданы крайвые условия (53), т. е. в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (54)$$

где  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$  — неизвестные пока коэффициенты.

Подставляя (54) и

$$y_{i-1} = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i$$

в уравнение (52), получим

$$(\alpha_{i+1}(\alpha_i A_i - C_i) + B_i)y_{i+1} + ((\alpha_i A_i - C_i)\beta_{i+1} + \beta_i A_i + F_i) = 0.$$

Отсюда видно, что уравнение (52) будет выполнено, если потребовать

$$\alpha_{i+1}(\alpha_i A_i - C_i) + B_i = 0, \quad (\alpha_i A_i - C_i)\beta_{i+1} + \beta_i A_i + F_i = 0.$$

Тем самым, мы получаем рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$ :

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Величины  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  находим из (54) и краевого условия (53) при  $i = 0$ :

$$\alpha_1 = \kappa_1, \quad \beta_1 = \nu_1.$$

Значение  $y_N$ , необходимое для начала счета по формулам (54), получаем из (54) и краевого условия (53) при  $i = N-1$ :

$$y_N = (\nu_2 + \kappa_2 \beta_N) / (1 - \kappa_2 \alpha_N).$$

Итак, мы можем получить точное решение краевой задачи (52) — (53) при помощи следующего алгоритма:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \alpha_1 &= \kappa_1, \quad \beta_1 = \nu_1, \\ y_i &= \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ y_N &= (\nu_2 + \kappa_2 \beta_N) / (1 - \kappa_2 \alpha_N). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Этот способ решения разностных уравнений вида (52) и носит название метода прогонки. Так как значения  $y_i$  находятся здесь последовательно, начиная от правой границы, то формулы (55) называют иногда формулами правой прогонки. Аналогично выводятся формулы левой прогонки:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \frac{A_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad \eta_i = \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \xi_N &= \kappa_2, \quad \eta_N = \nu_2, \\ y_{i+1} &= \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= (\nu_1 + \kappa_1 \eta_1) / (1 - \kappa_1 \xi_1). \end{aligned} \right.$$

Иногда оказывается удобным комбинировать правую и левую прогонки (так называемая «встречная прогонка», см., например, А. А. Самарский [3]).

Прогночные формулы (55) называются устойчивыми, если коэффициенты  $\alpha_i$  не превосходят по модулю единицы. В этом случае ошибки округления, возникающие в процессе счета по рекуррентной формуле (54), не будут возрастать.

Условия

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad 0 \leq \kappa_\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2 \quad (56)$$

обеспечивают устойчивость прогночных формул (55).

Действительно,  $\alpha_1 = \kappa_1 < 1$  и если  $0 \leq \alpha_i < 1$ , то

$$0 < \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{(C_i - A_i - B_i) + B_i + (1 - \alpha_i) A_i} < 1.$$

Заметим, что ограничения на  $\kappa$  можно ослабить. Например, прогночные формулы (55) остаются устойчивыми, если вместо (56) потребовать выполнения условий

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad C_i \neq A_i + B_i, \\ 0 \leq \kappa_\alpha \leq 1, \quad \alpha = 1, 2$$

или условий

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad 0 \leq \kappa_\alpha \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \\ \kappa_1 + \kappa_2 < 2.$$

Пример 1. Краевые условия первого рода:

$$u''(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2. \quad (57)$$

На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  построим произвольную неравномерную сетку с шагами  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  и заменим (57) следующей разностной задачей

$$y_{\bar{x}\bar{x}, i} = -f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (58)$$

Чтобы решить эту систему уравнений методом прогонки, перепишем (58) в виде

$$\frac{1}{\bar{h}_i \bar{h}_i} y_{i-1} - \frac{1}{\bar{h}_i} \left( \frac{1}{\bar{h}_i} + \frac{1}{\bar{h}_{i+1}} \right) y_i + \frac{1}{\bar{h}_i \bar{h}_{i+1}} y_{i+1} = -f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad \bar{h}_i = 0,5 (h_i + h_{i+1}).$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями (52), (53), находим, что для (58)

$$A_i = \frac{1}{\bar{h}_i \bar{h}_i}, \quad B_i = \frac{1}{\bar{h}_i \bar{h}_{i+1}}, \quad C_i = A_i + B_i, \quad F_i = f_i, \\ v_1 = \mu_1, \quad v_2 = \mu_2, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 0.$$

Так как условия устойчивости (56) при этом выполнены, то задачу (58) можно решать методом прогонки.

Пример 2. Третья краевая задача:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= -f(x), & 0 < x < 1, \\ u'(0) &= \sigma u(0) - \mu_1, & u(1) = \mu_2, & \sigma > 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$  и построим для (59) разностную схему второго порядка аппроксимации (см. пример 1, п. 6):

$$\left. \begin{aligned} y_{xx} &= -f_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_{x,0} &= \sigma y_0 - \bar{\mu}_1, & \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0,5hf(0), & y_N = \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Записывая систему (60) в виде (52), (53), получим, что для нее

$$\begin{aligned} A_i &= B_i = 1/h^2, & C_i &= A_i + B_i, & F_i &= f_i, \\ \kappa_1 &= \frac{1}{1+h\sigma}, & \nu_1 &= \frac{h\bar{\mu}_1}{1+h\sigma}, & \kappa_2 &= 0, & \nu_2 &= \mu_2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при  $\sigma > 0$  условия устойчивости прогонки (56) выполнены.

Метод прогонки для решения разностных краевых задач был предложен в начале пятидесятых годов несколькими авторами. Это: И. М. Гельфанд и О. В. Локуциевский (см. С. К. Годунов и В. С. Рябенкий [1]), В. С. Владимиров (см. Г. И. Марчук [1]), А. С. Кронрод (см. А. Д. Галанин [1]). Ссылки на зарубежных авторов имеются в книге Р. Д. Рихтмайера [1] и И. Бабушки, Э. Витасека, М. Прагера [1]. В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных методу прогонки. Некоторые варианты метода прогонки приведены в дополнении к данной книге.

## § 2. Некоторые сведения о математическом аппарате теории разностных схем

**1. Некоторые разностные формулы.** В дальнейшем для преобразования различных разностных выражений нам потребуются формулы разностного дифференцирования произведения, формулы суммирования по частям и разностные формулы Грина. В этом пункте мы получим эти формулы, проводя аналогию с соответствующими формулами дифференциального исчисления.

1) Формулы разностного дифференцирования произведения. Как известно, в дифференциальном исчислении имеет место следующая формула дифференцирования произведения функций  $u(x)$ ,  $v(x)$ :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Выше, в § 1, п. 2 для сеточных функций были введены два типа разностных производных — левые и правые. Соответственно этому имеется и две формулы разностного дифференцирования произведения:

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x, \quad (1)$$

$$(uv)_{\bar{x}} = u_x v + u^{(-1)} v_{\bar{x}} = u_{\bar{x}} v^{(-1)} + u v_{\bar{x}}. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения

$$f^{(\pm 1)} = f(x \pm h), \quad f_x = \frac{f^{(+1)} - f}{h}, \quad f_{\bar{x}} = \frac{f - f^{(-1)}}{h}.$$

Обратим внимание на то, что в этих формулах происходит сдвиг индекса. Докажем, например, первое из этих равенств. Записывая равенство (1) в индексной форме

$$\frac{u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i}{h} = \frac{u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_{i+1}}{h} + \frac{u_i v_{i+1} - u_i v_i}{h},$$

непосредственно убеждаемся в его справедливости.

2) Формулы суммирования по частям. В интегральном исчислении справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_0^1 uv' dx = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 u'v dx.$$

Для сеточных функций, как и в предыдущем случае, имеют место формулы двух типов

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v), \quad (3)$$

$$(u, v_{\bar{x}}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v]. \quad (4)$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad [u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h. \quad (5)$$

Докажем, например, (3). На основании формулы (1) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (uv_x)_i h &= \sum_{i=1}^{N-1} (uv)_{x,i} h - \sum_{i=1}^{N-1} (u_x v^{(+1)})_i h = \\ &= (uv)_N - (uv)_1 - \sum_{i=2}^N (u_{\bar{x}} v)_i h = \\ &= (uv)_N - u_1 v_1 - \sum_{i=1}^N u_{\bar{x},i} v_i h + (u_{\bar{x}} v)_1 h - u_1 v_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно далее, что

$$h(u_{\bar{x}} v)_1 = u_1 v_1 - u_0 v_1.$$

Подставляя последнее выражение в (6) и учитывая (5), получим (3).

В дальнейшем мы будем часто использовать неравномерную сетку, которую, как уже говорилось в § 1, п. 1, в отличие от равномерной будем обозначать через  $\hat{\omega}_h$ . На этой сетке формулы скалярного произведения и разностные формулы суммирования по частям выглядят несколько иначе

$$(u, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h_i, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h_{i+1}, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h_i,$$

$$(u, v_{\bar{x}})_* = u_N v_N - u_0 v_1 - (v, u_{\bar{x}}], \quad (7)$$

где  $h_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ .

Здесь введено также обозначение для разностной производной на неравномерной сетке

$$v_{\bar{x}, i} = (v_{i+1} - v_i)/h_i$$

и для скалярного произведения на неравномерной сетке  $(\cdot)_*$ .

Для доказательства формулы (7) заметим, что

$$v_{\bar{x}} = \frac{h_{i+1}}{h_i} v_x.$$

Подставляя это выражение в скалярное произведение

$$(u, v_{\bar{x}})_* = (u, v_x), \quad \text{где} \quad (u, \omega) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \omega_i h_{i+1},$$

и повторяя доказательство тождества (3), приходим к (7).

3) Первая формула Грина. Равенство

$$\int_0^1 u(kv') dx = - \int_0^1 ku'v dx + kuv' \Big|_0^1$$

обычно называют первой формулой Грина.

Для сеточных функций аналог формулы Грина можно получить, пользуясь формулами суммирования по частям. Подставляя в (3)

$$u = z, \quad v = ay_{\bar{x}},$$

получаем первую разностную формулу Грина:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + azy_{\bar{x}} \Big|_N - a_1 y_{x, 0} z_0. \quad (8)$$

Если  $z_0 = z_N = 0$ , то подстановки обращаются в нуль и первая формула Грина имеет вид

$$(z, \Lambda y) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}], \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x. \quad (8')$$



В частности, при  $z = y$  получаем

$$(\Delta y, y) = - (a, (y_{\bar{x}})^2), \quad y_0 = y_N = 0. \quad (8'')$$

Аналогичный результат справедлив и в случае неравномерной сетки:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}})_* = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + azy_{\bar{x}}|_N - a_1 y_x \cdot 0 z_0,$$

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}})_* = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] \quad \text{при} \quad z_0 = z_N = 0.$$

4) Вторая формула Грина. В интегральном исчислении вторая формула Грина имеет вид

$$\int_0^1 u (kv')' dx - \int_0^1 v (ku')' dx = k (uv' - vu')|_0^1.$$

Подставив в (3)  $u = y$ ,  $v = az_{\bar{x}}$ , получим

$$(y, (az_{\bar{x}})_{\bar{x}}) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + ayz_{\bar{x}}|_N - a_1 y_0 z_x \cdot 0. \quad (9)$$

Вычитая теперь (9) из (8), приходим к разностному аналогу второй формулы Грина

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}}) - (y, (az_{\bar{x}})_{\bar{x}}) = a_N (zy_{\bar{x}} - z_{\bar{x}}y)_N - a_1 (y_x z - z_x y)_0. \quad (10)$$

Точно так же для неравномерной сетки имеем:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}})_* - (y, (az_{\bar{x}})_{\bar{x}})_* = a_N (zy_{\bar{x}} - yz_{\bar{x}})_N - a_1 (y_x z - z_x y)_0. \quad (11)$$

Если  $y$  и  $z$  обращаются в нуль при  $x = 0$  и  $x = 1$ , то подстановки равны нулю и

$$(\Delta y, z) = (y, \Delta z), \quad \Delta y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad (10')$$

$$(\Delta y, z)_* = (y, \Delta z)_*, \quad \Delta y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}}. \quad (11')$$

Эти формулы показывают, что оператор  $\Delta$  является самосопряженным.

5) Неравенство Коши — Буняковского. Нам понадобится в дальнейшем известное неравенство Коши — Буняковского (см., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1])

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad (12)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в некотором линейном пространстве и  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ . В частности, по  $(\cdot, \cdot)$  можно понимать одно из введенных выше скалярных произведений.

**2. Отыскание собственных функций и собственных значений на примере простейшей разностной задачи.** Метод разделения переменных, известный в математической физике, используется и для исследования разностных задач. Применение этого метода

позволяет расчленить исходную задачу, зависящую от нескольких независимых переменных, на более простые задачи, зависящие от меньшего числа переменных. При этом, как правило, по отдельным координатным направлениям возникают задачи на собственные значения. Такая же ситуация имеет место и в разностном случае.

В этом пункте мы рассмотрим задачу на отыскание собственных значений для простейшего разностного оператора.

Сведения, полученные здесь, потребуются нам в дальнейшем, так как использование метода разделения переменных приводит к задачам именно такого типа.

В последующих главах будут приведены примеры использования этого метода для анализа устойчивости и сходимости конкретных разностных схем.

Предварительно напомним основные факты (см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [6]), связанные с простейшей задачей на отыскание собственных функций и собственных значений для дифференциального уравнения

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0. \quad (13)$$

Нетривиальные решения этой задачи — собственные функции  $u_k$  и отвечающие им собственные значения  $\lambda_k$  выражаются следующим образом:

$$1. \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \lambda_k = k^2\pi^2/l^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Собственные функции  $u_k$  образуют ортонормированную систему

$$\int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_{km},$$

где

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

3. Для производной от собственной функции имеет место равенство

$$u'_k(x) = \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{k\pi x}{l} = \sqrt{\lambda_k} \bar{u}_k(x),$$

откуда следует, что система  $\bar{u}_k(x)$  также ортонормирована, т. е.

$$\int_0^l \bar{u}_k(x) \bar{u}_m(x) dx = \delta_{km}.$$

4. Если  $f(x)$  дважды дифференцируема и удовлетворяет однородным краевым условиям, т. е.  $f(0) = f(l) = 0$ , то она представима в виде равномерно сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x),$$

где

$$f_k = \int_0^l f(x) u_k(x) dx,$$

причем

$$\|f\|^2 = \int_0^l f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (13) разностную задачу

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad y_0 = y_N = 0, \quad y \not\equiv 0 \quad (14)$$

об отыскании нетривиальных решений — собственных функций задачи (14) и соответствующих собственных значений. Перейдем в (14) к индексной форме

$$y_{i+1} - 2(1 - h^2\lambda/2)y_i + y_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (15)$$

Решение задачи (14) будем искать в виде

$$y(x) = \sin \alpha x,$$

где  $\alpha$  подлежит определению. Тогда

$$y_{i+1} + y_{i-1} = \sin \alpha(x+h) + \sin \alpha(x-h) = 2 \sin \alpha x \cos \alpha h.$$

Подставляя полученное выражение в (15), получим

$$2 \sin \alpha x \cos \alpha h = 2(1 - h^2\lambda/2) \sin \alpha x.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения, т. е.  $\sin \alpha x \not\equiv 0$ , то из последнего равенства следует:

$$1 - h^2\lambda/2 = \cos \alpha h,$$

и далее

$$\lambda = \frac{2}{h^2} (1 - \cos \alpha h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}.$$

Значение параметра  $\alpha$  выберем так, чтобы функция  $y(x) = \sin \alpha x$  удовлетворяла граничным условиям задачи (14)

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Заметим, что при  $x = 0$  граничное условие выполняется автоматически при любых  $\alpha$ . При  $x = l$  имеем:

$$\sin \alpha l = 0,$$

откуда

$$\alpha = \alpha_k = k\pi/l, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Итак, мы получили собственные функции и собственные значения задачи (14). Перечислим их свойства.

$$1. \quad y^{(k)}(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2l}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

2. Собственные значения  $\lambda_k$  перенумерованы в порядке возрастания и для всей совокупности  $\{\lambda_k\}$  справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} = \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h (N-1)}{2l} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l} < \frac{4}{h^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17), в частности, следует, что все собственные значения задачи (14) положительны.

3. Собственные функции задачи (14)  $y^{(k)}$ ,  $y^{(m)}$ , отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в смысле скалярного произведения, определяемого соотношением (5):

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = 0, \quad k \neq m. \quad (18)$$

Для доказательства этого факта воспользуемся второй разностной формулой Грина, записанной для однородных краевых условий (10'),

$$0 = (y_{\bar{x}\bar{x}}^{(k)}, y^{(m)}) - (y^{(k)}, y_{\bar{x}\bar{x}}^{(m)}) = (\lambda_m - \lambda_k)(y^{(k)}, y^{(m)}).$$

Так как по предположению  $y^{(k)}$  и  $y^{(m)}$  — собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, т. е.  $\lambda_k \neq \lambda_m$ , то из последнего равенства следует ортогональность  $y^{(k)}$  и  $y^{(m)}$ :

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = 0.$$

4. Норма собственной функции  $y^{(k)}(x)$  есть

$$\|y^{(k)}\| = \sqrt{l/2}.$$

Норма понимается в смысле скалярного произведения (5), определенного выше,

$$\|y\|^2 = (y, y) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h.$$

Проведем несложные преобразования

$$\begin{aligned} \|y^{(k)}\|^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} (y^{(k)}(x_i))^2 h = \sum_{i=1}^{N-1} h \sin^2 \frac{k\pi x_i}{l} = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x_i}{l}\right) = \frac{h(N-1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h \cos \frac{2k\pi x_i}{l}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для того, чтобы просуммировать в (19) ряд из косинусов, построим вспомогательную функцию, разностная производная от которой равна  $\cos(2k\pi x_i/l)$ .

Используя очевидное равенство

$$\left(\sin \beta \left(x + \frac{h}{2}\right)\right)_{\bar{x}} = \frac{1}{h} \left(\sin \beta \left(x + \frac{h}{2}\right) - \sin \beta \left(x - \frac{h}{2}\right)\right) = \frac{2}{h} \cos \beta x \sin \frac{\beta h}{2},$$

имеем

$$\cos \beta x = \left[ \frac{h}{2 \sin(\beta h/2)} \sin \beta \left(x + \frac{h}{2}\right) \right]_{\bar{x}}.$$

Теперь сумму ряда косинусов определить несложно:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} h \cos \frac{2k\pi x_i}{l} &= \frac{h}{2 \sin(k\pi h/2)} \sum_{i=1}^{N-1} h \left[ \sin \left( \frac{2k\pi}{l} \left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right) \right]_{\bar{x}} = \\ &= \frac{h}{2 \sin(k\pi h/2)} \left[ \sin \left( \frac{2k\pi}{l} \left(l - \frac{h}{2}\right) \right) - \sin \frac{k\pi h}{l} \right] = -h. \end{aligned}$$

Учитывая полученные результаты, находим из (19) требуемое соотношение  $\|y^{(k)}\| = \sqrt{l/2}$ . Таким образом, набор сеточных функций

$$\mu^{(k)}(x) = \sqrt{2/l} y^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (20)$$

образует ортогональную и нормированную в смысле скалярного произведения  $(\cdot)$  систему:  $(\mu^{(k)}, \mu^{(m)}) = \delta_{km}$ .

5. Первые разностные производные от собственных функций, имеющие вид

$$\left(\mu^{(k)}(x)\right)_{\bar{x}} = \sqrt{2\lambda_k/l} \cos \frac{k\pi(x-0,5h)}{l}, \quad (21)$$

ортогональны в смысле скалярного произведения  $(\cdot)$ , определенное формулой (5) и, кроме того,

$$\|\mu_{\bar{x}}^{(k)}\|^2 = \lambda_k.$$

В том, что разностные производные от собственных функций имеют вид (21), можно убедиться, проводя простые вычисления:

$$\begin{aligned} \left(\mu^{(k)}\right)_{\bar{x}} &= \frac{\sqrt{2/l}}{h} \left(\sin \frac{k\pi x}{l} - \sin \frac{k\pi(x-h)}{l}\right) = \\ &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi h}{2l} \cos \frac{k\pi(x-0,5h)}{l} = \sqrt{\frac{2\lambda_k}{l}} \cos \frac{k\pi(x-0,5h)}{l}. \end{aligned}$$

Далее вычислим произведение

$$\left(\mu_{\bar{x}}^{(k)}, \mu_{\bar{x}}^{(m)}\right) = -\left(\mu_{\bar{x}x}^{(k)}, \mu^{(m)}\right) = \lambda_k \left(\mu^{(k)}, \mu^{(m)}\right) = \lambda_k \delta_{km},$$

где  $\delta_{km} = 0$  при  $k \neq m$  и  $\delta_{kk} = 1$ . Здесь мы воспользовались разностной формулой Грина, а также тем обстоятельством, что функция  $\mu^{(k)}$  является решением уравнения (14), т. е.  $\mu_{xx}^{(k)} = -\lambda_k \mu^{(k)}$ .

Итак, свойство 5 доказано.

6. Пусть на сетке  $\bar{\omega}_h$  задана функция  $f(x)$ , причем  $f_0 = f_N = 0$ . Тогда, очевидно, она представима в виде суммы по собственным функциям задачи (14)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu^{(k)}(x),$$

где коэффициенты определяются соотношениями

$$f_k = (f(x), \mu^{(k)}(x)).$$

При этом оказывается справедливым равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2. \quad (22)$$

Докажем (22). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} h f^2(x_i) = (f^2, 1) = \left( \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu^{(k)}, \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu^{(k)} \right) = \\ &= \left( \sum_{k,m=1}^{N-1} f_k f_m \mu^{(k)} \mu^{(m)}, 1 \right) = \sum_{k,m=1}^{N-1} f_k f_m (\mu^{(k)}, \mu^{(m)}) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2, \end{aligned}$$

так как  $(\mu^{(k)}, \mu^{(m)}) = \delta_{km}$ .

В дальнейшем изложении мы будем часто пользоваться неравенством

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0 - \text{любое число}),$$

которое будем называть иногда  $\varepsilon$ -неравенством. Из него, в частности, следует:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \leq \varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|^2. \quad (23)$$

**3. Разностные аналоги теорем вложения.** В дальнейшем при оценке различных свойств разностных схем, таких как устойчивость, сходимость и т. д., нам понадобятся неравенства, которые соответствуют простейшим теоремам вложения С. Л. Соболева (см. С. Л. Соболев [2]).

Докажем три леммы.

**Лемма 1.** Для всякой сеточной функции  $y(x)$ , заданной на сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, x_0 = 0, x_N = 1\}$$

и обращающейся в нуль при  $x = 0$  и  $x = 1$ , справедливо неравенство

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{2} \|y_{\bar{x}}\|, \quad (24)$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|, \quad \|y_{\bar{x}}\| = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})^{1/2}.$$

Доказательство. Функция  $y(x)$  на сетке  $\bar{\omega}_h$  может быть представлена в тождественном виде

$$y^2(x) = (1-x)y^2(x) + xy^2(x). \quad (25)$$

С другой стороны, поскольку  $y(0) = y(1) = 0$ , можно записать:

$$y^2(x) = \left( \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h \right)^2,$$

или

$$y^2(x) = \left( \sum_{x'=x+h}^1 y_{\bar{x}}(x') h \right)^2.$$

Подставляя эти равенства в (25), находим

$$y^2(x) = (1-x) \left( \sum_{x'=h}^x h y_{\bar{x}}(x') \right)^2 + x \left( \sum_{x'=x+h}^1 h y_{\bar{x}}(x') \right)^2.$$

Оценим суммы в правой части, используя неравенство (23),

$$\begin{aligned} y^2(x) &\leq (1-x) \sum_{x'=h}^x h \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}^2(x') h + x \sum_{x'=x+h}^1 h \sum_{x'=x+h}^1 y_{\bar{x}}^2(x') h = \\ &= x(1-x) \sum_{x'=h}^1 y_{\bar{x}}^2(x') h = x(1-x) \|y_{\bar{x}}\|^2 \end{aligned}$$

(здесь  $y_{\bar{x}}^2 = (y_{\bar{x}})^2$ ). Максимум выражения  $x(1-x)$  на отрезке  $[0, 1]$  достигается при  $x = 0,5$  и равен  $1/4$ . Поэтому

$$y^2(x) \leq \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2,$$

и, следовательно,

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{2} \|y_{\bar{x}}\|.$$

Замечание 1. Лемма 1 остается справедливой на произвольной неравномерной сетке  $\hat{\omega}_h$ .

Замечание 2. В дальнейшем нам потребуется также неравенство типа (24) для отрезка произвольной длины  $l$ . Такое

неравенство нетрудно получить из (24) с помощью замены переменных  $x' = lx$ . Тогда  $x'$  будет меняться на отрезке  $(0, l)$  и

$$y_{x'} = y_{\bar{x}}/l, \quad h' = hl.$$

Подставим  $y_{\bar{x}} = y_{x'} \cdot l$  и  $h = h'/l$  в (24). В результате получим

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 = \sum_{i=1}^N (y_{x'}_i)^2 l^2 l^{-1} h' = l \sum_{i=1}^N (y_{x'}_i)^2 h' = l \|y_{x'}\|^2.$$

Следовательно, на отрезке длины  $l$  справедливо неравенство

$$|y(x)| \leq \|y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\|. \quad (26)$$

**Замечание 3.** Неравенства (24) и (26) получены для функций, обращающихся в нуль на обоих концах интервала. Если функция  $y(x)$  обращается в нуль лишь на одной границе, то справедливо неравенство

$$\|y\|_C \leq \sqrt{l} \|y_{\bar{x}}\|. \quad (27)$$

Для произвольных функций неравенства (24), (26), (27), вообще говоря, неверны. Однако можно показать, что в этом случае имеют место неравенства следующего вида

$$\left. \begin{aligned} \|y\|_C^2 &\leq 2(l \|y_{\bar{x}}\|^2 + y_0^2), \\ \|y\|_C^2 &\leq 2(l \|y_{\bar{x}}\|^2 + y_N^2). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

**Лемма 2.** Для всякой функции  $y(x)$ , заданной на произвольной сетке  $\hat{\omega}_h = \{x_i, x_0 = 0, x_N = l\}$  и обращающейся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ , справедливо неравенство

$$\|y\|^2 \leq \frac{l^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (29)$$

В самом деле, легко проверить, что

$$\|y\|^2 \leq l \|y\|_C^2.$$

Подставляя это неравенство в (26), получим (29).

В случае равномерной сетки оценка (29) может быть улучшена.

**Лемма 3.** Для всякой функции  $y(x)$ , заданной на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ , справедливы оценки

$$\frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y\|^2 \leq \frac{l^2}{8} \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (30)$$



Разложим  $y(x)$  по собственным функциям задачи (14):

$$y(x) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mu^{(k)}(x), \quad c_k = (y(x), \mu^{(k)}(x)), \quad \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2.$$

В силу первой формулы Грина (8)

$$(-\Delta y, y) = \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad \text{где } \Delta y = y_{\bar{x}x}, \quad \|y_{\bar{x}}\|^2 = (1, (y_{\bar{x}})^2). \quad (31)$$

Так как  $\Delta \mu^{(k)} = -\lambda_k \mu^{(k)}$ , то

$$-\Delta y = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k \mu^{(k)}(x).$$

Подставим это выражение в (31) и учтем ортонормированность  $\{\mu^{(k)}\}$ :

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 = -(\Delta y, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k c_k^2.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_1 \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \lambda_N \|y\|^2,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l}, \quad \lambda_N = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l}.$$

Оценим  $\lambda_1$  снизу. Обозначив  $\alpha = \pi h / (2l)$ , получим

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2.$$

Так как  $h \leq 0,5l$ , то  $\alpha$  меняется на интервале  $(0, \pi/4]$ . Нетрудно проверить, что минимум функции  $(\sin \alpha)/\alpha$  при  $\alpha \in (0, \pi/4]$  достигается в точке  $\alpha = \pi/4$ , т. е.  $\lambda_1(h)$  имеет минимум при  $h = 0,5l$ . Отсюда следует, что  $\lambda_1 \geq 8/l^2$ . Учитывая также, что  $\lambda_N < 4/h^2$ , получаем (30).

**4. Метод энергетических неравенств.** Одним из общих и весьма эффективных способов получения априорных оценок является метод энергетических неравенств. Мы приведем примеры использования этого метода для получения априорных оценок применительно к разностным задачам и покажем, как на основании полученных результатов можно определить, например, скорость сходимости разностной схемы.

Все рассуждения в этом пункте будут проводиться для задачи

$$u''(x) + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (32)$$

**Пример 1.** Пусть на отрезке  $[0, 1]$  введена равномерная сетка  $\bar{\omega}_h$ . Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию задачи (32):

$$y_{\bar{x}x} + f(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (33)$$

Умножим уравнение (33) на  $hy$  и просуммируем полученное равенство по узлам сетки  $\omega_h$ :

$$\sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x}x})_i y_i h + \sum_{i=1}^{N-1} f_i y_i h = 0. \quad (34)$$

Перепишем (34) в терминах скалярных произведений

$$(y_{\bar{x}x}, y) + (f, y) = 0. \quad (35)$$

Преобразуя первое слагаемое в (35) с помощью разностной формулы Грина (8''), находим

$$-(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] + (f, y) = 0 \quad \text{или} \quad \|y_{\bar{x}}\|^2 = (f, y). \quad (36)$$

Скалярное произведение  $(f, y)$  оценим при помощи неравенства Коши — Буняковского (12)

$$|(f, y)| \leq \|f\| \|y\|.$$

Воспользуемся леммой 3:  $\|y\| \leq \|y_{\bar{x}}\|/\sqrt{8}$ . Отсюда и из (36) находим:

$$\|y_{\bar{x}}\| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{8}}.$$

Применяя затем лемму 1, получаем априорную оценку для решения задачи (33)

$$\|y\|_C \leq \|f\| / (4\sqrt{2}). \quad (37)$$

Это неравенство используем для оценки скорости сходимости схемы (33). Напишем сначала уравнение для погрешности схемы (33):  $z = y - u$ , где  $u$  — решение задачи (32),  $y$  — решение разностной задачи (33).

Подставляя  $y = z + u$  в (33), получим для  $z$  задачу

$$z_{\bar{x}x} + \psi(x) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad z_0 = z_N = 0. \quad (38)$$

Здесь  $\psi(x) = u_{\bar{x}x} + f(x)$  — погрешность аппроксимации схемы (33), которая, как известно, при достаточной гладкости  $u(x)$  есть величина порядка  $O(h^2)$ . Отметим, что для функции  $z(x)$  мы получили задачу того же типа, что и для функции  $y(x)$ . Поэтому для  $z(x)$  справедлива оценка (37):

$$\|z\|_C \leq \|\psi\| / (4\sqrt{2}). \quad (39)$$

Но  $\psi = O(h^2)$  и, следовательно,

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq Mh^2,$$

где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от шага  $h$ .

На основании данных выше определений (см. § 1) из (39) следует, что решение разностной задачи (33) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (32) со скоростью  $O(h^2)$ .

Мы получили оценку скорости сходимости для очень простой задачи. Аналогичный результат для этой задачи можно было бы получить и с помощью ряда других методов, быть может даже более простых. Однако ценность приведенного здесь метода энергетических неравенств состоит в том, что он без существенных изменений переносится на многомерный случай, на случай переменных коэффициентов, на разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений и т. д.

Покажем, например, что этот метод без всяких затруднений дает нужный результат для случая неравномерной сетки.

Пример 2. Пусть на отрезке  $[0, 1]$  задана неравномерная сетка  $\hat{\omega}_h$ . Задачу (32) на такой сетке можно аппроксимировать следующим образом:

$$y_{\bar{x}\bar{x}} + f(x) = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad y_0 = y_N = 0 \quad (40)$$

(относительно обозначений см. § 1, п. 3, пример 1).

Для задачи (40) можно получить априорную оценку того же типа, что и оценка (37) для задачи (33). Но в этом случае такая оценка дает не совсем верное представление о скорости сходимости схемы (40). Было показано (§ 1, п. 3), что погрешность аппроксимации

$$\psi = u_{\bar{x}\bar{x}} + f$$

схемы (40) есть величина  $O(h_i)$  и

$$\|\psi\| \leq Mh_{\max}. \quad (41)$$

Оценка (41) указывает на понижение порядка скорости сходимости схемы (40) на неравномерной сетке  $\hat{\omega}_h$  по сравнению со схемой (33) на равномерной сетке. Однако выше говорилось, что если погрешность аппроксимации оценивать не в сеточной норме  $L_2$ , а в некоторой специально построенной норме  $\|\cdot\|_{(-2)}$ , то погрешность аппроксимации на неравномерной сетке будет иметь также порядок  $O(h^2)$ . Именно, надо взять норму

$$\|\psi\|_{(-2)} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left( \sum_{k=i}^{N-1} h_k \psi_k \right)^2 \right]^{1/2} = O(h^2).$$

Из сказанного ясно, что теперь при выводе априорной оценки для задачи (40) нужно оценивать правую часть в норме  $\|\cdot\|_{(-2)}$ .

Получим эту априорную оценку. Умножим уравнение (40) на  $y_i h_i$  и просуммируем по узлам сетки  $\hat{\omega}_h$ . В терминах скалярных произведений полученное выражение можно записать в виде

$$(y_{\bar{x}\bar{x}}, y)_* + (f, y)_* = 0. \quad (42)$$

Первое слагаемое в (42) преобразуем по разностной формуле Грина (8)

$$(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = (f, y)_*. \quad (43)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\eta(x)$ , определенную следующим образом:

$$\eta_{\bar{x}, i} = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \eta_N = 0. \quad (44)$$

Решая задачу (44), получим

$$-\eta(x_i) = \sum_{k=i}^{N-1} f_k h_k. \quad (45)$$

Скалярное произведение в правой части равенства (43) преобразуется на основании формулы суммирования по частям (7):

$$(f, y)_* = (\eta_{\bar{x}}, y)_* = -(\eta, y_{\bar{x}}). \quad (46)$$

В силу неравенства Коши — Буняковского имеем

$$|(f, y)_*| = |(\eta, y_{\bar{x}})| \leq \| \eta \| \| y_{\bar{x}} \|. \quad (47)$$

Подставим эту оценку в (43) и сократим обе части неравенства на  $\| y_{\bar{x}} \|$ :

$$\| y_{\bar{x}} \| \leq \| \eta \| = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left( \sum_{k=i}^{N-1} h_k f_k \right)^2 \right]^{1/2} = \| f \|_{(-2)}.$$

На основании леммы 1,  $\| y \|_C \leq \| y_{\bar{x}} \| / 2$  и, следовательно,

$$\| y \|_C \leq \frac{1}{2} \| f \|_{(-2)}. \quad (48)$$

Тем самым желаемая оценка установлена.

Рассмотрим теперь, как обычно, погрешность решения  $z = y - u$ , где  $y$  — решение задачи (40), а  $u$  — решение исходной дифференциальной задачи (32). Подставляя  $y = z + u$  в (40), получим для  $z$  задачу

$$z_{\bar{x}\bar{x}} + \psi = 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad z_0 = z_N = 0. \quad (49)$$

Применяя к задаче (49) оценку (48), заключаем

$$\| z \|_C \leq 0,5 \| \psi \|_{(-2)}.$$

Но мы уже видели раньше (см. § 1, п. 3), что

$$\| \psi \|_{(-2)} \leq Mh^2, \quad \text{где } h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i,$$

и, следовательно, схема (40) на произвольной неравномерной сетке  $\hat{\omega}_h$  сходится со скоростью  $O(h^2)$ .

**5. Принцип максимума.** Для оценки решений некоторых разностных задач оказывается возможным использовать принцип максимума. Мы докажем сейчас принцип максимума для оператора

$$\Delta y = (\Delta y)_i = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (50)$$

где

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i. \quad (51)$$

Более общие формулировки принципа максимума содержатся в гл. IV.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (51). Тогда, если  $(\Delta y)_i \geq 0$ ,  $((\Delta y)_i \leq 0)$  для всех  $i$ , то функция  $y_i$ , отличная от константы, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точках  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

**Доказательство.** Предположим, что в некоторой внутренней точке достигается положительный максимум. Тогда, так как  $y_i \neq \text{const}$ , найдется точка  $i = i_0$ , в которой

$$y_{i_0} = \max_{0 \leq i \leq N} y_i = M_0 > 0,$$

а в одной из соседних точек, например, в точке  $i = i_0 - 1$ , выполняется строгое неравенство  $y_{i_0-1} < M_0$ .

Запишем теперь оператор (50) в виде

$$(\Delta y)_i = B_i (y_{i+1} - y_i) - A_i (y_i - y_{i-1}) - (C_i - A_i - B_i) y_i.$$

В точке  $i = i_0$  из условий (51) следует неравенство

$$\begin{aligned} (\Delta y)_{i_0} &= B_{i_0} (y_{i_0+1} - y_{i_0}) - A_{i_0} (y_{i_0} - y_{i_0-1}) - (C_{i_0} - B_{i_0} - A_{i_0}) y_{i_0} \leq \\ &\leq -A_{i_0} (y_{i_0} - y_{i_0-1}) < 0, \end{aligned}$$

что противоречит требованию  $(\Delta y)_{i_0} > 0$ . Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

**Следствие 1.** Если  $(\Delta y)_i \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $y_0 \geq 0$ ,  $y_N \geq 0$ , то функция  $y_i$  неотрицательна,  $y_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Если  $(\Delta y)_i \geq 0$ ,  $y_0 \leq 0$ ,  $y_N \leq 0$ , то  $y_i \leq 0$  при  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

**Следствие 2.** Если выполнены условия (51), то единственным решением задачи

$$(\Delta y)_i = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \quad (52)$$

с  $F_i \equiv 0$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , является тождественный нуль, и, следовательно, задача (52) однозначно разрешима при любых  $F_i$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ .

**Теорема 2.** Пусть  $y_i$  — решение задачи (52), а  $\bar{y}_i$  — решение задачи, которая получится при замене в (52) функций  $F_i$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  соответственно на  $\bar{F}_i$ ,  $\bar{\mu}_1$ ,  $\bar{\mu}_2$ . Тогда, если

$$|F_i| \leq \bar{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad |\mu_\alpha| \leq \bar{\mu}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

то справедлива оценка

$$|y_i| \leq \bar{y}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

**Доказательство.** Так как  $\bar{F}_i \geq 0$ , то, согласно следствию 1 из теоремы 1,  $\bar{y}_i \geq 0$ . Функции  $u_i = \bar{y}_i - y_i$  и  $v_i = \bar{y}_i + y_i$  удовлетворяют уравнению (52) с правыми частями  $\bar{F}_i - F_i$  и  $\bar{F}_i + F_i$  и граничными условиями  $\bar{\mu}_\alpha - \mu_\alpha$  и  $\bar{\mu}_\alpha + \mu_\alpha$ , соответственно. Применив следствие 1 из теоремы 1, получим, что  $u_i \geq 0$  и  $v_i \geq 0$ , т. е.  $|y_i| \leq \bar{y}_i$ .

**Следствие.** Для решения задачи (52) с  $F_i \equiv 0$  справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \max\{|\mu_1|, |\mu_2|\}.$$

Для доказательства рассмотрим вспомогательную задачу

$$(\Delta \bar{y})_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \bar{y}_0 = \bar{y}_N = \mu,$$

где  $\mu = \max\{|\mu_1|, |\mu_2|\}$ .

Согласно теореме 2, имеем

$$\|y\|_C \leq \|\bar{y}\|_C,$$

а из теоремы 1 следует, что

$$\|\bar{y}\|_C \leq \mu.$$

**Теорема 3.** Пусть в задаче (52)

$$F_i = D_i \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,$$

где  $D_i = C_i - B_i - A_i \geq 0$  и выполнены условия (51). Тогда справедлива оценка

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i| \leq \|\varphi\|_C. \quad (53)$$

**Доказательство.** Если  $D_i = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, N-1$  и  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , то  $F_i \equiv 0$ , решением задачи (52) является тождественный нуль и оценка (53) очевидна.

Предположим теперь, что  $D_i \neq 0$  хотя бы в одной внутренней точке. Построим функцию  $Y_i \geq 0$ , являющуюся решением задачи

$$B_i(Y_{i+1} - Y_i) - A_i(Y_i - Y_{i-1}) - D_i Y_i = -D_i |\varphi_i|, \quad Y_0 = Y_N = 0. \quad (54)$$

Согласно теореме 2,  $\|y\|_C \leq \|Y\|_C$ , так что нам остается оценить решение задачи (54).

Пусть в точке  $i = i_0$  достигается максимум функции  $Y_i$ . Тогда

$$B_{i_0}(Y_{i_0+1} - Y_{i_0}) \leq 0, \quad A_{i_0}(Y_{i_0} - Y_{i_0-1}) \geq 0$$

и из (54) получаем

$$D_{i_0} Y_{i_0} \leq D_{i_0} |\varphi_{i_0}| \leq D_{i_0} \|\varphi\|_C.$$

Если  $D_{i_0} > 0$ , то отсюда следует оценка

$$\|Y\|_C \leq \|\varphi\|_C, \quad (55)$$

что нам и требовалось. Если же  $D_{i_0} = 0$ , то из (54) получим

$$B_{i_0}(Y_{i_0+1} - Y_{i_0}) = A_{i_0}(Y_{i_0} - Y_{i_0-1}).$$

Так как  $Y_{i_0} \geq Y_{i_0-1}$  и  $Y_{i_0} \geq Y_{i_0+1}$ , то отсюда следует равенство

$$Y_{i_0+1} = Y_{i_0} = Y_{i_0-1},$$

т. е. то же самое максимальное значение достигается и в соседних с  $i_0$  точках. Взяв  $i = i_1 = i_0 + 1$  (или  $i_1 = i_0 - 1$ ), повторяем предыдущее рассуждение и получаем неравенство

$$D_{i_1} Y_{i_1} \leq D_{i_1} \|\varphi\|_C,$$

откуда снова следует либо (55), либо равенство

$$Y_{i_1+1} = Y_{i_1} = Y_{i_1-1}.$$

Так как  $D_i \neq 0$ , то при некотором  $i = i_\alpha$  получим  $D_{i_\alpha} > 0$  и неравенство (55).

Теорема доказана.

### § 3. Некоторые сведения из функционального анализа

Понятия и методы функционального анализа находят естественное применение в теории разностных схем. Дадим здесь краткий перечень используемых нами элементарных сведений из теории линейных операторов. Для детального изучения основ функционального анализа можно рекомендовать, например, книги Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1], Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [1], Б. З. Вулиха [1].

**1. Линейные операторы.** Пусть  $X$  и  $Y$  — линейные нормированные пространства,  $\mathcal{D}$  — некоторое подпространство  $X$ . Если каждому вектору  $x \in \mathcal{D}$  по определенному правилу сопоставлен вектор  $y = Ax \in Y$ , то говорят, что на  $\mathcal{D}$  (или в  $X$ ) задан оператор  $A$  со значениями в  $Y$ . Множество  $\mathcal{D}$  называется *областью определения* оператора  $A$  и обозначается  $\mathcal{D}(A)$ . Множество всех векторов вида  $y = Ax$ , когда  $x \in \mathcal{D}(A)$ , называется *областью значений* оператора  $A$  и обозначается  $\mathcal{R}(A)$ . Иногда вместо  $Ax$  будем также писать  $A(x)$ .

Два оператора  $A$  и  $B$  называются *равными*, если области их определения совпадают и для всех  $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$  выполнено условие

$$Ax = Bx.$$

Оператор  $A$  называется *линейным*, если он

1) аддитивен, т. е. для всех  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

2) однороден, т. е. для всех  $x \in \mathcal{D}(A)$  и любых чисел  $\lambda$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Линейный оператор  $A$  называется *ограниченным*, если существует такая постоянная  $M > 0$ , что

$$\|Ax\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad (1)$$

для любых  $x \in \mathcal{D}(A)$  (здесь  $\|\cdot\|_1$  — норма в  $X$ ,  $\|\cdot\|_2$  — норма в  $Y$ ). Наименьшая из постоянных  $M$ , удовлетворяющих условию (1), называется *нормой оператора  $A$*  и обозначается  $\|A\|_{X \rightarrow Y}$  или просто  $\|A\|$ .

Из определения нормы следует, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \quad \text{или} \quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}. \quad (2)$$

Отметим, что в конечномерном пространстве любой линейный оператор ограничен.

Всевозможные линейные ограниченные операторы, действующие из  $X$  в  $Y$ , образуют линейное нормированное пространство, так как норма  $\|A\|$  оператора  $A$  удовлетворяет всем аксиомам нормы: 1)  $\|A\| \geq 0$ ; если  $\|A\| = 0$ , то  $\|Ax\|_2 = 0$  для всех  $x$  и  $A = 0$ , 2)  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ , 3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

Будем обозначать через  $(X \rightarrow X)$  множество линейных ограниченных операторов, область определения которых совпадает с  $X$ , а значения принадлежат  $X$ . На множестве  $(X \rightarrow X)$  можно ввести произведение  $AB$  операторов  $A$  и  $B$ ,  $(AB)x = A(Bx)$ . Очевидно, что  $AB$  — линейный ограниченный оператор:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . Если  $(AB)x = (BA)x$  для всех  $x \in X$ , то  $A$  и  $B$  называются *перестановочными* или коммутативными; в этом случае пишут  $AB = BA$ .

В связи с решением уравнений вида  $Ax = y$  вводится понятие обратного оператора  $A^{-1}$ . Пусть  $A$  — оператор из  $X$  на  $Y$ , т. е.  $\mathcal{D}(A) = X$ ,  $\mathcal{R}(A) = Y$ . Если каждому  $y \in Y$  соответствует только один  $x \in X$ , для которого  $Ax = y$ , то этим соответствием определяется оператор  $A^{-1}$ , называемый *обратным* для  $A$  и имеющий область определения  $Y$  и область значений  $X$ . Для любых



$x \in X$  и  $y \in Y$  имеем, из определения обратного оператора, тождества  $A^{-1}(Ax) = x$ ,  $A(A^{-1}y) = y$ . Нетрудно показать, что если  $A$  линеен, то и  $A^{-1}$  (если он существует) также линеен.

**Лемма 1.** Для того, чтобы аддитивный оператор  $A$  с  $\mathcal{D}(A) = X$  и  $\mathcal{R}(A) = Y$  имел обратный, необходимо и достаточно, что  $Ax = 0$  только при  $x = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — линейный оператор из  $X$  на  $Y$ . Для того, чтобы обратный оператор  $A^{-1}$  существовал и был ограниченным (как оператор из  $Y$  на  $X$ ), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in X$

$$\|Ax\|_2 \geq \delta \|x\|_1 \quad (\|\cdot\|_1 - \text{норма в } X, \|\cdot\|_2 - \text{норма в } Y). \quad (3)$$

При этом справедлива оценка  $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$ .

**2. Линейные ограниченные операторы в вещественном гильбертовом пространстве.** Пусть  $H$  — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(x, y)$  и нормой  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Будем рассматривать ограниченные линейные операторы, заданные на  $H$  ( $\mathcal{D}(A) = H$ ). Введем ряд определений. Оператор  $A$  будем называть:

1) неотрицательным, если

$$(Ax, x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in H, \quad (4)$$

2) положительным, если

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{для всех } x \in H, \text{ кроме } x = 0, \quad (5)$$

3) полуограниченным снизу, если

$$(Ax, x) \geq -c_* \|x\|^2 \quad \text{для любых } x \in H, \quad (6)$$

где  $c_*$  — положительное число,

4) положительно определенным, если

$$(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2 \quad \text{для любых } x \in H, \quad (7)$$

где  $\delta > 0$  — число.

Пусть  $A$  — произвольный неотрицательный оператор,  $x \in H$ . Число  $(Ax, x)$  назовем энергией оператора  $A$ . Будем сравнивать операторы  $A$  и  $B$  по энергии. Если  $((A - B)x, x) \geq 0$  для всех  $x$ , то будем писать  $A \geq B$ . Неравенства (4)–(7), в частности, можно заменить операторными неравенствами

$$\left. \begin{aligned} A \geq 0, & \quad \text{т. е. } (Ax, x) \geq 0, \\ A > 0, & \quad \text{т. е. } (Ax, x) > 0, \\ A \geq -c_* E, & \quad \text{т. е. } (Ax, x) \geq -c_* \|x\|^2, \\ A \geq \delta E, & \quad \text{т. е. } (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $E$  — единичный оператор ( $Ex = x$ ).

Нетрудно убедиться в том, что введенное на множестве линейных операторов  $(H \rightarrow H)$  отношение неравенства обладает следующими свойствами:

- 1) из  $A \geq B$  и  $C \geq D$  следует  $A + C \geq B + D$ ,
- 2) из  $A \geq 0$  и  $\lambda \geq 0$  следует  $\lambda A \geq 0$ ,
- 3) из  $A \geq B$  и  $B \geq C$  следует  $A \geq C$ ,
- 4) если  $A > 0$  и  $A^{-1}$  существует, то  $A^{-1} > 0$ .

Если  $A$  — линейный оператор, заданный на  $H$ , то оператор  $A^*$ , также заданный на  $H$ , для которого при всех  $x, y \in H$  выполнено равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y),$$

называется *сопряженным* к оператору  $A$ .

Если  $A$  — линейный ограниченный оператор, то сопряженный оператор определен однозначно и является линейным ограниченным оператором с нормой  $\|A^*\| = \|A\|$ .

Линейный ограниченный оператор  $A$  называется *самосопряженным* оператором, если  $A^* = A$ , т. е.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \text{ для любых } x, y \in H.$$

Если  $A$  — любой линейный оператор, то  $A^*A$  и  $AA^*$  — самосопряженные неотрицательные операторы:

$$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay),$$

$$(A^*Ax, x) = \|Ax\|^2 \geq 0, \quad (AA^*x, x) = \|A^*x\|^2 \geq 0.$$

Отметим, что  $(A^*)^* = A$ ,  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

В комплексном гильбертовом пространстве  $H$  из требования неотрицательности оператора  $A$  следует его самосопряженность:

$$\text{если } (Ax, x) \geq 0 \text{ для всех } x \in \tilde{H}, \text{ то } A = A^*.$$

Для вещественного пространства  $H$  это утверждение неверно. Поскольку мы рассматриваем только вещественное гильбертово пространство, то будем пользоваться операторными неравенствами и для несамосопряженных операторов.

**Теорема 2.** *Произведение  $AB$  двух перестановочных неотрицательных самосопряженных операторов  $A$  и  $B$  есть также неотрицательный самосопряженный оператор.*

Оператор  $B$  называется *квадратным корнем из оператора  $A$* , если  $B^2 = A$ .

**Теорема 3.** *Существует единственный неотрицательный самосопряженный квадратный корень  $B$  из любого неотрицательного самосопряженного оператора  $A$ , перестановочный со всяким оператором, перестановочным с  $A$ .*

Квадратный корень из оператора  $A$  будем обозначать через  $A^{1/2}$ .

Пусть  $A$  — положительный и самосопряженный линейный оператор. Вводя на линейной системе  $H$  скалярное произведение  $(x, y)_A = (Ax, y)$  и норму  $\|x\|_A = \sqrt{(x, x)_A}$ , получим гильбертово пространство  $H_A$ , которое обычно называют *энергетическим пространством*  $H_A$ . Нетрудно показать, что скалярное произведение  $(x, y)_A = (Ax, y)$  удовлетворяет аксиомам скалярного произведения: 1)  $(x, y)_A = (y, x)_A$ , 2)  $(x + y, z)_A = (x, z)_A + (y, z)_A$ , 3)  $(\lambda x, y)_A = \lambda(x, y)_A$ , 4)  $(x, x)_A > 0$  при  $x \neq 0$  и  $(x, x)_A = 0$  только при  $x = 0$ .

Аксиомы 2) и 3) выполняются в силу линейности, 4) — в силу положительности оператора  $A$ . Требование  $(x, y)_A = (y, x)_A$  или  $(Ax, y) = (x, Ay) = (Ay, x)$  означает самосопряженность оператора  $A$  и тоже выполнено. Из аксиом скалярного произведения следует неравенство Коши — Буняковского  $|(x, y)_A| \leq \|x\|_A \|y\|_A$  и неравенство треугольника  $\|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$ . Тем самым доказана

*Лемма 2. Для любого положительного самосопряженного оператора в вещественном гильбертовом пространстве справедливо обобщенное неравенство Коши — Буняковского*

$$(Ax, y)^2 \leq (Ax, x)(Ay, y). \quad (9)$$

*Замечание.* Это неравенство имеет место и в том случае, когда  $A$  — неотрицательный оператор.

Если  $A$  — самосопряженный положительный оператор и  $A^{-1}$  существует, то можно ввести «негативную» норму

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = (A^{-1}\varphi, \varphi)^{1/2}.$$

Покажем, что

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_A}.$$

Действительно, из неравенства (9) имеем

$$|(\varphi, x)| = |(A^{-1}\varphi, Ax)| \leq \|A^{-1}\varphi\| \|x\|_A.$$

Следовательно,

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_A} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}\varphi\| \|x\|_A}{\|x\|_A} = \|A^{-1}\varphi\|.$$

С другой стороны, если  $x = A^{-1}\varphi$ , то

$$\frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_A} = \frac{(\varphi, A^{-1}\varphi)}{(AA^{-1}\varphi, A^{-1}\varphi)^{1/2}} = \|A^{-1}\varphi\|,$$

что и доказывает наше утверждение.

Для нас в дальнейшем важную роль будут играть достаточные условия существования ограниченного обратного оператора  $A^{-1}$ , определенного во всем пространстве  $H$ ,  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ .

Заметим, что лемма 1 и теорема 1 гарантируют существование обратного оператора, определенного лишь на  $\mathcal{R}(A)$  — множестве значений оператора  $A$ , которое может не совпадать с  $H$ .

Если известно, что множество значений оператора  $A$  совпадает со всем пространством  $H$ ,  $\mathcal{R}(A) = H$ , то выполнение условий леммы 1 или теоремы 1 обеспечивает существование оператора  $A^{-1}$  с  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ . В частности, положительный оператор  $A$  с  $\mathcal{R}(A) = H$  имеет обратный  $A^{-1}$  с  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ , так как из условия  $(Ax, x) > 0$  для всех  $x \neq 0$  следует, что  $Ax \neq 0$  при  $x \neq 0$  и потому применима лемма 1.

**Теорема 4** (см. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь [1]). Пусть  $A$  — линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $\mathcal{D}(A) = H$ . Для того, чтобы оператор  $A$  имел обратный  $A^{-1}$  с областью определения  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ , необходимо и достаточно существование постоянной  $\delta > 0$  такой, что при всех  $x \in H$  выполняются неравенства

$$\|Ax\| \geq \delta \|x\|, \quad \|A^*x\| \geq \delta \|x\|. \quad (10)$$

При этом справедлива оценка  $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$ .

**Следствие.** Пусть  $A$  — положительно определенный линейный ограниченный оператор с областью определения  $\mathcal{D}(A) = H$ . Тогда существует ограниченный обратный оператор  $A^{-1}$  с  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ .

В самом деле, из  $A \geq \delta E$ ,  $\delta > 0$  следует

$$\begin{aligned} \|Ax\| \|x\| &\geq (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2, \\ \|A^*x\| \|x\| &\geq |(A^*x, x)| = |(x, Ax)| = (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2, \end{aligned}$$

т. е.  $\|Ax\| \geq \delta \|x\|$ ,  $\|A^*x\| \geq \delta \|x\|$  и выполнены условия теоремы 4. Для нормы обратного оператора имеем оценку  $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$ .

**З а м е ч а н и е.** В конечномерном гильбертовом пространстве для существования обратного оператора  $A^{-1}$  достаточно требовать положительности оператора  $A$ , так как из условия  $A > 0$  следует существование постоянной  $\delta > 0$  такой, что  $(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$  для всех  $x$ . Действительно,  $(Ax, x) = (A_0x, x)$ , где  $A_0 = (A + A^*)/2$  — самосопряженный оператор. Поэтому  $(Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$ , где  $\delta$  — наименьшее собственное значение оператора  $A_0$ . Число  $\delta$  не может равняться нулю в силу положительности оператора  $A$ .

Напомним, что норма оператора  $A$  определяется так:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Если  $A$  — самосопряженный оператор, то имеет место формула

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}. \quad (11)$$

**Лемма 3.** Если  $S = S^*$  — линейный ограниченный оператор,  $n > 0$  — целое число, то

$$\|S^n\| = \|S\|^n. \quad (12)$$

**Доказательство.** Пусть  $n = 2$ . Тогда

$$\|S^2\| = \sup_{\|x\|=1} (S^2x, x) = \sup_{\|x\|=1} \|Sx\|^2 = \|S\|^2,$$

т. е.  $\|S^2\| = \|S\|^2$ .

Пусть формула (12) верна для  $n = k - 1$  и  $n = k$ . Покажем, что она верна для  $n = k + 1$ ,  $k > 1$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \|S^{2k}\| &= \sup_{\|x\|=1} (S^{2k}x, x) = \sup_{\|x\|=1} (S^{k+1}x, S^{k-1}x) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|S^{k+1}x\| \|S^{k-1}x\| \leq \|S^{k+1}\| \|S^{k-1}\|, \end{aligned}$$

т. е.  $\|S^{k+1}\| \|S^{k-1}\| \geq \|S^{2k}\| = \|S^k\|^2 = \|S\|^{2k}$ . Так как  $\|S^{k-1}\| = \|S\|^{k-1}$ , то отсюда следует  $\|S^{k+1}\| \geq \|S\|^{k+1}$ . С другой стороны,  $\|S^{k+1}\| \leq \|S\|^{k+1}$ . Таким образом  $\|S^{k+1}\| = \|S\|^{k+1}$ . Так как формула (12) верна при  $n = 1$  и  $n = 2$ , то она верна для любого  $n$ .

**Лемма 4.** Если  $A$  — самосопряженный положительный и ограниченный оператор, то справедлива оценка

$$\|Ay\|^2 \leq \|A\| (Ay, y). \quad (13)$$

Так как  $A^* = A > 0$ , то существует оператор  $A^{1/2}$ . Полагая  $v = A^{1/2}y$ , получим

$$(Ay, Ay) = (Av, v) \leq \|A\| \|v\|^2 = \|A\| (Ay, y).$$

**3. Линейные операторы в пространстве конечного числа измерений.** Рассмотрим  $n$ -мерное линейное пространство  $R_n$  со скалярным произведением  $(,)$  и нормой  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

По определению конечномерного пространства любой вектор  $x \in R_n$  можно единственным образом представить в виде линейной комбинации  $x = c_1\xi_1 + \dots + c_n\xi_n$  линейно независимых векторов  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , образующих базис пространства  $R_n$ . Числа  $c_k$  называются координатами вектора  $x$ . В качестве базиса всегда можно выбрать ортогональную и нормированную систему векторов  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , т. е. такую, что

$$(\xi_i, \xi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $c_k = (x, \xi_k)$ .

Пусть  $A$  — линейный оператор, заданный на  $R_n$ . Каждому оператору  $A$  в базисе  $\xi_1, \dots, \xi_n$  соответствует матрица  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  размером  $n \times n$ , где  $a_{ik}$  —  $i$ -я компонента вектора  $A\xi_k$ .

Обратно, всякая матрица  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ,  $i, k = 1, \dots, n$  определяет линейный оператор.

Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе есть симметричная матрица.

Остановимся на свойствах собственных значений и векторов линейного самосопряженного оператора  $A$ . *Собственным значением* оператора  $A$  называется такое число  $\lambda$ , что существует вектор  $\xi \neq 0$ , обладающий свойством  $A\xi = \lambda\xi$ . Этот вектор называется *собственным вектором*, принадлежащим (соответствующим) данному собственному значению  $\lambda$ .

1. Самосопряженный оператор  $A$  в  $R_n$  имеет  $n$  взаимно ортогональных собственных векторов  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Будем считать, что все  $\xi_k$  нормированы к единице. Тогда  $(\xi_i, \xi_k) = \delta_{ik}$ . Соответствующие собственные значения расположим в порядке возрастания их абсолютных величин:  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ .

2. Если линейный оператор  $A$ , заданный на  $R_n$ , имеет  $n$  взаимно ортогональных собственных векторов, то  $A$  — самосопряженный оператор,  $A = A^*$ .

3. Если  $A^* = A \geq 0$ , то все собственные значения оператора  $A$  неотрицательны.

4. Произвольный вектор  $x \in R_n$  можно разложить по собственным векторам оператора  $A = A^*$ :

$$x = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k, \quad c_k = (x, \xi_k), \quad \text{причем} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

5. Пусть  $A^* = A \geq 0$  ( $A$  самосопряжен и неотрицателен). Тогда  $\lambda_1 \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq \lambda_n \|x\|^2$  и

$$\lambda_1 \|x\| \leq \|Ax\| \leq \lambda_n \|x\| \quad \text{для всех } x \in H,$$

где  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_n \geq 0$  — наименьшее и наибольшее собственные значения оператора  $A$ .

Норма самосопряженного неотрицательного оператора в  $R_n$  равна его наибольшему собственному значению,  $\|A\| = \lambda_n$ .

6. Если самосопряженные операторы  $A$  и  $B$  перестановочны, т. е.  $AB = BA$ , то они имеют общую систему собственных функций (доказательство см., например, И. М. Гельфанд [1]).

7. Пусть  $A$  и  $B$  перестановочные ( $AB = BA$ ), самосопряженные операторы. Тогда оператор  $AB$  имеет ту же систему собственных функций, что и операторы  $A$  и  $B$ , и собственные значения

$$\lambda_{AB}^{(k)} = \lambda_A^{(k)} \lambda_B^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\lambda_A^{(k)}$ ,  $\lambda_B^{(k)}$  и  $\lambda_{AB}^{(k)}$  — собственные значения номера  $k$  операторов  $A$ ,  $B$  и  $AB = BA$  соответственно. Имеют место также равенства  $\lambda_{A+B}^{(k)} = \lambda_A^{(k)} + \lambda_B^{(k)}$ .

## Г л а в а II

### РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

---

В этой главе изучаются разностные схемы для простейших нестационарных уравнений: одномерного уравнения теплопроводности и уравнения колебаний струны. Построены двухслойные и трехслойные схемы с погрешностью аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ ,  $O(\tau^2 + h^2)$  и  $O(\tau^2 + h^4)$  для первой, второй и третьей краевых задач. Излагаются два способа исследования устойчивости разностных схем: метод разделения переменных и метод энергетических неравенств.

---

#### § 1. Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

Для выяснения методов построения разностных схем в случае нестационарных задач, а также методов их исследования рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами.

**1. Исходная задача.** Процесс распространения тепла на прямой описывается уравнением теплопроводности (см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [6])

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{f}, \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  — температура,  $c$  — теплоемкость единицы массы,  $\rho$  — плотность,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\bar{f}$  — плотность тепловых источников, т. е. количество тепла, выделяющегося в единицу времени на единице длины. Коэффициенты теплопроводности и теплоемкости могут зависеть не только от  $x$ ,  $t$ , но и от температуры  $u$  (в этом случае уравнение называется ква-

зилинейным). Если  $k$  и  $c\rho$  постоянны, то уравнение (1) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{f}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad \bar{f} = \frac{\bar{f}}{c\rho}, \quad (2)$$

где  $a^2$  — коэффициент температуропроводности.

Без ограничения общности можно считать  $a = 1$  и записывать уравнение (2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \quad (3)$$

В самом деле, вводя  $x' = x/a$  и вновь обозначая  $x'$  через  $x$ , получим (3). Если ищется решение уравнения (2) на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , то обычно пользуются безразмерными переменными

$$x' = x/l, \quad t' = a^2 t/l^2.$$

В этих переменных уравнение (2) записывается в виде (3), причем  $0 \leq x' \leq 1$ , а  $f = l^2 \bar{f}/a^2$ .

Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (3) в прямоугольнике

$$\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T).$$

Требуется найти непрерывное в  $\bar{D}$  решение  $u = u(x, t)$  задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= u_1(t), & u(1, t) = u_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

**2. Семейство шеститочечных схем.** Введем сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

и сетку в  $\bar{D}$ :

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагами  $h = 1/N$  и  $\tau = T/j_0$ . Обозначим через  $y_i^j$  значение в узле  $(x_i, t_j)$  сеточной функции  $y$ , определенной на  $\bar{\omega}_{h\tau}$ . Заменяя производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$  первой разностной производной, а  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  — второй разностной производной  $u_{\bar{x}\bar{x}}$  и вводя произвольный вещественный параметр  $\sigma$ , рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda (\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \Phi_i^j, \quad 0 < i < N, 0 \leq j < j_0. \quad (4)$$

Схему (4) будем называть иногда *схемой с весами*.



Краевые и начальные условия аппроксимируем точно

$$y'_0 = u'_1, \quad y'_N = u'_2, \quad (5)$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \quad (6)$$

Здесь  $\varphi_i^j$  — сеточная функция, аппроксимирующая правую часть  $f$  уравнения (3), например,

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+0,5}), \quad t_{j+0,5} = t_j + 0,5\tau,$$

а

$$\Delta y_i = y_{\bar{x}x, i} = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})/h^2.$$

Разностную задачу, определяемую условиями (4) — (6), будем называть задачей (II).

Разностная схема (4) написана на шеститочечном шаблоне, состоящем из узлов

$$(x_{i \pm 1}, t_{j+1}), \quad (x_i, t_{j+1}), \quad (x_{i \pm 1}, t_j), \quad (x_i, t_j)$$

(см. рис. 5, в) с центром в точке  $(x_i, t_{j+1})$ . Уравнение (4) пишется в узлах  $(x_i, t_{j+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $j+1 = 1, 2, \dots, j_0$ , называемых внутренними узлами. Множество всех внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_{h\tau}$  будем обозначать

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j), 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq j_0\}.$$

Краевые и начальные условия (5) и (6) пишутся в граничных узлах сетки  $\bar{\omega}_{h\tau}$ .

Множество узлов сетки  $\bar{\omega}_{h\tau}$ , лежащих на прямой  $t = t_j$ , обычно называют *слоем*. Схема (4) содержит значения искомой функции  $y$  на двух слоях и поэтому называется *двухслойной* схемой.

От выбора параметра  $\sigma$ , как мы убедимся в дальнейшем, зависят точность и устойчивость схемы (4).

Рассмотрим схемы, соответствующие частным значениям  $\sigma$ . При  $\sigma = 0$  получаем четырехточечную схему (рис. 5, а)

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Delta y_i^j + \varphi_i^j,$$

или

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma) y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \quad \gamma = \tau/h^2, \quad (7)$$

определенную на шаблоне  $(x_i, t_{j+1})$ ,  $(x_i, t_j)$ ,  $(x_{i \pm 1}, t_j)$ . Значение  $y_i^{j+1}$  в каждой точке слоя  $t = t_{j+1}$  (нового слоя) выражается по явной формуле (7) через значения  $y_i^j$  на слое  $t = t_j$  (на старом слое). Так как при  $t = 0$  задано начальное значение  $y_i^0 = u_0(x_i)$ , то формула (7) позволяет последовательно определить значения  $y$  на любом слое. Схема (7) называется *явной*.

Если  $\sigma \neq 0$ , то схема (4) называется  *неявной двухслойной схемой*. При  $\sigma \neq 0$  для определения  $y_i^{j+1}$  на новом слое получаем систему алгебраических уравнений

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, N-1$$

с крайевыми условиями

$$y_0^{j+1} = u_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = u_2^{j+1}.$$

Решение этой системы находится методом прогонки (см. гл. I, § 1, п. 9). Укажем еще две схемы.

При  $\sigma = 1$  имеем *схему с опережением* или *чисто неявную схему*

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j. \quad (9)$$

При  $\sigma = 0,5$  получаем *шеститочечную симметричную схему*

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y_i^{j+1} + y_i^j) + \varphi_i^j \quad (10)$$

(называемую иногда схемой Кранка — Никольсона).

Перейдем к выяснению вопросов о погрешности аппроксимации и точности схемы с весами (4).

**3. Погрешность аппроксимации.** Чтобы ответить на вопрос о точности схемы (4) — (6), нужно сравнить решение  $y = y_i^j$  задачи (4) — (6) с решением  $u = u(x, t)$  задачи (I). Так как  $u(x, t)$  — непрерывное решение задачи (I), то положим  $u_i^j = u(x_i, t_j)$  и рассмотрим разность

$$z_i^j = y_i^j - u_i^j.$$

Для оценки сеточной функции  $z_i^j$  на слое выберем некоторую норму  $\|\cdot\|$ , например, одну из следующих норм:

$$\|z\| = \|z\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |z_i|, \quad \|z\| = \left( \sum_{i=1}^{N-1} z_i^2 h \right)^{1/2}.$$

Перейдем к безиндексным обозначениям, полагая (см. гл. I, § 1, п. 2)

$$y_i^j = y, \quad y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau.$$

Перепишем задачу (4) — (6) в виде

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) &= u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), & t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Найдем условия, определяющие  $z = y - u$ . Подставляя  $y = z + u$  в (II) и считая  $u$  заданной функцией, получим для  $z$  задачу

$$\left. \begin{aligned} z_t &= \Lambda(\sigma z + (1 - \sigma)z) + \psi, & (x, t) \in \omega_{ht}, \\ z(0, t) &= z(1, t) = 0, & t \in \omega_\tau, \\ z(x, 0) &= 0, & x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

где

$$\psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) - u_t + \varphi \quad (11)$$

— погрешность аппроксимации схемы (II) на решении  $u = u(x, t)$  уравнения (I).

Напомним определение порядка аппроксимации (см. гл. I, § 1, п. 3). Схема (II) аппроксимирует уравнение (I) с порядком  $(m, n)$  или имеет аппроксимацию  $O(h^m + \tau^n)$  на решении  $u = u(x, t)$  уравнения (I), если  $\|\psi(x, t)\|_{(2)} = O(h^m + \tau^n)$  или  $\|\psi\|_{(2)} \leq M(h^m + \tau^n)$  для всех  $t \in \omega_\tau$ , где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ , а норма  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторая норма на сетке  $\omega_h$ .

Перейдем к оценке порядка аппроксимации схемы (II), предполагая, что  $u = u(x, t)$  имеет нужное по ходу изложения число производных по  $x$  и  $t$ . Будем пользоваться обозначениями:

$$\hat{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \bar{u} = u(x_i, t_{j+0,5}).$$

Разложим  $u = u(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $(x_i, \bar{t} = t_{j+0,5})$ . Пользуясь формулами

$$\hat{u} = 0,5(\hat{u} + u) + 0,5(\hat{u} - u) = 0,5(\hat{u} + u) + 0,5\tau u_t,$$

$$u = 0,5(\hat{u} + u) - 0,5\tau u_t,$$

$$\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u = 0,5(\hat{u} + u) + (\sigma - 0,5)\tau u_t,$$

перепишем  $\psi$  в виде

$$\psi = 0,5\Lambda(\hat{u} + u) + (\sigma - 0,5)\tau\Lambda u_t - u_t + \varphi.$$

Подставляя сюда выражения

$$\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(4)} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\hat{u} = \bar{u} + 0,5\tau \bar{u}' + \frac{\tau^2}{8} \bar{u}'' + O(\tau^3),$$

$$u = \bar{u} - 0,5\tau \bar{u}' + \frac{\tau^2}{8} \bar{u}'' + O(\tau^3),$$

$$0,5(\hat{u} + u) = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8} \bar{u}'' + O(\tau^3), \quad u_t = \bar{u}' + O(\tau^2),$$

получим

$$\psi = (L\bar{u} - \bar{u}' + \varphi) + (\sigma - 0,5)\tau L\bar{u}' + \frac{h^2}{12} L^2 \bar{u} + O(\tau^2 + h^4). \quad (12)$$

Отсюда видно, что  $\psi = (\sigma - 0,5) \tau L\bar{u} + O(h^2 + \tau^2)$  при  $\varphi = \bar{f} = f(x, t_{j+0,5})$ , так как  $\dot{u} = Lu + \dot{f}$ . Учитывая, что  $L\dot{u} = L^2u + L\dot{f} = u^{(4)} + \dot{f}''$  и  $L^2u = L\dot{u} - Lf$ , из (12) получаем

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left[ (\sigma - 0,5) \tau + \frac{h^2}{12} \right] L\bar{u} - \frac{h^2}{12} L\bar{f} + O(h^4 + \tau^2). \quad (13)$$

Приравняем нулю выражение в квадратных скобках и найдем

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*. \quad (14)$$

При этом значении  $\sigma = \sigma_*$  и  $\varphi$ , равном

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} L\bar{f},$$

схема (II) имеет аппроксимацию  $O(h^4 + \tau^2)$ , т. е.  $\psi = O(h^4 + \tau^2)$ . Порядок аппроксимации схемы не нарушится, если мы заменим  $\dot{f}''$  выражением  $\dot{f}_{xx} = \Lambda\dot{f}$ , т. е. положим  $\varphi = \bar{f} + (h^2\Lambda\bar{f})/12$  или

$$\varphi_i = \frac{5}{6} \dot{f}_i^{j+1/2} + \frac{1}{12} (\dot{f}_{i-1}^{j+1/2} + \dot{f}_{i+1}^{j+1/2}). \quad (15)$$

Эта формула удобней для вычислений.

Пусть  $C_n^m(\bar{D})$  — класс функций, имеющих  $m$  производных по  $x$  и  $n$  производных по  $t$ , непрерывных в  $\bar{D}$ . Из формул (13) и (14) ясно, что схема (II) имеет аппроксимацию 1)  $O(h^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = 0,5$ ,  $\varphi = \bar{f}$  или  $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$ , если  $u \in C_3^4$ , 2)  $O(h^2 + \tau)$  при любом  $\sigma \neq 0,5$ ,  $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$ , например,  $\varphi = \hat{f}$  или  $\varphi = \dot{f}$ , если  $u \in C_2^4$ , 3)  $O(h^4 + \tau^2)$  при  $\sigma = \sigma_*$  и  $\varphi$ , заданной формулой (15), если  $u \in C_3^6$ .

Схему (II) с  $\sigma = \sigma_*$  и  $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \Lambda\bar{f}$  называют обычно *схемой повышенного порядка точности*.

Выбор правой части  $\varphi$  должен быть подчинен требованию соблюдения порядка аппроксимации при данном  $\sigma$ . Так, при  $\sigma = 0,5$  можно полагать  $\varphi$  равным  $\varphi = 0,5(\dot{f} + f)$ ,  $\varphi = \bar{f}$  и т. д.

Из (13) видно, что погрешность  $O(h^2 + \tau^2)$  может достигаться и при  $\sigma \neq 0,5$ , если положить

$$\sigma = 0,5 + h^2\alpha/\tau,$$

где  $\alpha$  — любая постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ . В этом случае  $\sigma$  зависит от  $h$  и  $\tau$ . Произвол в выборе  $\alpha$  ограничен условием устойчивости схемы (достаточно взять  $\alpha > -1/4$ , см. п. 4).

**4. Устойчивость по начальным данным.** Исследуем устойчивость схемы (II) методом разделения переменных (при однородных граничных условиях). Пользуясь тождествами

$$\hat{y} = y + \tau y_t, \quad \sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y = y + \sigma \tau y_t,$$

перепишем схему (II) с однородными краевыми условиями в виде

$$\left. \begin{aligned} y_t - \sigma \tau \Delta y_t &= \Delta y + \varphi, & (x, t) \in \omega_\tau, \\ y(0, t) = y(1, t) &= 0, & t \in \omega_\tau, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Схема (16) устойчива, если для решения задачи (16) верна оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' < t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (17)$$

где  $M_1, M_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $h$  и  $\tau$ ,  $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$  — некоторые нормы на слое (на сетке  $\omega_h$ ).

Пусть  $\varphi = 0$ . Тогда оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)}, \quad t \in \omega_\tau, \quad (18)$$

выражает устойчивость схемы (16) по начальным данным. Если  $y(x, 0) = 0$ , то неравенство

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' < t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (19)$$

означает устойчивость схемы (16) по правой части.

Оценка (17) для решения задачи (16) выражает устойчивость схемы (16) по начальным данным и по правой части.

Решение задачи (16) представим в виде суммы  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , где  $\bar{y}$  — решение однородного уравнения

$$y_t - \sigma \tau \Delta y_t = \Delta y, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (16a)$$

а  $\tilde{y}$  — решение неоднородного уравнения с начальным условием  $\tilde{y}(x, 0) = 0$ :

$$y_t - \sigma \tau \Delta y_t = \Delta y + \varphi, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0. \quad (16б)$$

Для исследования устойчивости схемы (16) по начальным данным надо найти оценку для решения задачи (16a). Для этого воспользуемся методом разделения переменных и получим оценку (18) в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$ :

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|, \quad \text{где } \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

Будем искать решение уравнения (16a) в виде произведения функций, одна из которых  $T = T(t_j)$  зависит только от  $t = t_j$ , а вторая  $X = X(x_i)$  — только от  $x = x_i$ , полагая  $y(x, t) = X(x)T(t)$ . Подставим это выражение в (16a) и учтем, что

$$\Delta y = T \Delta X, \quad y_t = X T_t.$$

Тогда получим

$$\frac{\hat{T} - T}{\tau(\sigma\hat{T} + (1-\sigma)T)} = \frac{\Delta X}{X} = -\lambda, \quad \hat{T} = T(t_{j+1}), \quad T = T(t_j),$$

где  $\lambda$  — параметр разделения. Отсюда находим

$$\hat{T} = qT, \quad \text{где} \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda}{1 + \sigma\tau\lambda}.$$

Для  $X$  получаем разностную задачу на отыскание собственных значений (разностную задачу Штурма — Лиувилля):

$$\Delta X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x = ih < 1, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

рассмотренную в гл. I, § 2, п. 2. Там было показано, что эта задача имеет нетривиальные решения — собственные функции

$$X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{N-1},$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Собственные функции  $\{X^{(k)}\}$  образуют ортонормированную систему

$$(X^{(k_1)}, X^{(k_2)}) = \delta_{k_1, k_2} = \begin{cases} 1, & k_1 = k_2, \\ 0, & k_1 \neq k_2. \end{cases}$$

Имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2, \quad (20)$$

где  $f_k$  — коэффициенты разложения любой сеточной функции  $f(x)$ , заданной на  $\bar{\omega}_h$  и равной нулю при  $x=0$ ,  $x=1$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k X^{(k)}(x), \quad f_k = (f, X^{(k)}).$$

Таким образом, задача (16а) имеет нетривиальные решения  $y_{(k)} = T_k X^{(k)} \neq 0$ , где  $T_k$  определяется из уравнения

$$\hat{T}_k = q_k T_k, \quad \text{или} \quad T_k^{j+1} = q_k T_k^j = \dots = q_k^{j+1} T_k^0, \quad (21)$$

$$q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k},$$

$T_k^0$  — произвольная постоянная.

Решение уравнения (16а) вида  $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$  называют гармоникой номера  $k$ . Оно является решением задачи (16а) с начальным условием  $u_0(x) = T_k^0 X^{(k)}(x)$ . Выясним, при каких условиях устойчива каждая из гармоник  $y_{(k)}$  при  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . Из формул

$$y_{(k)}^{j+1} = X^{(k)} T_k^{j+1} = q_k X^{(k)} T_k^j, \quad y_{(k)}^{j+1} = q_k y_{(k)}^j \quad (22)$$

видно, что при  $|q_k| \geq 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ , имеем

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| = |q_k| \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \varepsilon) \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \varepsilon)^{j+1} \|y_{(k)}^0\| \rightarrow \infty$$

при  $\tau \rightarrow 0$ , т. е. задача неустойчива. Если  $|q_k| \leq 1$ , то  $\|y_{(k)}^j\|$  не возрастает с ростом  $j$  ( $\tau \rightarrow 0$ ) при фиксированном  $t = j\tau$ :

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| \leq \|y_{(k)}^j\| \leq \dots \leq \|y_{(k)}^0\|$$

и гармоника устойчива.

Если все  $|q_k| \leq 1$  и, следовательно,  $\|y_{(k)}^j\| \leq \|y_{(k)}^0\|$ , то будем говорить, что схема «устойчива на каждой гармонике».

Выясним теперь, при каких значениях  $\sigma$  выполняется условие  $|q_k| \leq 1$  или  $-1 \leq q_k \leq 1$ , обеспечивающее устойчивость схемы на каждой гармонике. Из формулы  $q_k = 1 - \tau\lambda_h / (1 + \sigma\tau\lambda_h)$  видно, что  $q_k < 1$ , если  $1 + \sigma\tau\lambda_h > 0$ , т. е.  $\sigma > -1/(\tau\lambda_h)$ . Требование  $q_k \geq -1$  или

$$q_k + 1 = \frac{2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \geq 0$$

выполнено при  $2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k \geq 0$  или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}.$$

Условие  $1 + \sigma\tau\lambda_h > 0$  при этом автоматически выполняется. Так как

$$\lambda_k \leq \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}, \quad \text{то} \quad -\frac{1}{\tau\lambda_k} \leq -\frac{1}{\tau\lambda_{N-1}} < -\frac{h^2}{4\tau}$$

и, следовательно, условие  $|q_k| \leq 1$  будет выполнено для всех  $k = 1, 2, \dots, N-1$  при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0. \quad (23)$$

Таким образом, все гармоники  $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$  устойчивы при одном и том же условии  $\sigma \geq \sigma_0$ .

Покажем, что из устойчивости схемы (16а) на каждой гармонике (из спектральной устойчивости) следует ее устойчивость в сеточной норме  $L_2$  по начальным данным  $y(x, 0) = u_0(x)$ , где

$u_0(x)$  — любая сеточная функция, заданная при  $0 \leq x \leq 1$  и равная нулю при  $x = 0, x = 1$ .

Общее решение задачи (16а) ищем в виде суммы частных решений вида (22), полагая

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{y}_{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}, \text{ так что } \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2.$$

Подставляя сюда  $\hat{T}_k = q_k T_k$  и учитывая (20), находим

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)},$$

$$\|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^2 T_k^2 \leq \max_k q_k^2 \sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 = \max_k q_k^2 \|y\|^2.$$

Если  $\sigma \geq \sigma_0$ , то  $\max_k |q_k| \leq 1$  и  $\|\hat{y}\| \leq \|y\|$  или

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y^0\| = \|u_0\|.$$

Таким образом, для решения задачи (16а) верна оценка

$$\|y^j\| \leq \|u_0\| \quad (j = 1, 2, \dots) \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0, \quad (24)$$

т. е. схема (16) устойчива в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$  по начальным данным при  $\sigma \geq \sigma_0$ .

Разностная схема называется *условно устойчивой*, если она устойчива лишь при наличии связи между  $\tau$  и  $h$  и *безусловно устойчивой* — в противоположном случае. Схема, устойчивая при любых  $\tau$  и  $h$ , называется *абсолютно устойчивой* (имеются схемы, устойчивые при достаточно малых  $h$  и  $\tau$ ,  $h \leq h_0$ ,  $\tau \leq \tau_0$ ; эти схемы не являются абсолютно устойчивыми, хотя могут быть и безусловно устойчивыми).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Явная схема ( $\sigma = 0$ ). Условие (23) дает  $0 \geq \geq 0,5 - h^2/(4\tau)$ , т. е.

$$\tau/h^2 \leq 0,5. \quad (25)$$

Явная схема устойчива лишь при условии (25), связывающем шаг  $h$  и  $\tau$  (условно устойчива).

2. Неявная схема при  $\sigma \geq 0,5$  устойчива при любых  $h$  и  $\tau$ , так как  $\sigma \geq 0,5 > \sigma_0$ . Таким образом, схема с опережением ( $\sigma = 1$ ) и симметричная схема ( $\sigma = 0,5$ ) устойчивы при любых  $h$  и  $\tau$  (абсолютно устойчивы).

3. Схема повышенного порядка аппроксимации ( $\sigma = \sigma_*$ ,  $\sigma_* = 0,5 - h^2/(12\tau)$ ) абсолютно устойчива. В самом деле,

$$\sigma_* - \sigma_0 = -\frac{h^2}{12\tau} + \frac{h^2}{4\tau} = \frac{h^2}{6\tau} > 0$$

при любых  $h$  и  $\tau$ .



4. Неявные схемы с  $0 \leq \sigma < 0,5$  при  $\sigma$ , не зависящем от  $\gamma = \tau/h^2$ , условно устойчивы при  $\gamma \leq 1/(2 - 4\sigma)$ .

5. Схема (16) с  $\sigma = 0,5 + h^2\alpha/\tau$ , имеющая аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ , устойчива при любых  $h$  и  $\tau$ , если  $\alpha > -1/4$ .

Таким образом, параметр  $\sigma$  управляет не только порядком аппроксимации, но и устойчивостью схемы (16).

При исследовании устойчивости мы фактически имели дело только с двумя временными слоями  $t_j, t_{j+1}$  и шагом  $\tau = t_{j+1} - t_j$ . Все рассуждения сохраняют силу, если сетка  $\omega_\tau$  неравномерна, т. е. шаг  $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$  зависит от номера слоя. В этом случае параметр  $\sigma$  можно считать зависящим от номера  $j+1$  слоя,  $\sigma = \sigma^{j+1}$ . Тогда вместо (23) получим условие  $\sigma \geq \sigma_0^{j+1} = 0,5 - h^2/(4\tau_{j+1})$ . Для схемы  $O(h^4 + \tau_{j+1}^2)$ , в частности, следует положить  $\sigma_0^{j+1} = 0,5 - h^2/(12\tau_{j+1})$ . Условие  $\sigma \geq \sigma_0^{j+1}$  достаточно для устойчивости схемы с весами при неравномерной сетке  $\omega_\tau$ .

5. Устойчивость по правой части. Покажем, что условие (23)

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$$

достаточно для устойчивости схемы (16) и по правой части при  $\sigma \geq 0$ . Для этого рассмотрим задачу (16б). Ее решение ищем в виде

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}, \quad \text{так что} \quad \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2. \quad (26)$$

Правую часть  $\varphi$  разложим по  $\{X^{(k)}\}$ :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)}, \quad \text{так что} \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2. \quad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в (16б) и учитывая, что  $\Lambda X^{(k)} = -\lambda_k X^{(k)}$ , найдем

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{T_{ki}(1 + \sigma\tau\lambda_k) + \lambda_k T_k - \varphi_k\} X^{(k)} = 0.$$

Отсюда, в силу ортогональности системы собственных функций следует, что выражение в фигурных скобках равно нулю, т. е.

$$\hat{T}_k = q_k T_k + \frac{\tau\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}, \quad q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}. \quad (28)$$

Подставим (28) в (26):

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} X^{(k)}.$$

Пользуясь неравенством треугольника ( $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ ), находим

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| \left( \sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 \right)^{1/2} + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} \left( \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k^2 \right)^{1/2},$$

или

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| \|y\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} \|\Phi\|. \quad (29)$$

Пусть одновременно выполняются условия

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \quad \sigma \geq 0. \quad (30)$$

Тогда  $|q_k| \leq 1$ ,  $1 + \sigma\tau\lambda_k \geq 1$  и

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau \|\Phi\| \quad \text{или} \quad \|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| + \tau \|\Phi^j\|.$$

Суммируя по  $j' = 0, 1, 2, \dots, j$ , приходим к оценке

$$\|y^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\Phi^{j'}\|, \quad (31)$$

так как  $\|y^0\| = 0$  для решения задачи (166).

Оценка (31) получена при условии (30). Откажемся теперь от требования  $\sigma \geq 0$  и вместо (30) потребуем

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (32)$$

где  $\varepsilon = \text{const} > 0$  не зависит от  $h, \tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} |q_k| \leq 1, \quad 1 + \sigma\tau\lambda_k &= 1 + (\sigma - \sigma_\varepsilon)\tau\lambda_k + \sigma_\varepsilon\tau\lambda_k \geq 1 + \sigma_\varepsilon\tau\lambda_k = \\ &= 1 + 0,5\tau\lambda_k - \frac{(1-\varepsilon)h^2\lambda_k}{4} > 1 - \\ &- \frac{(1-\varepsilon)h^2\lambda_{N-1}}{4} > 1 - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4} \cdot \frac{4}{h^2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.  $1 + \sigma\tau\lambda_k > \varepsilon$  для всех  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . Поэтому из (29) следует оценка  $\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau \|\Phi\|/\varepsilon$  и

$$\|y^{j+1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\Phi^{j'}\|. \quad (33)$$

Если  $\sigma = \sigma_*$ , то условие  $\sigma_* < 0$  означает, что  $\tau < h^2/6$ . В этом случае можно выбрать  $\varepsilon = 2/3$ , так как  $(1-\varepsilon)/4 = 1/12$  при  $\varepsilon = 2/3$ . Объединяя оценки (24) и (31), (33), видим, что верно следующее утверждение.

Если выполнены условия

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0, \quad \sigma \geq 0,$$

то схема (16) устойчива по начальным данным и по правой части, так что для решения задачи (16) справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|. \quad (34)$$

Если  $\sigma < 0$ , то для устойчивости схемы (16) по правой части достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau} = \sigma_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

где  $\varepsilon \in (0, 1)$  — произвольная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ . При этом для решения задачи (16) имеет место оценка

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|. \quad (35)$$

Для схемы  $O(h^4 + \tau^2)$  постоянная  $\varepsilon = 2/3$ , а  $\sigma_* < 0$  при  $\tau < h^2/6$ .

**6. Сходимость и точность.** Сходимость схемы (II) следует из ее устойчивости и аппроксимации. Погрешность  $z = y - u$  является решением задачи (III). Пользуясь априорной оценкой (31), получаем

$$\|z^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\| \quad \text{при} \quad \sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma \geq 0. \quad (36)$$

Отсюда видно, что верна теорема:

Если схема (II) устойчива по правой части и аппроксимирует задачу (I), то она сходится, причем порядок ее точности совпадает с порядком аппроксимации.

Подставляя в (36) оценки из п. 3 для погрешности аппроксимации, получаем, что

$$\|y^j - u^j\| = \begin{cases} O(h^2 + \tau^2), & \sigma = 0,5, \quad u \in C_3^4, \\ O(h^4 + \tau^2), & \sigma = \sigma_*, \quad u \in C_3^6, \\ O(h^2 + \tau), & \sigma \neq 0,5, \quad \sigma \neq \sigma_*, \quad u \in C_2^4. \end{cases}$$

До сих пор всюду шла речь об устойчивости и сходимости в среднем, т. е. в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$ . Между тем, для практики важно иметь равномерную, т. е. в норме  $\|y^j - u^j\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y^j - u^j|$ , оценку для погрешности решения.

Для получения равномерной оценки решения разностной задачи (16) можно воспользоваться одним из трех методов:

1) принципом максимума, 2) энергетическим методом, который позволяет установить (при помощи теорем вложения) устойчивость в  $C$  по правой части, 3) представлением решения в «интегральной» форме через сеточную функцию мгновенного точечного источника (функцию Грина).

Принцип максимума позволяет доказать равномерную устойчивость при дополнительном условии

$$\sigma \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Отсюда видно, что схема с опережением ( $\sigma = 1$ ) равномерно устойчива при любых  $\tau$  и  $h$ .

Методом функции Грина С. И. Сердюковой [2], [3] доказана равномерная устойчивость по начальным данным симметричной схемы ( $\sigma = 0,5$ ) и схемы повышенного порядка точности ( $\sigma = 1/2 - h^2/(12\tau)$ ).

**7. Метод энергетических неравенств.** Используем описанный в гл. I метод энергетических неравенств для исследования устойчивости схемы с весами (II).

Проиллюстрируем этот метод сначала на примере дифференциального уравнения. Рассмотрим задачу (I) с однородными краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Введем скалярное произведение и норму

$$(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x) dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  — функции, заданные при  $0 \leq x \leq 1$  и равные нулю при  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Умножим уравнение на  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до 1:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \left( -\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \left( f, \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Интегрируя второе слагаемое по частям и учитывая равенство

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0^1 = 0, \quad \text{находим}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 = \left( f, \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши — Буняковского и  $\varepsilon$ -неравенством:

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

при  $\varepsilon = 1$ :

$$\left(f, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \leq \left| \left(f, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \|f\| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4} \|f\|^2.$$

Используя эту оценку, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f(x, t)\|^2,$$

откуда, после интегрирования по  $t$ , следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right\| &\leq \left\| \frac{\partial u(0)}{\partial x} \right\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^t \|f(t')\|^2 dt' \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial u(0)}{\partial x} \right\| + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{0 < t \leq T} \|f(t)\|. \end{aligned}$$

Учитывая затем, что  $\|u\|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq 0,5 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|$ , получим

$$\|u(t)\|_C \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u(0)}{\partial x} \right\| + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{0 < t \leq T} \|f(t)\|.$$

Получим теперь аналогичную оценку для разностной задачи (16). Введем, как обычно, скалярные произведения и нормы

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$(y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\|] = \sqrt{(y, y]}.$$

Пользуясь тождествами

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2} y_t, \quad \hat{y} = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) + \frac{\tau}{2} y_t,$$

$$\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y = (\sigma - 0,5) \tau y_t + 0,5(\hat{y} + y),$$

перепишем (16б) в виде

$$\left. \begin{aligned} y_t - (\sigma - 0,5) \tau \Lambda y_t - 0,5 \Lambda (\hat{y} + y) &= \varphi, \\ y(x, 0) = 0, \quad y(0, t) = y(1, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Умножим уравнение (38) на  $2\tau y_t h = 2(\hat{y} - y)h$  и просуммируем полученное равенство по внутренним узлам  $x = ih$  сетки  $\omega_h$ :

$$2\tau \|y_t\|^2 - 2(\sigma - 0,5) \tau^2 (\Lambda y_t, y_t) - (\Lambda(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau (\varphi, y_t). \quad (39)$$

Пользуясь разностной формулой Грина (см. гл. I, § 2)

$$(\Lambda v, w) = (v_{\bar{x}\bar{x}}, w) = - (v_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}], \quad v_0 = w_0 = 0, \quad v_N = w_N = 0,$$

при  $v = y_t$ ,  $w = y_t$  и  $v = \hat{y} + y$ ,  $w = \hat{y} - y$  соответственно, учитывая затем, что  $y_0 = y_N = 0$ , будем иметь

$$(\Lambda y_t, y_t) = - \|y_{t\bar{x}}\|^2,$$

$$(\Lambda(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = - (\hat{y}_{\bar{x}} + y_{\bar{x}}, \hat{y}_{\bar{x}} - y_{\bar{x}}) = - (\|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 - \|y_{\bar{x}}\|^2).$$

Подставив эти выражения в (39), получим энергетическое тождество

$$2\tau (\|y_t\|^2 + (\sigma - 0,5)\tau \|y_{t\bar{x}}\|^2) + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 = \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t). \quad (40)$$

Оно справедливо при любых  $\sigma$ . Предположим, что  $\sigma \geq \sigma_0$ . Рассмотрим выражение

$$J = \|v\|^2 + (\sigma - 0,5)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2, \quad \text{где } v = y_t, \quad (41)$$

и покажем, что  $J \geq 0$  при  $\sigma \geq \sigma_0$ . Нам понадобится оценка (см. гл. I, § 2, п. 3)

$$\|v_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|v\|^2. \quad (42)$$

Итак, пусть  $\sigma \geq \sigma_0$ . Тогда

$$J = \|v\|^2 + (\sigma - \sigma_0)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 + (\sigma_0 - 0,5)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 \geq \|v\|^2 - \frac{h^2}{4} \|v_{\bar{x}}\|^2 \geq 0$$

в силу (42). Отсюда и из (40) следует энергетическое неравенство

$$\|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t) \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0.$$

Если  $\varphi = 0$ ,  $y$  — решение задачи (16а), то  $\|y_{\bar{x}}^{j+1}\| \leq \dots \leq \|y_{\bar{x}}^0\|$ , т. е. схема (16) при  $\sigma \geq \sigma_0$  устойчива по начальным данным в норме  $\|y\|_{(1)} = \|y_{\bar{x}}\|$ , являющейся сеточным аналогом нормы  $\overset{\circ}{W}_2^1$ .

Однако нас интересует устойчивость по правой части. Пусть

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (43)$$

Покажем, что

$$J \geq \varepsilon \|v\|^2 \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_\varepsilon. \quad (44)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} J &= \|v\|^2 + (\sigma - \sigma_\varepsilon)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 + (\sigma_\varepsilon - 0,5)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 \geq \\ &\geq \|v\|^2 - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4} \|v_{\bar{x}}\|^2 \geq \|v\|^2 - (1-\varepsilon)\|v\|^2 = \varepsilon \|v\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя (44) в (40), получим энергетическое неравенство

$$2\tau\varepsilon \|y_t\|^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t), \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon. \quad (45)$$

Воспользуемся теперь неравенством Коши — Буняковского и  $\epsilon$ -неравенством:

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\| \|y_t\| \leq 2\tau\epsilon \|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\epsilon} \|\varphi\|^2. \quad (46)$$

После подстановки (46) в (45) будем иметь

$$\|y_{\bar{x}}^{j'+1}\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}^{j'}\|^2 + \frac{\tau}{2\epsilon} \|\varphi^{j'}\|^2.$$

Просуммируем по  $j' = 0, 1, \dots, j$  и учтем, что  $y^0 = 0$ :

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\epsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|^2.$$

Согласно лемме 1, гл. I, § 2 имеем  $\|y\|_C \leq 0,5\|y_{\bar{x}}\|$ ; поэтому

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \frac{1}{2\sqrt{2\epsilon}} \left[ \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|^2 \right]^{1/2}, \quad \sigma \geq \sigma_\epsilon. \quad (47)$$

Применим эту оценку к задаче (III):

$$\|z^{j+1}\|_C \leq M_2 \max_{0 \leq j' \leq j} \|\psi^{j'}\|, \quad M_2 = \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2\epsilon}}, \quad \sigma \geq \sigma_\epsilon. \quad (48)$$

Отсюда следует равномерная сходимость схемы (II):

$$\|y^j - u^j\|_C \leq \begin{cases} M(h^2 + \tau) & \text{при } \sigma > 0,5, \quad u \in C_2^4, \\ M(h^2 + \tau^2) & \text{при } \sigma = 0,5, \quad u \in C_3^4, \\ M(h^4 + \tau^2) & \text{при } \sigma = \sigma_*, \quad u \in C_3^6. \end{cases}$$

Для явной схемы ( $\sigma = 0$ ) из (43) не следует равномерная сходимость при условии  $\tau \leq h^2/2$ . Однако, для нее можно непосредственно получить оценку

$$\|y^j\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C, \quad \tau \leq h^2/2. \quad (49)$$

В самом деле, запишем явную схему в виде

$$\hat{y}_i = (1 - 2\gamma) y_i + \gamma(y_{i-1} + y_{i+1}) + \tau\varphi_i, \quad \gamma = \tau/h^2.$$

Если  $\gamma \leq 0,5$ , то

$$\begin{aligned} |\hat{y}_i| &\leq (1 - 2\gamma) |y_i| + \gamma(|y_{i+1}| + |y_{i-1}|) + \tau |\varphi_i| \leq \\ &\leq (1 - 2\gamma) \|y\|_C + \gamma(\|y\|_C + \|y\|_C) + \tau \|\varphi\|_C = \|y\|_C + \tau \|\varphi\|_C, \end{aligned}$$

или

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^j\|_C + \tau \|\varphi^j\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C.$$

Таким образом, явная схема равномерно устойчива по начальным данным и правой части, если  $\gamma = \tau/h^2 \leq 0,5$ . Отсюда и следует ее равномерная сходимость со скоростью  $O(\tau + h^2)$ .

**8. Краевые условия третьего рода.** Краевые условия первого рода, которые мы рассматривали до сих пор, удовлетворяются на сетке точно.

В гл. I было показано, как аппроксимировать третье краевое условие для схемы с опережением ( $\sigma = 1$ ) и явной схемы ( $\sigma = 0$ ), чтобы обеспечить порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ . Здесь мы рассмотрим схему с весами (II) с произвольным  $\sigma$ .

Пусть при  $x = 0$  задано краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 = \text{const} > 0. \quad (50)$$

Разностное краевое условие будем писать на четырехточечном шаблоне, состоящем из узлов  $(0, t_{j+1})$ ,  $(h, t_{j+1})$ ,  $(0, t_j)$ ,  $(h, t_j)$ . Покажем, что разностное условие

$$\sigma(\hat{y}_x - \beta_1 \hat{y})_0 + (1 - \sigma)(y_x - \beta_1 y)_0 = 0,5 h y_{t,0} - \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 + 0,5 h \bar{f}_0, \quad (51)$$

где  $\bar{f}_0 = f(0, t_{j+1/2})$ ,  $\bar{\mu}_1 = \mu_1(t_{j+1/2})$ , аппроксимирует условие (50) на решении  $u = u(x, t)$  уравнения (3), удовлетворяющем условию (50), причем с тем же порядком, с которым при данном значении  $\sigma$  схема (II) аппроксимирует уравнение (3).

Подставим  $y = z + u$  в (51):

$$\sigma(\hat{z}_x - \beta_1 \hat{z})_0 + (1 - \sigma)(z_x - \beta_1 z)_0 = 0,5 h z_{t,0} - \tilde{v}_1, \quad (52)$$

где

$$\tilde{v}_1 = \sigma(\hat{u}_x - \beta_1 \hat{u})_0 + (1 - \sigma)(u_x - \beta_1 u)_0 - 0,5 h u_{t,0} + \bar{\mu}_1$$

— погрешность аппроксимации условия (50) разностным условием (51).

Разлагая  $u$  в окрестности узла  $(0, t_j + 0,5\tau)$  по формуле Тейлора и обозначая  $\bar{v}_0$  значения функции  $v$  в этом узле, получаем

$$\tilde{v}_1 = (\bar{u}'_0 - \beta_1 \bar{u}_0 + \bar{\mu}_1) + (\sigma - 0,5) \tau (\bar{u}' - \beta_1 \bar{u}) - 0,5 h \bar{u}' + 0,5 h \bar{u}'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Подставим сюда  $\bar{u}'_0 = \beta_1 \bar{u}_0 - \bar{\mu}_1$  и  $\bar{u}'' = \bar{u}_0 - \bar{f}_0$  из уравнения:

$$\bar{v}_1 = (\sigma - 0,5) \tau (\bar{u}'_0 - \beta_1 \bar{u}_0) + O(\tau^2 + h^2).$$

Отсюда видно, что

$$\tilde{v}_1 = O(h^2 + \tau) \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0,5, \quad \tilde{v}_1 = O(h^2 + \tau^2) \quad \text{при} \quad \sigma = 0,5. \quad (53)$$



Нетрудно проверить, что краевое условие при  $x=1$

$$-\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_2 u(1, t) - \mu_2(t), \quad \beta_2 = \text{const} > 0, \quad (54)$$

аппроксимируется с тем же порядком разностным условием

$$-\left[ \sigma(\hat{y}_{\bar{x}} + \beta_2 \hat{y})_N + (1 - \sigma)(y_{\bar{x}} + \beta_2 y)_N \right] = 0,5 h y_{t, N} - \bar{\mu}_2, \quad (55)$$

где

$$\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 + 0,5 h f_N, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2(t_{j+1/2}), \quad \bar{f}_N = f(1, t_{j+1/2}).$$

Выбирая

$$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 + \frac{h^2}{12} \bar{\mu}_1 + \frac{h^2}{6} \bar{f}_0 + \frac{h}{2} \Phi_0,$$

$$\bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 + \frac{h^2}{12} \bar{\mu}_2 - \frac{h^2}{6} \bar{f}_N + \frac{h}{2} \Phi_N, \quad \Phi = \bar{f} + \frac{h^2}{12} \bar{f}''$$

и заменяя, соответственно,  $0,5 h y_{t, 0}$ ,  $0,5 h y_{t, N}$  в (51), (55) на  $0,5 h \rho_1 y_{t, 0}$ ,  $0,5 h \rho_2 y_{t, N}$ , где  $\rho_k = 1 + h \beta_k / 3$ ,  $k=1, 2$ , получим разностные граничные условия, имеющие при  $\sigma = \sigma_* = 0,5 - h^2/(12\tau)$  аппроксимацию  $O(h^4 + \tau^2)$ .

Вводя обозначения

$$\Lambda^- y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5 h}, \quad \Lambda^+ y = -\frac{y_{\bar{x}} + \beta_2 y}{0,5 h},$$

запишем разностные краевые условия (51) и (55) в том же виде, что и схему (II):

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda^- (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \Phi^- \quad \text{при } x=0, \\ y_t &= \Lambda^+ (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \Phi^+ \quad \text{при } x=1, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где  $\Phi^- = 2\bar{\mu}_1/h$ ,  $\Phi^+ = 2\bar{\mu}_2/h$ .

При  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  получаем разностную аппроксимацию краевых условий второго рода. Порядок аппроксимации остается тем же самым, что и для третьей краевой задачи.

Приведем условие (51) к счетному (т. е. удобному для вычислений) виду. Разрешая (51) относительно  $\hat{y}_0 = y_0^{l+1}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}_0 &= \kappa_1 \hat{y}_1 + \nu_1, \quad \kappa_1 = \frac{\sigma}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = \sigma(1 + \beta_1 h) + \frac{h^2}{2\tau}, \\ \nu_1 &= \frac{1}{\Delta_1} \left\{ (1 - \sigma) y_1 + \left[ \frac{h^2}{2\tau} - (1 - \sigma)(1 + \beta_1 h) \right] y_0 + h \bar{\mu}_1 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Условие (55) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}_N &= \kappa_2 \hat{y}_{N-1} + \nu_2, \quad \kappa_2 = \frac{\sigma}{\Delta_2}, \quad \Delta_2 = \sigma(1 + \beta_2 h) + \frac{h^2}{2\tau}, \\ \nu_2 &= \frac{1}{\Delta_2} \left\{ (1 - \sigma) y_{N-1} + \left[ \frac{h^2}{2\tau} - (1 - \sigma)(1 + \beta_2 h) \right] y_N + h \bar{\mu}_2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Отсюда видно, что  $0 < \kappa_\alpha \leq 1$  при  $\beta_\alpha \geq 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Для определения  $\hat{y}$  на новом слое получаем разностное уравнение (8) с крайевыми условиями (57) и (58). Эта задача при  $\sigma \neq 0$  решается методом прогонки (см. гл. I, § 1, п. 9).

Устойчивость схемы (II) с крайевыми условиями третьего рода устанавливается либо методом разделения переменных, либо методом энергетических неравенств.

**9. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности.** Одной из первых схем, применявшихся для численного решения уравнения теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , была явная трехслойная схема Ричардсона

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda y^j \quad \text{или} \quad y_t^0 = \Lambda y, \quad (59)$$

где

$$y_t^0 = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad y = y^j, \quad \Lambda y = y_{xx}.$$

Эта схема, как нетрудно убедиться, имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ ,  $\psi = \Lambda u - u_t^0 = O(\tau^2 + h^2)$ . Однако она является абсолютно неустойчивой (т. е. неустойчивой при любом законе стремления  $h$  и  $\tau$  к нулю).

Перепишем уравнение (59) в виде

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}. \quad (60)$$

Если в правой части уравнения (60) заменить  $2y_i^j$  суммой  $y_i^{j+1} + y_i^{j-1}$ , то получим трехслойную схему «ромб» (схему Дюфорта и Франкела [1]):

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i-1}^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1} + y_{i+1}^j}{h^2}, \quad (61)$$

которая остается явной относительно  $y_i^{j+1}$  и является абсолютно (при любых  $h$  и  $\tau$ ) устойчивой. Схема «ромб» может быть записана в виде

$$y_t^0 + \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt} = \Lambda y, \quad (62)$$

где

$$y_{tt} = (y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1})/\tau^2.$$

В самом деле, преобразуем правую часть уравнения (61):

$$\frac{y_{i-1}^j - \hat{y}_i - \check{y}_i + y_{i+1}^j}{h^2} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} - \frac{\hat{y}_i - 2y_i^j + \check{y}_i}{h^2} = y_{xx} - \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt}.$$

Подставляя это выражение в (61), получаем (62). Таким образом, схема «ромб» получается из схемы Ричардсона добавлением к левой части (61) члена  $\frac{\tau^2}{h^2} y_{tt}$ , обеспечивающего устойчивость. Доказательство устойчивости схемы (62) следует из общей теории гл. VI, поэтому мы его здесь не касаемся. Погрешность аппроксимации схемы (62) есть

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda u - u_i - \frac{\tau^2}{h^2} u_{tt} = u'' - \dot{u} - \frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= -\frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что схема «ромб» обладает условной аппроксимацией

$$\psi = O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2) = O(h^2) \quad \text{при } \tau = O(h^2).$$

Если взять  $\tau = \alpha h(1 + O(h))$ , где  $\alpha = \text{const}$ , то, очевидно, что схема (62) аппроксимирует уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обычно для уравнения (3) используются неявные трехслойные схемы с весами:

а) симметричные схемы

$$y_i = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, \quad (63)$$

б) несимметричные схемы

$$y_t + \sigma \tau y_{tt} = \Lambda \hat{y} + \varphi. \quad (64)$$

Уравнения (63) и (64) содержат три слоя  $(t_{j-1}, t_j, t_{j+1})$ . Поэтому они пишутся при  $t_j \geq \tau(j \geq 1)$ . Значение  $y(x, 0) = u_0(x)$  известно, значение  $y(x, \tau)$  надо задавать дополнительно, например, можно положить

$$y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) \quad \text{или} \quad y(x, \tau) = y(x, 0) + \tau \bar{u}_0(x),$$

где  $\bar{u}_0(x) = u_0''(x) + f(x, 0)$  выбирается из условия (см. гл. I, § 1, п. 6)

$$u(x, \tau) - u(x, 0) = O(\tau^2).$$

Иногда для определения  $y(x, \tau)$  используют двухслойные схемы.

Так как

$$\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y} = u + \sigma \tau^2 u_{tt} = u + O(\tau^2),$$

то симметричная схема (63) при любом  $\sigma$  имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ . Напишем выражение погрешности аппроксимации для схемы (64):

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda \hat{u} + \varphi - (u_i + \sigma \tau u_{ii}) = L \hat{u} + \varphi - (\hat{u} - 0,5\tau \hat{u}' + \sigma \tau \hat{u}'') + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= (L \hat{u} + \hat{f} - \hat{u}') + (\varphi - \hat{f}) - (\sigma - 0,5) \tau \hat{u}' + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (65)$$

Отсюда видно, что и для схемы (64)

$$\psi = O(h^2 + \tau^2) \quad \text{при } \sigma = 0,5, \quad \varphi = \hat{f},$$

$$\psi = O(h^2 + \tau) \quad \text{при } \sigma \neq 0,5, \quad \varphi = \hat{f}.$$

Выписывая в (65) члены  $O(h^2)$  и учитывая уравнение  $\hat{u}' = u'' + f$ , нетрудно убедиться в том, что схема (64) имеет аппроксимацию  $O(h^4 + \tau^2)$  при

$$\sigma = 0,5 + h^2/(12\tau) \quad \text{и} \quad \varphi = \hat{f} + \frac{h^2}{12} (\hat{f}'' + \hat{f}').$$

Для определения  $\hat{y}$  из (63) и (64) получаем трехточечные уравнения

$$A \hat{y}_{i-1} - C \hat{y}_i + B \hat{y}_{i+1} = -F_i \quad (66)$$

с правой частью  $-F_i$ , зависящей от  $y, \check{y}, \varphi$ , и с обычными крайевыми условиями при  $i = 0, i = N$ . Эта задача решается методом прогонки. В процессе счета надо хранить в оперативной памяти ЭВМ значения  $y$  и  $\check{y}$  для двух предыдущих слоев. В случае двухслойных схем достаточно запоминать лишь один предыдущий слой.

Устойчивость трехслойных схем доказывается в гл. VI. Приведем лишь достаточные условия устойчивости:

$$\sigma > 1/4 \quad \text{для симметричной схемы (63),}$$

$$\sigma \geq 0 \quad \text{для схемы (64).}$$

Так же, как и в случае двухслойных схем, можно построить разностные краевые условия повышенного порядка аппроксимации для граничных условий третьего рода (50), (54). Для симметричной схемы (4) краевые условия порядка аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$  имеют вид

$$y_0^+ = \Lambda^+ (\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \check{y}) + \varphi^+, \quad i = 0,$$

$$y_1^- = \Lambda^- (\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \check{y}) + \varphi^-, \quad i = N,$$

где

$$\Lambda^+ y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5h}, \quad \Lambda^- y = - \frac{y_{\bar{x}} + \beta_2 y}{0,5h},$$

$$\varphi^+ = f(0, t) + \frac{\mu_1(t)}{0,5h}, \quad \varphi^- = f(1, t) + \frac{\mu_2(t)}{0,5h}.$$

Выпишем, далее, разностные краевые условия третьего рода для несимметричной схемы (64):

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(y_t + \sigma\tau y_{tt}) &= \Lambda^+ \hat{y} + \varphi^+, & i=0, \\ \rho_2(y_t + \sigma\tau y_{tt}) &= \Lambda^- \hat{y} + \varphi^-, & i=N. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Эти краевые условия имеют аппроксимацию  $O(\tau + h^2)$  при любом  $\sigma$ , если положить

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \varphi^+ = f(0, t + \tau) + \frac{\mu_1(t + \tau)}{0,5h}, \quad \varphi^- = f(1, t + \tau) + \frac{\mu_2(t + \tau)}{0,5h}.$$

Если при этом  $\sigma = 0,5$ , то краевые условия (67) имеют аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ . Наконец, если положить

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau}, \quad \rho_1 = 1 + \frac{h\beta_1}{3}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{h\beta_2}{3},$$

$$\varphi^+ = \varphi + \frac{v_1}{0,5h}, \quad \varphi^- = \varphi + \frac{v_2}{0,5h},$$

$$\varphi = f(x, t + \tau) + \frac{h^2}{12} (f''(x, t + \tau) + \dot{f}(x, t + \tau)),$$

$$v_1 = \mu_1(t + \tau) + \frac{h^2}{6} (\dot{\mu}_1(t + \tau) + f'(0, t + \tau)),$$

$$v_2 = \mu_2(t + \tau) + \frac{h^2}{6} (\dot{\mu}_2(t + \tau) - f'(1, t + \tau)),$$

то получим схему (64), имеющую аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^4)$ .

## § 2. Разностные схемы для уравнения колебаний струны

**1. Постановка разностной задачи и вычисление погрешности аппроксимации.** Рассмотрим уравнение колебаний однородной струны (см., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [6]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1(x, t), \quad 0 < x_1 < l, \quad t_1 > 0.$$

Вводя безразмерные переменные  $x = x_1/l$ ,  $t = at_1/l$ , перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

В начальный момент заданы условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \dot{u}_0(x), \quad (2)$$

(начальное отклонение  $u_0(x)$ ) и начальная скорость  $\bar{u}_0(x)$ ). Концы струны движутся по заданным законам

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t). \quad (3)$$

Введем в области  $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$  прямоугольную сетку  $\bar{\omega}_{ht}$  (по аналогии с § 1, п. 2). Так как уравнение (1) содержит вторую производную по  $t$ , то число слоев не может быть меньше трех. Пользуемся, как и выше, обозначениями

$$y = y^j, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad \Delta y = y_{\bar{x}x},$$

$$y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}, \quad y_{\bar{t}} = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{2} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}.$$

Заменим производные, входящие в уравнение (1), по формулам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim u_{\bar{t}t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \Delta u = u_{\bar{x}x}, \quad f \sim \varphi.$$

Рассмотрим семейство схем с весами

$$\left. \begin{aligned} y_{\bar{t}t} &= \Lambda (\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, & \varphi &= \dot{f}(x, t_j), \\ y_0 &= \mu_1(t), \quad y_N = \mu_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\bar{u}_0(x)$  определим ниже.

Краевые условия и первое начальное условие  $u(x, 0) = u_0(x)$  на сетке  $\bar{\omega}_{ht}$  удовлетворяются точно. Выберем  $\bar{u}_0(x)$  так, чтобы погрешность аппроксимации  $\bar{u}(x) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}(x) - \bar{u}_0(x)$  была величиной  $O(\tau^2)$ . Из формулы

$$u_t(x, 0) = \dot{u}(x, 0) + 0,5\tau \ddot{u}(x, 0) + O(\tau^2) =$$

$$= \bar{u}_0(x) + 0,5\tau (u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2) =$$

$$= \bar{u}_0(x) + 0,5\tau (u''_0(x) + f(x, 0)) + O(\tau^2)$$

видно, что  $\bar{u}(x) - u_t(x, 0) = O(\tau^2)$ , если положить

$$\bar{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau (u''_0(x) + f(x, 0)). \quad (5)$$

Таким образом, разностная задача (4) — (5) поставлена. Для определения  $\hat{y} = y^{j+1}$  получаем из (4) краевую задачу

$$\sigma \gamma^2 (y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) - (1 + 2\sigma \gamma^2) y_i^{j+1} = -F_i, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2,$$

$$\gamma = \tau/h, \quad F_i = (2y_i^j - y_i^{j-1}) + \tau^2 (1 - 2\sigma) \Delta y^j + \sigma \tau^2 \Delta y^{j-1} + \tau^2 \varphi,$$

которая решается методом прогонки. Прогонка устойчива при  $\sigma > 0$  (см. гл. I, § 1, п.9).

Вычислим погрешность аппроксимации схемы (4) при  $\varphi = f(x, t_j)$ . Пусть  $y$  — решение задачи (4), (5),  $u = u(x, t)$  — решение задачи

(1) — (3). Подставляя  $y = z + u$  в (4), получим

$$\left. \begin{aligned} z_{tt} &= \Lambda (\sigma \dot{z} + (1 - 2\sigma) z + \sigma \ddot{z}) + \psi, \\ z_0 = z_N = 0, \quad z(x, 0) &= 0, \quad z_t(x, 0) = v(x), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\psi = \Lambda (\sigma \dot{u} + (1 - 2\sigma) u + \sigma \ddot{u}) + \varphi - u_{tt}$$

— погрешность аппроксимации для схемы (4) на решении  $u = u(x, t)$ ,  $v = \tilde{u}_0(x) - u_t(x, 0)$  — погрешность аппроксимации для второго начального условия  $y_t = \tilde{u}_0(x)$ . Из предыдущего ясно, что  $v = O(\tau^2)$ .

Учитывая, что  $\dot{u} = u + \tau u_t$ ,  $\ddot{u} = u - \tau u_t$ , имеем

$$\sigma \dot{u} + (1 - 2\sigma) u + \sigma \ddot{u} = u + \sigma \tau^2 u_{tt},$$

т. е.

$$\psi = \Lambda u + \sigma \tau^2 \Lambda u_{tt} + \varphi - u_{tt} = Lu + \sigma \tau^2 L \ddot{u} + f - \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2), \quad (7)$$

$\psi = O(\tau^2 + h^2)$  при любом значении постоянной  $\sigma$  ( $\sigma$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ ).

Выписывая в (7) члены  $O(h^2)$ , получим

$$\begin{aligned} \psi &= (\varphi - f) + \sigma \tau^2 L \ddot{u} + \frac{h^2}{12} L^2 u + O(h^4 + \tau^2) = \\ &= (\varphi - f) + \left( \sigma \tau^2 + \frac{h^2}{12} \right) L^2 u + \sigma \tau^2 L f + O(h^4 + \tau^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при

$$\sigma = -\frac{h^2}{12\tau^2} + \bar{\sigma}, \quad \varphi = f - \sigma \tau^2 \Lambda f \quad (8)$$

схема (4) имеет повышенный порядок аппроксимации,  $\psi = O(h^4 + \tau^2)$ . Здесь  $\bar{\sigma}$  — постоянная, не зависящая от  $\tau$  и  $h$ , которая должна выбираться так, чтобы схема была устойчивой (достаточно потребовать  $\bar{\sigma} \geq 0$ , см. п. 2).

Краевые условия третьего рода

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad -\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_2 u(1, t) - \mu_2(t)$$

аппроксимируются следующими разностными уравнениями

$$\rho_1 y_{tt} = \Lambda^+ (\sigma \dot{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \ddot{y}) + \varphi^+, \quad i = 0,$$

$$\rho_2 y_{tt} = \Lambda^- (\sigma \dot{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \ddot{y}) + \varphi^-, \quad i = N,$$

где

$$\Lambda^+ y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0,5h}, \quad \Lambda^- y = -\frac{y_x + \beta_2 y}{0,5h},$$

$$\varphi^+ = \varphi + \frac{v_1}{0,5h}, \quad \varphi^- = \varphi + \frac{v_2}{0,5h}.$$

При этом погрешность аппроксимации краевых условий есть величина  $O(\tau^2 + h^2)$ , если

$$\varphi = f(x, t), \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad v_1 = \mu_1(t), \quad v_2 = \mu_2(t).$$

Если же  $\sigma = -\frac{h^2}{12\tau^2} + \bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma} = \text{const}$ , и

$$\rho_1 = 1 + \frac{h\beta_1}{3}, \quad \rho_2 = 1 + \frac{h\beta_2}{3}, \quad \varphi = f(x, t) - \tau^2 \sigma f''(x, t),$$

$$v_1 = \mu_1(t) + \frac{h^2}{6} (\ddot{\mu}_1(t) + f'(0, t)), \quad v_2 = \mu_2(t) + \frac{h^2}{6} (\ddot{\mu}_2(t) - f'(1, t)),$$

то погрешность аппроксимации есть величина  $O(\tau^2 + h^4)$ .

**2. Исследование устойчивости.** Перейдем к изучению устойчивости схемы (4) по начальным данным (при однородных краевых условиях и нулевой правой части уравнения). Для этого рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} y_{tt} &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) = \Lambda y^{(\sigma)}, \\ y_0 &= y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \check{u}_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Ее решение будем искать методом разделения переменных. Для этого, по аналогии с § 1, п. 4, ищем частные решения вида  $y(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$ . После подстановки  $y = XT$  в уравнение (4a) получим

$$\frac{\Lambda X}{X} = \frac{T_{tt}}{T^{(\sigma)}} = -\lambda. \quad (9)$$

Отсюда и из краевых условий  $y_0 = y_N = 0$  получаем для  $X(x)$  задачу на собственные значения

$$\Lambda X + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad X(x) \neq 0.$$

Она имеет решения

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2}, \quad X^{(k)}(x) = \sqrt{2} \sin \pi kx.$$

Из (9) для  $T_k(t)$  получим разностное уравнение второго порядка

$$(T_k)_{tt} + \lambda_k T_k^{(\sigma)} = 0,$$

или

$$(1 + \sigma \tau^2 \lambda_k) \hat{T}_k - 2(1 + (\sigma - 0,5) \tau \lambda_k) T_k + (1 + \sigma \tau^2 \lambda_k) \check{T}_k = 0,$$

которое перепишем в виде

$$\hat{T}_k - 2(1 - \alpha_k) T_k + \check{T}_k = 0, \quad \alpha_k = \frac{0,5 \tau^2 \lambda_k}{1 + \sigma \tau^2 \lambda_k}. \quad (10)$$

Решения этого уравнения ищем в виде  $T_k = T_k(t_j) = q_k^j$ . Для  $q$  из (10) найдем квадратное уравнение  $q^2 - 2(1 - \alpha)q + 1 = 0$  (индекс  $k$  временно опускаем). Его корни равны  $q_{1,2} = 1 - \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha}$ . Если  $0 < \alpha < 2$ , то корни  $q_{1,2} = 1 - \alpha \pm i \sqrt{\alpha(2 - \alpha)}$



комплексные и  $|q_{1,2}| = 1$ . Введем новую переменную  $\varphi_k$ , полагая

$$\cos \varphi_k = 1 - \alpha_k, \quad \sin \varphi_k = \sqrt{\alpha_k(2 - \alpha_k)}.$$

Тогда получим  $q_1^{(k)} = e^{i\varphi_k}$ ,  $q_2^{(k)} = e^{-i\varphi_k}$ . Общее решение уравнения (10) имеет вид

$$T_k(t_j) = C_k (q_1^{(k)})^j + D_k (q_2^{(k)})^j = A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k,$$

где  $A_k$  и  $B_k$  — произвольные постоянные.

Решение задачи (4а) ищем в виде суммы частных решений

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} (A_k \cos j\varphi_k + B_k \sin j\varphi_k) X^{(k)}(x). \quad (11)$$

Пусть  $u_{0k}$  и  $\tilde{u}_{0k}$  — коэффициенты разложений  $u_0(x)$  и  $\tilde{u}_0(x)$ :

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} u_{0k} X^{(k)}(x), \quad \tilde{u}_0(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{0k} X^{(k)}(x). \quad (12)$$

Потребуем, чтобы сумма (11) удовлетворяла начальным условиям  $y^0 = u_0$ ,  $y_t^0 = (y^1 - y^0)/\tau = \tilde{u}_0(x)$ . Тогда для определения  $A_k$  и  $B_k$  получим условия:

$$A_k = u_{0k}, \quad A_k \frac{\cos \varphi_k - 1}{\tau} + B_k \frac{\sin \varphi_k}{\tau} = \tilde{u}_{0k}.$$

Отсюда находим

$$A_k = u_{0k}, \quad B_k = \frac{1 - \cos \varphi_k}{\sin \varphi_k} u_{0k} + \frac{\tau}{\sin \varphi_k} \tilde{u}_{0k}. \quad (13)$$

Подставив  $A_k$  и  $B_k$  в (11), после очевидных преобразований имеем

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{\cos(j-0,5)\varphi_k}{\cos 0,5\varphi_k} u_{0k} + \frac{\tau \sin j\varphi_k}{\sin \varphi_k} \tilde{u}_{0k} \right) X^{(k)}(x). \quad (14)$$

Получим сначала оценку  $\|y^j\|$  для схемы (4а) при  $\sigma = 0$ , т. е. для схемы

$$y_{it} = \Lambda y, \quad y_0 = y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x). \quad (15)$$

При  $\sigma = 0$  имеем

$$\alpha_k = 0,5\tau^2\lambda_k = \mu_k, \quad \cos \varphi_k = 1 - \mu_k, \quad \sin \varphi_k = \sqrt{\mu_k(2 - \mu_k)}.$$

Потребуем, чтобы шаги сетки  $\omega_{h\tau}$  удовлетворяли соотношению

$$\frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad (16)$$

где  $\varepsilon > 0$  — любое число. Тогда

$$\mu_k \leq \frac{2}{1 + \varepsilon}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad (17)$$

и, следовательно,

$$\cos 0,5\varphi_k = \sqrt{1 - \mu_k/2} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}}. \quad (18)$$

Далее,

$$\frac{\sin \varphi_k}{\tau} = \frac{2 \sin 0,5\varphi_k}{\tau} \cos 0,5\varphi_k \geq \frac{2 \sin 0,5\varphi_k}{\tau} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}},$$

и, так как

$$\frac{2 \sin 0,5\varphi_k}{\tau} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_k)}}{\tau} = \frac{\sqrt{2\mu_k}}{\tau} = \sqrt{\lambda_k},$$

то справедлива оценка

$$\frac{\sin \varphi_k}{\tau} \geq \sqrt{\lambda_k \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}}. \quad (19)$$

Из (14) следует неравенство

$$\|y^j\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos(j-0,5)\varphi_k}{\cos 0,5\varphi_k} u_{0k} X^{(k)} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tau \sin j\varphi_k}{\sin \varphi_k} \tilde{u}_{0k} X^{(k)} \right\|,$$

подставляя в которое оценки (18) и (19)), имеем

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|u_0\| + \left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \right).$$

Заметим теперь, что выражение

$$\left( \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k} \right)^{1/2}$$

есть не что иное, как «негативная» норма (норма в  $H_{A^{-1}}$ )

$$\|\tilde{u}_0\|_{A^{-1}} = (A^{-1}\tilde{u}_0, \tilde{u}_0)^{1/2},$$

где  $Ay = -\Lambda y = -y_{\bar{x}\bar{x}}$ .

Действительно,

$$A^{-1}\tilde{u}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_{0k} A^{-1} X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{u}_{0k}}{\lambda_k} X^{(k)},$$

и, следовательно,

$$(A^{-1}\tilde{u}_0, \tilde{u}_0) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\tilde{u}_{0k})^2}{\lambda_k}.$$

Итак, если выполнено условие (16), то для схемы (15) справедлива оценка

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|u_0\| + \|\tilde{u}_0\|_{A^{-1}}). \quad (20)$$

Эта же оценка имеет место и для схемы (4а), если потребовать, чтобы параметр  $\sigma$  удовлетворял условию

$$\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}, \quad (21)$$

где  $\varepsilon > 0$  — любое число.

Чтобы убедиться в этом, достаточно в приведенном выше доказательстве заменить всюду  $\mu_k$  на

$$\alpha_k = \frac{0,5\tau^2\lambda_k}{1 + \sigma\tau^2\lambda_k}.$$

Для исследования устойчивости схемы (4) по правой части применим принцип суперпозиции. Рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} y_{tt} &= \Lambda y^{(\sigma)} + \Phi, \\ y_0 &= y_N = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad y_t(x, 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Ее решение будем искать в виде

$$y^j = \sum_{j'=0}^j \tau Y^{j, j'}, \quad (22)$$

где  $Y^{j, j'}$  как функция  $j$  при фиксированном  $j'$  удовлетворяет однородному уравнению

$$Y_{tt}^{j, j'} = \Lambda(\sigma Y^{j+1, j'} + (1-2\sigma)Y^{j, j'} + \sigma Y^{j-1, j'}), \quad 0 \leq j' < j, \quad (23)$$

краевым условиям

$$Y_0^{j, j'} = Y_N^{j, j'} = 0, \quad (24)$$

начальным условиям

$$Y^{j, j'} = 0, \quad Y_t^{j, j'} = \frac{Y^{j+1, j'} - Y^{j, j'}}{\tau} = \frac{Y^{j+1, j'}}{\tau} = \Phi^{j'}, \quad (25)$$

где  $\Phi^{j'}$  выбирается так, чтобы удовлетворялось неоднородное уравнение (46).

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция  $\Phi^j$ . Из определения  $Y^{j, j'}$  следует, что

$$\begin{aligned} y_{tt}^j &= \frac{1}{\tau} Y^{j+1, j} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau Y_{tt}^{j, j'}, \\ \Lambda y^{(\sigma)} &= \sigma\tau\Lambda Y^{j+1, j} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau\Lambda(Y^{j, j'})^{(\sigma)}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (23) и найдем

$$Y^{j+1, j} - \sigma\tau^2 \Lambda Y^{j+1, j} = \tau\Phi^j, \quad (26)$$

откуда получаем уравнение для  $\Phi = \Phi^j = Y^{j+1, j}/\tau$

$$\Phi - \sigma\tau^2 \Lambda \Phi = \varphi, \quad \Phi_0 = \Phi_N = 0. \quad (27)$$

Перейдем теперь к получению оценки решения  $y^j$  задачи (46) через правую часть  $\varphi$ . Пусть выполнено условие устойчивости (21). Тогда для решения задачи (23) справедлива оценка (20), которая в данном случае имеет вид

$$\|Y^{j, j'}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|Y_t^{j', j'}\|_{A^{-1}} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|Y^{j'+1, j'}\|_{A^{-1}}.$$

Поэтому из (22), используя неравенство треугольника, получаем

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{j'=0}^{j-1} \|Y^{j'+1, j'}\|_{A^{-1}}.$$

Оценку для  $\|Y^{j'+1, j'}\|_{A^{-1}}$  получим из уравнения (27). Разложим  $\Phi$  и  $\varphi$  по собственным функциям  $\{X^{(k)}\}$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N-1} \Phi_k X^{(k)}, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), найдем  $\Phi_k = \varphi_k / (1 + \sigma\tau^2 \lambda_k)$ , так что при  $\sigma \geq 0$  имеем

$$\|\Phi\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\Phi_k^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^2}{(1 + \sigma\tau^2 \lambda_k)^2 \lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^2}{\lambda_k} = \|\varphi\|_{A^{-1}}^2.$$

т. е.

$$\|Y^{j'+1, j'}\|_{A^{-1}} \leq \tau \|\varphi^{j'}\|_{A^{-1}}.$$

Таким образом, если  $\sigma \geq 0$  и выполнено условие (21), то для схемы (46) справедлива оценка

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \|\varphi^{j'}\|_{A^{-1}}.$$

Для задачи (4) (с  $y_0 = y_N = 0$ ) при тех же условиях выполняется оценка

$$\|y^j\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|y^0\| + \|y_t^0\|_{A^{-1}} + \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \|\varphi^{j'}\|_{A^{-1}} \right).$$

Интересно заметить, что при специальном выборе  $y^1 = y(\tau)$  удается доказать устойчивость в  $L_2$  схемы (15) при условии  $\tau \leq h$ . Приведенное ниже доказательство сообщил автору В. Б. Андреев.

Рассмотрим разностную схему

$$y_{tt}^j = y_{xx}^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$y^0 = u_0, \quad y_t^0 = \bar{u}_0 + 0,5\tau y_{xx}^0. \quad (30)$$

Согласно п. 1, задача (29) — (30) аппроксимирует уравнение (1) — (2) с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

Выразим решение  $y^j$  через  $y^0 = u_0$  и  $\bar{u}_0$ . Поступая как и ранее, найдем

$$y^j = \sum_{k=1}^{N-1} \left( u_{0k} \cos j\varphi_k + \frac{\tau \bar{u}_{0k}}{\sin \varphi_k} \sin j\varphi_k \right) X^{(k)}, \quad (31)$$

где  $\bar{u}_{0k}$  — коэффициенты Фурье  $\bar{u}_0(x)$ , а величины  $u_{0k}$ ,  $\varphi_k$  имеют тот же смысл, что и прежде.

Возводя (31) в квадрат и используя оценку

$$2 \left( \frac{\tau \bar{u}_{0k}}{\sin \varphi_k} \cos j\varphi_k \right) (u_{0k} \sin j\varphi_k) \leq \tau^2 \frac{\bar{u}_{0k}^2}{\sin^2 \varphi_k} \cos^2 j\varphi_k + u_{0k}^2 \sin^2 j\varphi_k,$$

имеем

$$\|y^j\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\bar{u}_{0k}^2}{\sin^2 \varphi_k}.$$

Оценим снизу выражение  $\frac{\tau^2}{\sin^2 \varphi_k} = \frac{1}{\lambda_k (1 - \tau^2 \lambda_k / 4)}$ . Пусть  $\gamma = \tau/h \leq 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_k (1 - \tau^2 \lambda_k / 4) &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \left( 1 - \gamma^2 \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \right) \geq \\ &\geq \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \left( 1 - \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \right) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \cos^2 \frac{\pi kh}{2} \geq \\ &\geq \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} = \frac{\sin^2 \pi h}{h^2}. \end{aligned}$$

В гл. I было показано, что  $\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2} \geq 8$ , если  $h_1 \leq 0,5$ .

Поэтому, обозначив  $h_1 = 2h$ , имеем

$$\frac{\sin^2 \pi h}{h^2} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2} \geq 8, \quad h \leq \frac{1}{4}.$$

Итак, если  $\tau \leq h$  и  $h \leq 1/4$ , то для решения задачи (29) — (30) имеем оценку

$$\|y^j\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{8} \|\bar{u}_0\|^2,$$

**3. Метод энергетических неравенств.** Исследование устойчивости разностных схем для уравнения колебаний можно провести и с помощью метода энергетических неравенств (см. § 1, п. 7). Ограничимся здесь изучением устойчивости по начальным данным.

Будем рассматривать задачу

$$\left. \begin{aligned} y_{\bar{t}t} &= \Lambda (\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \check{y}), \\ y_0 &= y_N = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Замечая, что

$$\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \check{y} = y + \sigma \tau^2 y_{\bar{t}t},$$

перепишем уравнение (32) в виде

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{\bar{t}t} = \Lambda y, \quad (33)$$

где  $E$  — единичный оператор.

Умножим (33) скалярно на  $y_t^\circ = (y_t + y_{\bar{t}})/2$ :

$$((E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{\bar{t}t}, y_t^\circ) = (\Lambda y, y_t^\circ). \quad (34)$$

Воспользовавшись очевидными тождествами

$$\begin{aligned} (y_{\bar{t}t}, y_t^\circ) &= 0,5 (\|y_{\bar{t}}\|_t^2), \\ -(\Lambda y_{\bar{t}t}, y_t^\circ) &= (y_{\bar{x}\bar{t}t}, y_{\bar{x}t}^\circ) = 0,5 (\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_t^2), \end{aligned}$$

преобразуем левую часть равенства (34) следующим образом:

$$((E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{\bar{t}t}, y_t^\circ) = 0,5 (\|y_{\bar{t}}\|_t^2 + \sigma \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_t^2). \quad (35)$$

Покажем, далее, что для любых функций  $y = y(x, t_n)$ , обращающихся в нуль при  $x = 0$  и  $x = 1$ , справедливо тождество

$$-(\Lambda y, y_t^\circ) = \frac{1}{8} (\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|_t^2) - \frac{\tau^2}{8} (\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|_t^2). \quad (36)$$

Действительно, из первой формулы Грина (см. гл. I, § 2, п. 1) следует, что

$$-(\Lambda y, y_t^\circ) = (v, v_t^\circ),$$

где  $v = y_{\bar{x}}$ , и так как

$$v \cdot v_t^\circ = \frac{1}{8} ((v + \check{v})_t^2) - \frac{\tau^2}{8} ((v_{\bar{t}})_t^2),$$

то получаем (36),

Подставляя (35) и (36) в (34), получим следующее энергетическое тождество:

$$\left( \|y_t\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{t\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2 \right)_t = 0, \quad (37)$$

или

$$\mathcal{E}^{j+1} = \mathcal{E}^j,$$

где

$$\mathcal{E}^j = \|y_t^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{t\bar{x}}^j\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}^j + y_{\bar{x}}^{j-1}\|^2. \quad (38)$$

Найдем значения  $\sigma$ , при которых величина  $\mathcal{E}^j$  неотрицательна для любых  $y^j$  и  $y^{j-1}$ . Для этого заметим (см. гл. I, § 2, п. 3), что

$$\|y_{t\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y_t\|^2$$

и поэтому

$$\|y_t\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{t\bar{x}}\|^2 \geq \left(\frac{h^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2\right) \|y_{t\bar{x}}\|^2.$$

Следовательно, правая часть (38) будет неотрицательна, если потребовать

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{\tau}{h}. \quad (39)$$

При этом выражение  $(\mathcal{E}^j)^{1/2}$  можно считать нормой (или, точнее, полунормой):

$$\mathcal{E}^j = \|y^j\|_*^2 = \|y_t^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{t\bar{x}}^j\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}^j + y_{\bar{x}}^{j-1}\|^2. \quad (40)$$

Заметим, что такие «комбинированные» нормы, зависящие от значений  $y$  на нескольких слоях, характерны для многослойных (и, в частности, трехслойных) схем.

Тождество (37) означает устойчивость по начальным данным в норме (40):

$$\|y^{j+1}\|_* = \|y^0\|_*, \quad j = 0, 1, \dots$$

Итак, условие (39) достаточно для устойчивости схемы (32) по начальным данным в норме (40).

В частности, схема (32) с  $\sigma = 0$  устойчива по начальным данным при условии

$$\tau \leq h. \quad (41)$$

Это условие устойчивости, называемое иногда условием Куранта, было получено впервые в работе Р. Куранта, К. Фридрикса и Г. Леви [1].

## Г л а в а III

### ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

---

Основное содержание главы — теория однородных разностных схем для одномерных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}Lu + f(x) &= 0, & Lu &= \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), & Lu &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u, \\ & & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Lu + f(x, t).\end{aligned}$$

Главное внимание уделяется способам написания однородных разностных схем и исследования их аппроксимации и сходимости в случае разрывных  $k$ ,  $q$ ,  $f$ , а также в случае неравномерных сеток.

---

#### § 1. Однородные схемы для стационарного уравнения с переменными коэффициентами

**1. Введение.** В связи с широким применением вычислительных машин становится ясным, что нецелесообразно использовать разностные схемы и составлять программы, предназначенные лишь для решения отдельных задач частного вида. Необходимо иметь разностные схемы, пригодные для решения классов задач, определяемых заданием типа дифференциального уравнения, класса краевых и начальных условий, а также функционального пространства, которому принадлежат коэффициенты дифференциального уравнения. Такие универсальные разностные схемы должны, естественно, удовлетворять требованиям сходимости и устойчивости на любой последовательности сеток и для любой исходной задачи из рассматриваемого класса задач. Требование единообразия вычислительного алгоритма для решения класса задач приводит к понятию однородных разностных схем. Под *однородной разностной схемой* понимается



разностная схема, вид которой не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностные уравнения имеют один и тот же вид. Коэффициенты однородной разностной схемы определяются как функционалы коэффициентов дифференциального уравнения.

Большой интерес, например, представляет отыскание однородных схем «сквозного» или «непрерывного» счета, пригодных для решения уравнения теплопроводности (диффузии) с разрывным коэффициентом теплопроводности (диффузии) по одним и тем же формулам (программам) без явного выделения точек или линий разрыва коэффициентов. Это значит, что схема в окрестности разрывов не меняется и вычисления во всех узлах ведутся по одним и тем же формулам, независимо от того, разрывен или непрерывен коэффициент теплопроводности.

Использование однородных схем сквозного счета особенно важно в тех случаях, когда коэффициент теплопроводности вычисляется в результате приближенного решения других уравнений, что, например, имеет место при решении уравнений газодинамики в теплопроводном газе, когда коэффициент теплопроводности зависит от плотности и терпит разрывы на ударных волнах.

Для теории разностных схем необходимо задать *исходное семейство схем*. Общий способ задания семейства однородных разностных схем был указан в работе А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1]. Коэффициенты однородной разностной схемы выражаются через коэффициенты исходного дифференциального уравнения при помощи некоторых так называемых *шаблонных функционалов*, произвол в выборе которых ограничен требованиями аппроксимации, разрешимости, устойчивости и др. Семейство однородных разностных схем задано, если указано семейство допустимых шаблонных функционалов схемы.

Поясним это в возможно более простой ситуации. Будем рассматривать разностные операторы над функциями одного переменного  $x_i = ih$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$ . Разностный оператор вначале определяется на *целочисленном шаблоне*, т. е. на множестве

$$\mathfrak{M}_0 = \{-m_1, -m_1 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m_2\},$$

где  $m_1, m_2$  — целые числа, после чего совершается переход к реальной сетке

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, \pm 1, \dots\}$$

с шагом  $h$ . Пусть  $\bar{k}(s)$  — вектор-функция, заданная на отрезке  $-m_1 \leq s \leq m_2$  (на коэффициентном шаблоне). Пусть далее

$$A_j^h[\bar{k}(s)], \quad -m_1 \leq j \leq m_2, \quad B^h[\bar{k}(s)]$$

некоторые *шаблонные функционалы*, зависящие, вообще говоря, от параметра  $h$  и определенные для вектор-функций  $\bar{k}(s)$ ,  $s \in [-m_1, m_2]$ . Линейная (относительно сеточной функции  $y^h$ ) *однородная разностная схема* определяется так:  $(L_h^{(k)} y^h)_i = 0$ , где

$$(L_h^{(k)} y^h)_i = \sum_{m=-m_1}^{m_2} A_m^h [k(x_i + sh)] y^h(x_i + mh) + B^h [k(x_i + sh)].$$

Опуская индекс  $i$ , это выражение можно записать в виде

$$L_h^{(k)} y^h = \sum_{m=-m_1}^{m_2} A_m^h [k(x + sh)] y^h(x + mh) + B^h [k(x + sh)].$$

Целью теории однородных разностных схем является отыскание (в исходном семействе) схем, пригодных для решения возможно более широкого класса задач, а также выделение наилучших схем (например, по порядку точности, по объему вычислений и др.).

В этом параграфе мы дадим изложение основных вопросов теории однородных разностных схем для одномерной стационарной задачи теплопроводности с переменными коэффициентами  $k(x)$ ,  $q(x)$ . Полученные здесь результаты будут использованы при изучении в §§ 2, 3 однородных разностных схем для нестационарного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u + f(x, t)$$

и уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u + f(x, t).$$

**2. Исходная задача.** Рассмотрим первую краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности или диффузии

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u &= -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2, \quad k(x) &\geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эта задача имеет решение, если  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  — кусочно-непрерывные функции (принадлежат классу  $Q^{(0)}$ )\*. Если  $k(x)$  имеет разрыв первого рода в точке  $x = \xi$ , так что

\* Мы пользуемся обозначениями:  $C^{(n)}[a, b]$  — класс функций, имеющих  $n$  непрерывных на отрезке  $a \leq x \leq b$  производных,  $Q^{(n)}[a, b]$  — класс функций, кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  вместе с производными до  $n$ -го порядка включительно,  $Q^{(0)}[a, b]$  — класс кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  функций.

$[k] = k(\xi + 0) - k(\xi - 0) \neq 0$ , то при  $x = \xi$  ставятся условия сопряжения:

$$[u] = 0, [ku'] = 0 \quad \text{при } x = \xi$$

(температура  $u$  и поток  $(-ku')$  непрерывны).

При  $x = 0$  и  $x = 1$  могут быть заданы краевые условия

$$ku' = \beta_1 u - \mu_1 \quad \text{при } x = 0, \quad -ku' = \beta_2 u - \mu_2 \quad \text{при } x = 1.$$

Если, например,  $\beta_1 > 0$ , то это условие третьего рода, при  $\beta_1 = 0$  — условие второго рода. Возможны различные комбинации условий первого, второго и третьего рода (например, при  $x = 0$  — условие третьего рода, при  $x = 1$  — условие первого рода и т. д.).

Мы проведем основное изложение для первой краевой задачи.

**3. Трехточечные схемы.** На отрезке  $[0, 1]$  введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$$

с шагом  $h = 1/N$ ; обозначим

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\},$$

$y_i = y(x_i)$  — сеточная функция, заданная на  $\bar{\omega}_h$ .

При написании схемы, аппроксимирующей уравнение (1), возьмем трехточечный шаблон  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ . Любое трехточечное разностное уравнение на этом шаблоне можно записать в виде

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -h^2 \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $a_i, c_i, b_i$  и  $\varphi_i$  зависят от шага  $h$ , или в виде

$$\frac{1}{h} \left( b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - d_i y_i + \varphi_i = 0, \quad (2)$$

где  $d_i = (c_i - b_i - a_i)/h^2$ . Коэффициенты  $a_i, b_i, d_i$  и правая часть  $\varphi_i$  пока не определены.

Пусть на шаблоне  $-1 \leq s \leq 1$  (т. е.  $m_1 = m_2 = 1$ ) определены функционалы

$$A^h[\bar{k}(s)], B^h[\bar{k}(s)], D^h[\bar{q}(s)], F^h[\bar{f}(s)]$$

для любых функций  $\bar{k}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s)$  из  $Q^{(0)}$ , зависящие, вообще говоря, от параметра  $h$ . Если коэффициенты разностной схемы (2) при любых  $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}$  во всех узлах  $x_i$  произвольной сетки  $\omega_h$  вычисляются по одним и тем же формулам

$$\left. \begin{aligned} a_i &= A^h[k(x_i + sh)], & b_i &= B^h[k(x_i + sh)], \\ d_i &= D^h[q(x_i + sh)], & \varphi_i &= F^h[f(x_i + sh)], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

то схема (2) называется *однородной*.

Отсюда видно, что, если, например, задан функционал  $A^h[k(s)]$ , то для вычисления  $a_i$  надо положить формально  $\bar{k}(s) = k(x_i + sh)$  и т. д.

Если схема (2) однородна, то индекс  $i$  можно опустить и (2) записать в виде

$$\frac{1}{h}(by_x - ay_{\bar{x}}) - dy = -\varphi, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (4)$$

где

$$a = a(x), \quad b = b(x), \quad y = y(x), \quad x = ih \in \omega_h, \\ y_x = (y(x+h) - y(x))/h, \quad y_{\bar{x}} = (y(x) - y(x-h))/h.$$

Семейство однородных схем задано, если задано семейство шаблонных функционалов  $A^h, B^h, D^h, F^h$ . Требования аппроксимации и разрешимости задачи (4) накладывают ограничения на произвол в их выборе.

Вычислим локальную погрешность аппроксимации схемы (4):

$$\psi(v) = \left[ \frac{1}{h}(bv_x - av_{\bar{x}}) - dv + \varphi \right] - [(kv')' - qv + f],$$

где  $v$  — произвольная достаточно гладкая функция,  $k, q, f$  также имеют нужное по ходу изложения число производных. Разлагая  $v$  в точке  $x$  по формуле Тейлора, найдем

$$v_x = v' + 0,5hv'' + \frac{h^2}{6}v''' + O(h^3),$$

$$v_{\bar{x}} = v' - 0,5hv'' + \frac{h^2}{6}v''' + O(h^3),$$

$$\psi(v) = \left( \frac{1}{h}(b-a) - k' \right) v' + \left( \frac{a+b}{2} - k \right) v'' + \\ + \frac{b-a}{6} hv''' + (d-q)v + (\varphi - f) + O(h^2).$$

Требование  $\psi(v) = O(h^2)$  будет выполнено, если

$$\left. \begin{aligned} \frac{b-a}{h} &= k'(x) + O(h^2), & \frac{b+a}{2} &= k(x) + O(h^2), \\ d(x) &= q(x) + O(h^2), & \varphi(x) &= f(x) + O(h^2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для разрешимости задачи (4) достаточно (см. гл. I, § 2, п. 9), чтобы

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \omega_h. \quad (6)$$

Приведем два примера разностных схем второго порядка аппроксимации для задачи (1):

$$\frac{1}{h} \left( k_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - k_{i-1/2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - q_i y_i = -f_i, \quad (7)$$

$$\frac{1}{h} \left( \frac{k_{i+1} + k_i}{2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{k_i + k_{i-1}}{2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - q_i y_i = -f_i, \quad (8)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $y_0 = u_1$ ,  $y_N = u_2$ ,  $k_{i \pm 1/2} = k(x_i \pm 0,5h)$ ,  $k_{i \pm 1} = k(x_i \pm h)$ .

Нетрудно видеть, что для каждой из этих схем выполнены условия (5), если  $k$ ,  $q$ ,  $f$  — достаточно гладкие функции.

В дальнейшем для упрощения изложения, будем предполагать, что шаблонные функционалы не зависят от параметра  $h$  и  $D[\bar{f}(s)] = F[\bar{f}(s)]$ , так что

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= A[k(x+sh)], & b(x) &= B[k(x+sh)], \\ d(x) &= F[q(x+sh)], & \varphi(x) &= F[f(x+sh)], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $s \in [-1, 1]$ .

Будем рассматривать семейство схем, для которых выполнены условия (5), (6), (9). Нас интересуют схемы, сходящиеся в случае разрывных  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$ . Ниже приводится пример, показывающий, что не всякая однородная схема вида (4), удовлетворяющая условиям аппроксимации (5) (в случае гладких коэффициентов) и условиям разрешимости (6), сходится в классе разрывных  $k(x)$ .

**4. Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов.** Рассмотрим задачу (1) при  $q \equiv 0$ ,  $f \equiv 0$ :

$$(ku')' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \quad (10)$$

Представим  $(ku')'$  в виде  $ku'' + k'u'$ . Естественно, на первый взгляд, для получения аппроксимации второго порядка провести замену

$$u'' \sim u_{\bar{x}\bar{x}}, \quad k' \sim k'_x = \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}, \quad u' \sim u'_x = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

Тогда получим схему

$$\left. \begin{aligned} k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} &= 0, \\ 0 < i < N, \quad y_0 &= 1, \quad y_N = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Преобразуя (11) к виду (4), найдем

$$a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad d_i = \varphi_i = 0, \quad (12)$$

т. е. схема (11) принадлежит семейству (4).

Условия (5) и (6) выполнены, так как на участках гладкости

$$a_i = k_i - 0,5hk'_i + O(h^2), \quad b_i = k_i + 0,5hk'_i + O(h^2),$$

$$0,5(a_i + b_i) = k_i, \quad b_i - a_i = 0,5(k_{i+1} - k_{i-1}) = hk'_i + O(h^3),$$

так что  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$  при достаточно малом  $h$ .

Покажем, что схема (11) расходится даже в классе кусочно-постоянных коэффициентов

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\xi$  — иррациональное число,  $\xi = x_n + \theta h$ ,  $x_n = nh$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Точное решение задачи (10), (13), удовлетворяющее условиям сопряжения, имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, & \alpha_0 = (\kappa + (1 - \kappa)\xi)^{-1}, \\ \beta_0(1 - x), & \xi \leq x \leq 1, & \beta_0 = \kappa\alpha_0, \quad \kappa = k_1/k_2. \end{cases} \quad (14)$$

Найдем решение разностной задачи (11), (13). Так как  $a_i = b_i = k_1$  при  $0 < i < n$ ,  $a_i = b_i = k_2$  при  $n + 1 < i < N$ , то уравнение (11) принимает вид  $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0$  при  $i \neq n$  и  $i \neq n + 1$ . Отсюда находим

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, & 0 \leq x \leq x_n, \\ \beta(1 - x_i), & x_{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определим из уравнений при  $i = n$ ,  $i = n + 1$ :

$$\left. \begin{aligned} b_n [\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] + a_n \alpha h &= 0, \\ b_{n+1} \beta h + a_{n+1} [\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Из (12) и (13) находим  $a_n = (5k_1 - k_2)/4$ ,  $a_{n+1} = (k_1 + 3k_2)/4$ ,  $b_n = (3k_1 + k_2)/4$ ,  $b_{n+1} = (5k_2 - k_1)/4$ . Решая уравнения (16) относительно  $\alpha$ ,  $\beta$  и учитывая, что  $x_n = \xi - \theta h$ ,  $x_{n+1} = \xi + (1 - \theta)h$ , определим  $\beta = \mu\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{1}{\mu + (1 - \mu)\xi + h(\lambda - \theta - (1 - \theta)\mu)}, \quad \mu = \frac{3 + \kappa}{5 - \kappa} \lambda, \quad \lambda = \frac{5\kappa - 1}{3\kappa + 1}. \quad (17)$$

Предельный переход при  $h \rightarrow 0$  дает

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha = \bar{\alpha}_0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta = \bar{\beta}_0,$$

где

$$\bar{\alpha}_0 = (\mu + (1 - \mu)\xi)^{-1}, \quad \bar{\beta}_0 = \mu\bar{\alpha}_0. \quad (18)$$

Функции (15) доопределим на всем отрезке  $0 \leq x \leq 1$  (при помощи линейной интерполяции), получим функцию  $\tilde{y}(x, h)$ ,  $x \in [0, 1]$ , совпадающую с  $y_i$  в узлах  $x_i = ih$ . Найдем предел

$\tilde{y}(x, h)$  при  $h \rightarrow 0$ :

$$\bar{u}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{y}(x, h) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \bar{\beta}_0 (1 - x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Сравним предельную функцию  $\bar{u}(x)$  с точным решением  $u(x)$ , определяемым формулой (14). Из (14), (18) и (19) видно, что  $\bar{u}(x) = u(x)$  при  $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$ ,  $\bar{\beta}_0 = \beta_0$ , а это возможно лишь при  $\kappa = 1$  или  $k_1 = k_2$ .

Итак, решение (15) разностной задачи (11), (14) при  $h \rightarrow 0$  стремится к функции  $\bar{u}(x)$ , которая в случае  $k_1 \neq k_2$  отлична от точного решения  $u(x)$  задачи (10). Следовательно, схема (11) расходится.

Нетрудно установить физический смысл функции  $\bar{u}(x)$ . Функция  $\bar{u}(x)$  есть решение задачи (10), удовлетворяющее при  $x = \xi$  условиям  $[\bar{u}] = 0$ ,  $[k\bar{u}'] = -(\mu - \kappa)k_2 = q$ , где  $q$  есть мощность сосредоточенного источника (стока) тепла в точке  $x = \xi$ . Величина  $q$  меняется в широких пределах в зависимости от  $\kappa$  (в частности,  $q \rightarrow \pm \infty$  при  $\kappa \rightarrow 5 \pm 0$ ). Таким образом, физическая причина расходимости схемы (11) в том, что она нарушает баланс (закон сохранения) тепла, приводя к появлению дополнительного источника (при  $q < 0$ ) или стока (при  $q > 0$ ) тепла в точке  $x = \xi$ .

Схемы, нарушающие законы сохранения, называют неконсервативными или дисбалансными.

Рассмотренный пример показывает, что при написании разностных схем следует добиваться, чтобы эти схемы выражали на сетке соответствующий закон сохранения. Такие схемы мы будем называть *консервативными*.

В следующем пункте дается общий метод получения консервативных схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов.

Прежде, чем переходить к его изложению, сделаем два замечания, связанные с рассмотренным выше примером.

Критерий экспериментальной проверки сходимости схемы путем сгущения сетки, применяемый часто на практике в тех случаях, когда нет теоретических оценок качества схемы, может иногда привести к ошибочному выводу о сходимости схемы на том основании, что при сгущении сетки обнаруживается стремление решения разностной задачи к некоторой предельной функции  $\bar{u}(x)$ . Приведенный выше пример показывает, что функция  $\bar{u}(x)$ , вообще говоря, может сколь угодно сильно отличаться от решения  $u(x)$  исходной задачи. Поэтому методом сгущения сетки надо пользоваться с известной осторожностью. Во всяком случае, он не может подменить теоретического исследования хотя бы на модельных примерах.

Можно рекомендовать для проверки сходимости и порядка точности метод пробных функций. Выбирается некоторая функ-

ция  $U(x)$  (она может быть выбрана произвольно, но так, чтобы выполнялись условия сопряжения в точке разрыва коэффициента  $k(x)$ ). Подставляя ее в уравнение (1), найдем правую часть  $f = (kU)' - qU$  и краевые значения  $\mu_1 = U(0)$ ,  $\mu_2 = U(1)$ . Полученная задача (1) решается по схеме (4) и разностное решение  $y(x)$  сравнивается с известной функцией  $U(x)$  на различных сетках.

Второе замечание состоит в том, что, так как не всякая схема (4), сходящаяся в случае гладких коэффициентов, сходится в случае разрывных коэффициентов, то необходимо выделить семейство схем, сходящихся в классе разрывных коэффициентов, и в дальнейшем иметь дело только с такими схемами.

**5. Интегро-интерполяционный метод (метод баланса) построения однородных разностных схем\*).** Различные физические процессы (теплопроводности или диффузии, колебаний, газодинамики и т. д.) характеризуются некоторыми интегральными законами сохранения (тепла, массы, количества движения, энергии и т. д.). При выводе дифференциальных уравнений математической физики обычно исходят из некоторого интегрального соотношения (уравнения баланса), выражающего закон сохранения для малого объема. Дифференциальное уравнение получается из уравнения баланса при стягивании объема к нулю в предположении существования непрерывных производных, входящих в уравнение.

Метод конечных разностей физически означает переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели. При таком переходе естественно требовать, чтобы основные свойства физического процесса сохранялись. Такими свойствами, прежде всего, являются законы сохранения. Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называют *консервативными* (или *дивергентными*). Законы сохранения для всей сеточной области («интегральные законы сохранения») для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных однородных разностных схем будем называть *интегро-интерполяционным методом (методом баланса)*.

Проиллюстрируем этот интегро-интерполяционный метод на примере уравнения (1), описывающего стационарное распре-

\* См. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1].



деление температуры в однородном стержне  $0 \leq x \leq 1$ . Напишем уравнение баланса тепла на отрезке  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ :

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx, \quad W = -ku', \quad (20)$$

где  $W(x)$  — поток тепла,  $q(x)u(x)$  — мощность стоков тепла (при  $q < 0$  — источников), пропорциональных температуре,  $f(x)$  — плотность распределения внешних источников (стоков) тепла.

Сток тепла происходит за счет теплообмена с внешней средой, происходящего на боковой поверхности стержня. Величина  $W_{i-1/2}$  дает количество тепла, втекающее через сечение  $x = x_{i-1/2}$  на отрезок  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ ,  $W_{i+1/2}$  — количество вытекающего через сечение  $x = x_{i+1/2}$  тепла; третье слагаемое в левой части (20) дает количество тепла, выделяющегося на отрезке  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  за счет распределенных с плотностью  $f(x)$  источников тепла, интеграл в правой части (20) есть количество тепла, отдаваемое внешней среде за счет теплообмена на боковой поверхности.

Чтобы получить из (20) разностное уравнение, заменим  $W$  и интеграл, содержащий  $u$ , линейными комбинациями значений  $u$  в узлах сетки. Для этого воспользуемся интерполяциями в окрестности узла  $x_i$ . Возьмем простейшую интерполяцию

$$u = \text{const} = u_i \quad \text{при} \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2},$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx \approx h d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad (21)$$

где  $d_i$  есть среднее значение  $q(x)$  на отрезке  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$  длины  $h$ . Проинтегрируем равенство  $u' = -W/k$  на отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ :

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx.$$

Предполагая, что  $W(x) = \tilde{W}_{i-1/2} = \text{const}$  при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ , имеем:

$$u_{i-1} - u_i \approx \tilde{W}_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Отсюда находим приближенное значение  $\tilde{W}_{i-1/2}$  потока

$$\tilde{W}_{i-1/2} = -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x}, i}, \quad a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Отметим, что  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$  есть тепловое сопротивление отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Подставляя (21) и (22) в (20) и обозначая через  $y_i$  исконую функцию, получим консервативную разностную схему

$$\frac{1}{h} \left[ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\Phi_i, \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1} = \left[ \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh)} \right]^{-1}, \\ d_i &= \int_{-0,5}^{0,5} q(x_i + sh) ds, \quad \Phi_i = \int_{-0,5}^{0,5} f(x_i + sh) ds. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Разностное уравнение (23) написано в фиксированном узле  $x = x_i$ . Считая узел  $x_i$  произвольным, получаем уравнение (23) во всех внутренних узлах сетки. Так как коэффициенты  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\Phi_i$  во всех узлах  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  определяются по одним и тем же формулам (24), то схема (23) — (24) является однородной консервативной схемой. Поэтому в (23) и (24) индекс  $i$  можно опустить и вместо (23) писать

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\Phi.$$

В общем случае в формуле для потока коэффициент  $a_i$  является некоторым функционалом значений  $k(x)$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Отметим, что закон сохранения во всей сеточной области  $\omega_h$  («интегральный» закон сохранения) для любой (с любыми  $a$ ,  $d$ ,  $\Phi$ ) консервативной схемы вида (23) есть алгебраическое следствие уравнения (23).

В самом деле, обозначая через  $\bar{W}_{i-1/2} = -a_i(y_i - y_{i-1})/h$  разностное выражение потока тепла при  $x = x_{i-1/2}$ , запишем равенство (23) в виде  $\bar{W}_{i-1/2} - \bar{W}_{i+1/2} + h\Phi_i = h d_i y_i$ . Суммируя

по  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , получим разностный закон сохранения тепла во всей сеточной области

$$\bar{W}_{1/2} - \bar{W}_{N-1/2} + \sum_{i=1}^{N-1} h\varphi_i = \sum_{i=1}^{N-1} hd_i y_i.$$

Он является разностной аппроксимацией интегрального закона сохранения для уравнения (1).

Интегро-интерполяционный метод был использован для решения ряда задач (см., например, Г. И. Марчук [1], Б. Л. Рождественский и Н. Н. Яненко [1]).

**6. Однородные консервативные схемы.** Рассмотрим теперь семейство однородных консервативных схем

$$(ay_x)_x - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2. \quad (25)$$

Коэффициенты  $a(x)$ ,  $d(x)$ ,  $\varphi(x)$  однородной схемы (25) вычисляются при помощи шаблонных функционалов  $A[\bar{k}(s)]$ ,  $F[\bar{f}(s)]$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= A[k(x+sh)], & d(x) &= F[q(x+sh)], \\ \varphi(x) &= F[f(x+sh)], & a(x) &\geq c_1 > 0, & d(x) &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

причем область определения  $A[\bar{k}(s)]$  есть  $Q^{(0)}[-1, 0]$  ( $\bar{k}(s) \in \in Q^{(0)}[-1, 0]$ ), область определения  $F[\bar{f}(s)]$  есть  $Q^{(0)}[-1/2, 1/2]$ .

Иными словами,  $A[\bar{k}(s)]$  ( $F[\bar{f}(s)]$ ) определен для всех кусочно-непрерывных функций  $\bar{k}(s)$  ( $\bar{f}(s)$ ), заданных на отрезке  $-1 \leq s \leq 0$  ( $-0,5 \leq s \leq 0,5$ ).

При вычислении  $a(x)$  согласно (26) мы полагаем  $\bar{k}(s) = k(x+sh)$ . Это соответствует переходу от шаблона  $-1 \leq s \leq 0$ , на котором задана функция  $\bar{k}(s)$ , к шаблону  $x-h \leq x' \leq x$ , на котором требуется задать  $k(x')$ , чтобы вычислить  $a(x)$ .

Сравним консервативную схему (25) со схемой общего вида (4). Очевидно, что (4) может быть записана в виде (25) только при условии

$$b_i = a_{i+1}$$

или  $B[\bar{k}(s)] = A[\bar{k}(s+1)]$  для любых  $\bar{k}(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$ .

Отсюда следует, что для консервативной схемы функционал  $A[\bar{k}(s)]$  не зависит от значений  $\bar{k}(s)$  при  $0 < s \leq 1$ , а  $B[\bar{k}(s)]$  — от значений  $\bar{k}(s)$  при  $-1 \leq s < 0$ .

Отметим, что консервативность схемы (4) является необходимым условием ее устойчивости относительно возмущения коэффициентов при  $k(x) \in Q^{(0)}$  (коэффициентная устойчивость, см. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1]).

Требование консервативности («дивергентности») схемы (4) эквивалентно также требованию самосопряженности разностного оператора. Действительно, рассмотрим оператор

$$(\Lambda y)_i = a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1},$$

определенный на пространстве  $\bar{\Omega}_h$  сеточных функций  $y = \{y_i\}$ , заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе,  $y_0 = y_N = 0$ . Введем в  $\bar{\Omega}_h$  скалярное произведение  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ . Так как для любых функций  $y, v \in \bar{\Omega}_h$  справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{N-1} (a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1}) v_i = \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} v_{i+1} - c_i v_i - b_{i-1} v_{i-1}) y_i,$$

то условие  $(\Lambda y, v) = (y, \Lambda v)$  будет выполнено при любых  $y, v \in \bar{\Omega}_h$  тогда и только тогда, когда  $b_i = a_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Условия (5) локальной аппроксимации второго порядка в случае консервативной схемы ( $b_i = a_{i+1}$ ) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{a(x+h) - a(x)}{h} &= k'(x) + O(h^2), & \frac{a(x+h) + a(x)}{2} &= k(x) + O(h^2), \\ d(x) &= q(x) + O(h^2), & \varphi(x) &= f(x) + O(h^2). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Если эти условия выполнены, то

$$a(x) = k(x) - 0,5hk'(x) + O(h^2),$$

т. е.

$$a(x) = k(x - 0,5h) + O(h^2).$$

В п. 5 при помощи интегро-интерполяционного метода была получена однородная консервативная схема (25) с коэффициентами  $a, d, \varphi$  специального вида (24), а именно с шаблонными функционалами

$$A[\bar{k}(s)] = \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{\bar{k}(s)} \right)^{-1}, \quad F[\bar{f}(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{f}(s) ds. \quad (24')$$

Коэффициенты  $a, d, \varphi$  при этом вычисляются путем интегрирования функций  $k(x), q(x)$  и  $f(x)$  (см. (24)).

Для практических целей удобно иметь возможно более простые формулы для нахождения  $a, d, \varphi$ , использующие значения  $k, q, f$  в отдельных точках. Обычно используют шаблон из

одной или двух точек, полагая, например,

$$a_i = k_{i-1/2} = k(x_i - 0,5h) \quad (A[\bar{k}(s)] = \bar{k}(-0,5)),$$

$$d_i = q_i, \quad \varphi_i = \bar{f}_i \quad (F[\bar{f}(s)] = \bar{f}(0)),$$

или

$$a_i = 0,5(k_i + k_{i-1}) \quad (A[\bar{k}(s)] = 0,5(\bar{k}(-1) + \bar{k}(0))),$$

$$a_i = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}} \quad \left( A[\bar{k}(s)] = \frac{2\bar{k}(-1)\bar{k}(0)}{\bar{k}(-1) + \bar{k}(0)} \right).$$

(28)

Если  $k, q, f$  разрывны, то в формулах (28) следует брать полу-  
сумму предельных значений слева и справа

$$a_i = 0,5(k(x_{i-1/2} - 0) + k(x_{i-1/2} + 0)),$$

$$d_i = 0,5(q(x_i + 0) + q(x_i - 0)), \quad \varphi_i = 0,5(f(x_i - 0) + f(x_i + 0)).$$

Отметим, что формулы (28) и ряд других формул для  $a, \bar{a}, \varphi$  могут быть получены путем замены интегралов (24) их приближенными выражениями

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \sim \frac{1}{k_{i-1/2}}, \quad \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \sim \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right) \text{ и т. д.}$$

**7. Исходный класс консервативных схем. Шаблонные функционалы.** Пусть функционал  $A[k(s)]$  задан на множестве кусочно-непрерывных функций  $\bar{k}(s) \in Q^{(0)}[-1, 0]$ , а  $F[\bar{f}(s)]$  на множестве функций  $\bar{f}(s) \in Q^{(0)}[-1/2, 1/2]$ . Предположим, что

1) Все шаблонные функционалы нормированы к единице:

$$A[1] = 1, \quad F[1] = 1.$$

2)  $F[\bar{f}(s)]$  — линейный неотрицательный функционал, т. е.

$$а) F[c_1 \bar{f}_1 + c_2 \bar{f}_2] = c_1 F[\bar{f}_1] + c_2 F[\bar{f}_2]$$

для любых чисел  $c_1, c_2$  и функций  $\bar{f}_1(s), \bar{f}_2(s)$  из  $Q^{(0)}$ .

$$б) F[\bar{f}(s)] \geq 0 \text{ при } \bar{f}(s) \geq 0.$$

3) Функционал  $A[\bar{k}(s)]$ :

а) однородный функционал первой степени (нелинейный, вообще говоря):

$$A[c\bar{k}] = cA[\bar{k}], \quad c = \text{const} > 0,$$

б) неубывающий функционал, т. е.

$$A[\bar{k}_2(s)] \geq A[\bar{k}_1(s)] \text{ при } \bar{k}_2(s) \geq \bar{k}_1(s),$$

в) имеет дифференциал третьего порядка, т. е. для любых

$$\bar{f}(s) \in Q^{(0)}[-1/2, 1/2], \quad \bar{\varphi}(s) \in Q^{(0)}(-1/2, 1/2)$$

$$A[\bar{f}(s) + \delta\bar{\varphi}(s)] = A[\bar{f}(s)] + \delta A_1[\bar{f}(s), \bar{\varphi}(s)] +$$

$$+ \delta^2 A_2[\bar{f}(s), \bar{\varphi}(s)] + \delta^3 A_3[\bar{f}(s), \bar{\varphi}(s)] + \delta^3 \rho(\delta, \bar{f}(s), \bar{\varphi}(s)),$$

где  $|\rho(\delta, \bar{f}(s), \bar{\varphi}(s))| \leq \rho_0(\delta)$ , при  $|\bar{\varphi}| \leq M$ ,  $|\bar{f}| \leq M$ ,  $M = \text{const} > 0$ ,  $\rho_0(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . При этом функционал  $A_1[\bar{f}, \bar{\varphi}]$  линеен по  $\bar{\varphi}$ , функционал  $A_2[\bar{f}, \bar{\varphi}]$  квадратичен по  $\bar{\varphi}$  и т. д., так что

$$A_1[\bar{f}, c\bar{\varphi}] = cA_1[\bar{f}, \bar{\varphi}], \quad A_2[\bar{f}, c\bar{\varphi}] = c^2A_2[\bar{f}, \bar{\varphi}]$$

и т. д., где  $c = \text{const}$ .

Основное изложение теории однородных разностных схем проведем в предположении, что  $A[\bar{f}(s)]$  имеет второй дифференциал.

Если  $A[\bar{k}(s)]$  — линейный функционал, то он удовлетворяет тем же требованиям 2а), 2б), что и функционал  $F$ . В общем случае из 3а) и 3в) следует равенство

$$A_1[\bar{f}, \bar{f}] = A[\bar{f}], \quad A_2[\bar{f}, \bar{f}] = A_3[\bar{f}, \bar{f}] = 0,$$

откуда получаем  $A_1[1, 1] = A[1] = 1$ .

Условия второго порядка аппроксимации (27) накладывают дополнительные ограничения на шаблонные функционалы.

Рассмотрим, например,

$$d(x) = F[q(x + sh)] = F[q(x) + shq'(x) + O(h^2)].$$

В силу условий 1) и 2а) имеем

$$d(x) = q(x) + hq'(x)F[s] + O(h^2).$$

Условие  $d = q + O(h^2)$  выполнено, если

$$F[s] = 0, \quad F[1] = 1.$$

Из условий 1), 2б), 3а), 3б) следует, что

$$d \geq 0, \quad a \geq c_1 > 0.$$

В самом деле,  $a(x) = A[k(x + sh)] \geq A[c_1] = c_1$ .

Покажем теперь, что условия (27) для  $a(x)$  выполнены, если  $k(x) \in C^{(3)}$  и

$$A[1] = 1, \quad A_1[s] = -0,5, \quad A_2[1 + s] = A_2[s].$$

Здесь приняты обозначения

$$A_1[\alpha(s)] = A_1[1, \alpha(s)], \quad A_2[\alpha(s)] = A_2[1, \alpha(s)].$$

Рассмотрим  $a(x) = A[k(x + sh)] = A[k(x)(1 + hx(s))]$ , где

$$x(s) = \frac{k(x + sh) - k(x)}{hk(x)} = s \frac{k'(x)}{k(x)} + \frac{s^2 h}{2} \frac{k''(x)}{k(x)} + O(h^2).$$

В силу свойства 3в) функционала  $A$  имеем:

$$\begin{aligned} a(x) &= k(x) A[1 + hx(s)] = \\ &= k(x) A[1] + hk(x) A_1[x(s)] + h^2 k(x) A_2[x(s)] + O(h^3). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для  $\kappa(s)$  и учитывая, что  $A_1[\alpha(s)]$  линеен, а  $A_2[\alpha(s)]$  — квадратичен, находим

$$k(x) A_1[\kappa(s)] = k'(x) A_1[s] + 0,5hk''(x) A_1[s^2] + O(h^2),$$

$$k(x) A_2[\kappa(s)] = \frac{(k'(x))^2}{k(x)} A_2[s] + O(h),$$

так что

$$a(x) = k(x) A[1] + hk'(x) A_1[s] + \\ + h^2 \left( \frac{k''(x)}{2} A_1[s^2] + \frac{(k'(x))^2}{k(x)} A_2[s] \right) + O(h^3).$$

Чтобы получить формулу для  $a(x+h)$ , надо в выражении для  $\kappa(s)$  заменить  $k(x+sh)$  на  $k(x+(1+s)h)$ . В результате приходим к формуле

$$a(x+h) = k(x) A[1] + hk'(x) A_1[1+s] + \\ + h^2 \left( \frac{k''(x)}{2} A_1[(1+s)^2] + \frac{(k'(x))^2}{k(x)} A_2[1+s] \right) + O(h^3).$$

Подставляя эти выражения для  $a(x)$  и  $a(x+h)$  в (27), получим

$$A[1] = 1, A_1[s] = -0,5, A_1[1] = 1, A_2[1+s] = A_2[s].$$

Условие  $A_1[(1+s)^2] = A_1[s^2]$  автоматически выполнено.

Если  $A[k(s)]$  имеет второй дифференциал и  $A[1] = 1$ ,  $A_1[s] = -0,5$ , то  $a(x) = k(x-0,5h) + O(h^2)$  для  $k(x) \in C^{(2)}$ . Чтобы убедиться в этом, надо представить  $a(x)$  в виде

$$a(x) = k(x-0,5h) (A[1] + hA_1[\kappa(s)] + O(h^2)),$$

где

$$\kappa(s) = \frac{k(x+sh) - k(x-0,5h)}{hk(x-0,5h)} = (s+0,5) \frac{k'(x-0,5h)}{k(x-0,5h)} + O(h).$$

Подставим выражение для  $\kappa(s)$  в предыдущую формулу:

$$a(x) = k(x-0,5h) A[1] + hk'(x-0,5h) A_1[s+0,5] + O(h^2) = \\ = k(x-0,5h) + O(h^2),$$

если  $A[1] = 1$ ,  $A_1[s+0,5] = 0$ .

В дальнейшем будем рассматривать *исходное семейство однородных консервативных схем* (25), (26), шаблонные функционалы которых  $A[\bar{k}(s)]$  и  $F[\bar{f}(s)]$  удовлетворяют условиям 1) — 3) и условиям

$$F[1] = 1, F[s] = 0, A[1] = 1, A_1[s] = -0,5.$$

Такие схемы, как будет показано ниже, имеют второй порядок аппроксимации в специальных «негативных» или «интегральных» нормах.

Исходному семейству принадлежат также схемы, для которых, кроме указанных выше условий, выполнено условие

$A_2[1+s] = A_2[s]$ . Выше было показано, что в этом случае выполнены условия (27) второго локального порядка аппроксимации:  $\|\psi\|_C = O(h^2)$ , если  $k \in C^{(3)}[0, 1]$ ,  $q, f \in C^{(2)}[0, 1]$ ,  $u \in C^{(4)}[0, 1]$ .

Рассмотрим теперь схему (25) с шаблонным функционалом

$$A[\bar{k}(s)] = \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{\bar{k}(s)} \right)^{-1}$$

и покажем, что  $A_1[s] = -0,5$ . В самом деле,

$$A_1[\alpha(s)] = \frac{d}{dt} A[1+t\alpha(s)]|_{t=0} = \int_{-1}^0 \alpha(s) ds,$$

$$A_1[1] = 1, \quad A_1[s] = -0,5.$$

Следовательно, схема (23), (24) принадлежит исходному семейству. В дальнейшем схему (23), (24) будем называть *наилучшей схемой*.

**8. Разностная функция Грина.** Основной вопрос теории — оценка порядка точности однородной схемы (25), (26) в классах непрерывных и разрывных функций  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$ . Пусть  $y$  — решение задачи (25), (26),  $u$  — решение задачи (1). Для погрешности  $z = y - u$  получаем задачу

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= (az_{\bar{x}})_x - dz = -\psi(x), \quad 0 < x = ih < 1, \\ z(0) &= z(1) = 0, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\psi = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi \quad (30)$$

— погрешность аппроксимации уравнения (1) разностной схемой (25), (26) на решении  $u = u(x)$  задачи (1).

Для оценки порядка точности схемы (25), (26) нам понадобится априорная оценка решения задачи (29).

Решение задачи (1) с однородными краевыми условиями  $u(0) = u(1) = 0$ , как известно, может быть представлено в интегральной форме

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Функция источника или *функция Грина*  $G(x, \xi)$  определяется условиями

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right) - q(x) G(x, \xi) = 0, \quad x \neq \xi,$$

$$G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \quad [G] = 0, \quad \left[ k \frac{dG}{dx} \right] = -1 \quad \text{при } x = \xi$$



и обладает свойствами

$$G(x, \xi) \geq 0, \quad G(x, \xi) = G(\xi, x), \quad x, \xi \in [0, 1].$$

Чтобы получить явное выражение для решения разностной задачи (29) и использовать его затем для вывода априорных оценок, введем *разностную функцию Грина*  $G(x, \xi)$ ,  $x = x_i = ih$ ,  $\xi = \xi_j = jh$ .

Пусть, как обычно,

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h.$$

Будем искать решение задачи (29) в виде

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi)). \quad (31)$$

Потребуем, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению

$$\Delta z(x) = (\Delta_x G(x, \xi), \psi(\xi)) = -\psi(x).$$

Отсюда видно, что уравнение удовлетворяется только при  $\Delta_x G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{h}$ , где  $\delta(x, \xi)$  — символ Кронекера:

$$\delta(x, x) = 1, \quad \delta(x, \xi) = 0 \text{ при } x \neq \xi.$$

Таким образом, формула (31) дает решение задачи (29), если  $G(x, \xi)$  как функция  $x$  при фиксированном  $\xi \in \omega_h$  удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x G(x, \xi) &= (a(x) G_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d(x) G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{h}, \\ x, \xi &\in \omega_h; \quad G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \quad \xi \in \omega_h. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Покажем, что разностная функция Грина  $G(x, \xi)$  существует и найдем для нее явное представление.

Пусть  $\alpha(x) = \alpha(x, h)$  и  $\beta(x) = \beta(x, h)$  — два линейно независимых решения однородного уравнения  $\Delta y = 0$ . Для определенности будем считать, что  $\alpha$  и  $\beta$  суть решения задач Коши:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= (a \alpha_{\bar{x}})_x - d \alpha = 0, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha(0) = 0, \quad a_1 \alpha_{\bar{x}, 1} = 1, \\ \Delta \beta &= (a \beta_{\bar{x}})_x - d \beta = 0, \quad x \in \omega_h, \quad \beta(1) = 0, \quad -a_N \beta_{\bar{x}, N} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Нам понадобятся следующие свойства  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ :

1)  $\alpha(x)$  — монотонно возрастающая,  $\beta(x)$  — монотонно убывающая положительные функции:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &> 0 \text{ при } 0 < x \leq 1, \quad \beta(x) > 0 \text{ при } 0 \leq x < 1, \\ \alpha(x) &\leq \alpha(1), \quad \beta(x) \leq \beta(0) \text{ при } x \in [0, 1], \end{aligned}$$

2)  $\alpha(1) = \beta(0)$ ,

3)  $\Delta(x) = a(\alpha_{\bar{x}} \beta - \alpha \beta_{\bar{x}}) = \text{const} = \alpha(1) > 0, \quad 0 < x \leq 1.$

Докажем эти свойства.

1) Из уравнения  $\Lambda\alpha = 0$  и условия  $a_1\alpha_{\bar{x},1} = 1$  следует

$$a_i\alpha_{\bar{x},i} = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} d_k\alpha_k h, \quad \alpha_1 = h/a_1 > 0.$$

Если  $\alpha_h > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, i-1$ , то  $a_i\alpha_{\bar{x},i} > 0$  и  $\alpha_i > \alpha_{i-1} > 0$ . Аналогично убеждаемся, что  $\beta_{\bar{x},i} < 0$ ,  $0 < \beta_i < \beta_{i-1}$ .

2) Рассмотрим вторую формулу Грина:

$$(\alpha, \Lambda\beta) = (\beta, \Lambda\alpha) + a_N(\alpha\beta_{\bar{x}} - \beta\alpha_{\bar{x}})_N - a_1(\alpha\beta_x - \beta\alpha_x)_0.$$

Отсюда, в силу условий (33), сразу следует  $\alpha(1) = \beta(0)$ .

3) Применим вторую формулу Грина в области  $0 \leq x_i = ih \leq x_{i_0} = x$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{i_0-1} (\alpha\Lambda\beta - \beta\Lambda\alpha)_i h = a_{i_0}(\alpha\beta_{\bar{x}} - \beta\alpha_{\bar{x}})_{i_0} - a_1(\alpha\beta_x - \beta\alpha_x)_0 = \\ &= -\Delta(x_{i_0}) + \beta(0)a_1\alpha_{\bar{x},1} = -\Delta(x_{i_0}) + \beta_0. \end{aligned}$$

Так как  $x_{i_0} = x$  — произвольный узел сетки  $\omega_h$ , то  $\Delta(x) = \beta(0) = \alpha(1)$ .

Будем искать разностную функцию Грина в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} A(\xi)\alpha(x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ B(\xi)\beta(x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (34)$$

Краевые условия при  $x = 0$ ,  $x = 1$  выполнены. При  $x \neq \xi$  функция (34) удовлетворяет уравнению  $\Lambda_x G(x, \xi) = 0$ . Чтобы найти  $A(\xi)$  и  $B(\xi)$  используем условие однозначности  $G(x, \xi)$  при  $x = \xi$  и уравнение  $\Lambda_x G(x, \xi) = -1/h$  при  $x = \xi$ .

Полагая в (34)  $x = \xi$ , найдем

$$A(\xi)\alpha(\xi) = B(\xi)\beta(\xi). \quad (35)$$

Подставим выражение (34) в уравнение (29) при  $x = \xi$  и  $\psi = -1/h$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_x G|_{x=\xi} &= \frac{1}{h} [B(\xi)a(\xi+h)\beta_x(\xi) - A(\xi)a(\xi)\alpha_{\bar{x}}(\xi)] - \\ &= -d(\xi)B(\xi)\beta(\xi) = -\frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из уравнения  $\Lambda\beta = 0$  при  $x = \xi$  выразим

$$a(\xi+h)\beta_x(\xi) = a(\xi)\beta_{\bar{x}}(\xi) + h d(\xi)\beta(\xi),$$

из (35) определим  $B(\xi) = A(\xi)\alpha(\xi)/\beta(\xi)$  и подставим эти выражения в (36):

$$\frac{1}{h} \frac{A(\xi)}{\beta(\xi)} \Delta(\xi) = \frac{1}{h}.$$

Отсюда, из свойств 3) и формулы (35) находим

$$A(\xi) = \frac{\beta(\xi)}{\alpha(1)}, \quad B(\xi) = \frac{\alpha(\xi)}{\alpha(1)}.$$

В результате для  $G(x, \xi)$  получаем формулу

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\alpha(1)}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\alpha(\xi)\beta(x)}{\alpha(1)}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (37)$$

Отсюда видно, что  $G(x, \xi)$  неотрицательна:  $G(x, \xi) > 0$  при  $0 < x < 1$ ,  $0 < \xi < 1$ , симметрична:  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$  для любых  $x, \xi \in \omega_h$ , и удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_\xi G = -(\delta(x, \xi))/h$$

по аргументу  $\xi \in \omega_h$  при фиксированном  $x \in \omega_h$ .

**9. Априорные оценки.** Пользуясь формулой (31), найдем оценку решения задачи (29) через правую часть  $-\psi$ . Для этого нам понадобятся равномерные оценки  $G(x, \xi)$  и ее разностных производных  $G_{\bar{x}}(x, \xi)$ ,  $G_\xi(x, \xi)$ .

Сначала рассмотрим принцип максимума и его следствия для задачи (29).

В гл. I доказан принцип максимума для разностного уравнения

$$\left. \begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i - A_i - B_i = D_i \geq 0. \quad (39)$$

Нам потребуются следующие теоремы (см. гл. I, § 2, п. 5).

**Теорема 1.** Если  $F_i \geq 0$ ,  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  и выполнены условия (39), то решение задачи (38) неотрицательно,

$$y_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, N.$$

**Теорема 2.** Пусть

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad F_i = D_i \varphi_i, \quad (40)$$

и выполнены условия (39). Тогда имеет место оценка

$$\|y\|_C = \max_i |y_i| \leq \|\varphi\|_C. \quad (41)$$

Записывая уравнение (29) в виде (38), где

$$A_i = \frac{a_i}{h^2}, \quad B_i = \frac{a_{i+1}}{h^2}, \quad C_i = A_i + B_i + d_i, \quad F_i = \psi_i, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,$$

получаем, что если  $d_i \geq 0$ , то для задачи (29) справедливы теоремы 1 и 2.

*Лемма 1. Для функции Грина  $G(x, \xi)$  задачи (29) справедливы равномерные оценки*

$$G(x, \xi) \leq 1/c_1 \text{ для всех } x, \xi \in \omega_h, \quad (42)$$

$$|G_{\bar{x}}(x, \xi)| \leq 2/c_1, |G_{\xi}(x, \xi)| \leq 2/c_1, \quad x, \xi \in \omega_h. \quad (43)$$

*Доказательство.* 1. Пусть  $d(x) = 0$ , тогда  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  находятся в явном виде

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^i \frac{h}{a_j}, \quad \beta_i = \sum_{j=i+1}^N \frac{h}{a_j}, \quad \alpha_{\bar{x}, i} = \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{c_1}, \quad |\beta_{\bar{x}, i}| = \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{c_1}.$$

Так как  $\alpha(x) \leq \alpha(1)$ ,  $\beta(x) \leq \alpha(1)$ , то из (37) сразу получаем

$$G_0 \leq \alpha(1) = \sum_{j=1}^N \frac{h}{a_j} \leq \frac{1}{c_1}, \quad |G_{0\bar{x}}| \leq \max(\max |\alpha_{\bar{x}}|, \max |\beta_{\bar{x}}|) \leq \frac{1}{c_1},$$

т. е.

$$G_0(x, \xi) \leq 1/c_1, \quad |G_{0\bar{x}}(x, \xi)| \leq 1/c_1, \quad |G_{0\xi}(x, \xi)| \leq 1/c_1.$$

2. Пусть  $d(x) \geq 0$ ,  $d(x) \neq 0$ . Полагая  $G_0 = G + v$ , где  $G_0$  — функция Грина для случая  $d \equiv 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_x v &= (a(x) v_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d(x) v(x, \xi) = -d(x) G_0(x, \xi), \\ v(0, \xi) &= v(1, \xi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

В силу теоремы 1 имеем  $v(x, \xi) = G_0(x, \xi) - G(x, \xi) \geq 0$ , т. е.  $G(x, \xi) \leq G_0(x, \xi) \leq 1/c_1$ .

Возьмем теперь разностную производную по  $\xi$  от обеих частей уравнения (44). Тогда для  $w(x, \xi) = v_{\xi}(x, \xi)$  получим уравнение

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_x w &= -F(x, \xi), \quad F(x, \xi) = d(x) \varphi(x, \xi), \\ \varphi(x, \xi) &= G_{0\xi}(x, \xi), \quad w(0, \xi) = w(1, \xi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Пользуясь теоремой 2 для задачи (45), получим

$$|w(x, \xi)| \leq \max_{x \in \omega_h} |\varphi(x, \xi)| = \max_{x \in \omega_h} |G_{0\xi}(x, \xi)| \leq 1/c_1.$$

Отсюда в силу формулы

$$G_{\xi}(x, \xi) = G_{0\xi}(x, \xi) - w(x, \xi)$$

следует

$$|G_{\xi}(x, \xi)| \leq |G_{0\xi}(x, \xi)| + |w(x, \xi)| \leq 2/c_1.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для решения задачи (29) с правой частью

$$\psi = S_x$$

верна оценка

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |S|), \text{ где } (1, |S|) = \sum_{i=1}^N |S_i| h. \quad (46)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (31), формулой суммирования по частям (гл. I, § 2, п. 1) и оценкой (43):

$$z(x) = (G(x, \xi), \psi(\xi)) = (G(x, \xi), S_\xi(\xi)) = - (G_\xi(x, \xi), S(\xi)),$$

$$|z(x)| \leq (|G_\xi(x, \xi)|, |S(\xi)|) \leq \frac{2}{c_1} (1, |S|).$$

Теорема 3. Для решения задачи (29) справедлива оценка

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} \|\psi\|_{(-1)}, \quad (47)$$

где

$$\|\psi\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h \psi_k \right| \quad (48)$$

либо

$$\|\psi\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=i}^{N-1} h \psi_k \right|. \quad (49)$$

Если  $\psi(x)$  имеет вид

$$\psi = \eta_x + \psi^*,$$

то для решения задачи (29) выполняется неравенство

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} ((1, |\eta|) + \|\psi^*\|_{(-1)}). \quad (50)$$

Доказательство. 1. Представим  $\psi(x)$  в виде  $\psi(x) = S_x$  или  $S_{i+1} - S_i = h\psi_i$ . Функция  $S(x)$  определена с точностью до аддитивной постоянной. В силу леммы 2 имеем  $\|z\|_C \leq 2(1, |S|)/c_1$ .

Рассмотрим два случая.

а)  $S_1 = 0, S_{i+1} = \sum_{k=1}^i h\psi_k,$

$$(1, |S|) = \sum_{i=1}^N |S_i| h = \sum_{i=1}^{N-1} |S_{i+1}| h = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h\psi_k \right|,$$

т. е.

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} \|\psi\|_{(-1)}, \quad \|\psi\|_{(-1)} = \sum_{j=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^j h\psi_k \right|.$$

$$б) S_N = 0, S_i = - \sum_{k=i}^{N-1} h\psi_k,$$

$$(1, |S|) = \sum_{i=1}^{N-1} h |S_i| = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=i}^{N-1} h\psi_k \right|,$$

т. е.

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} \|\psi\|_{(-1)}, \quad \|\psi\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=i}^{N-1} h\psi_k \right|.$$

2. Если  $\psi = \eta_x + \psi^*$ , то функцию  $z$  представим в виде суммы  $z = z_{(1)} + z_{(2)}$ , где  $z_{(1)}$  — решение задачи (29) с правой частью  $-\psi = -\eta_x$ , а  $z_{(2)}$  — решение задачи (29) с правой частью  $-\psi = -\psi^*$ . В силу (46) и (47) имеем

$$\|z_{(1)}\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta|), \quad \|z_{(2)}\|_C \leq \frac{2}{c_1} \|\psi^*\|_{(-1)}.$$

Отсюда и следует оценка (50).

З а м е ч а н и я. 1. Если  $\psi = \eta_x$ , то

$$\|\psi\|_{(-1)} = \|\eta_x\|_{(-1)} \leq (1, |\eta - \eta_1|) \leq (1, |\eta|) + |\eta_1|.$$

2. Из формулы (31) и леммы 1 следуют оценки

$$\|z\|_C \leq \frac{1}{c_1} (1, |\psi|), \quad \|z\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\psi\|, \quad \|z\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\psi\|_C,$$

где  $\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)}$ . Нетрудно убедиться в том, что

$$\|\psi\|_{(-1)} \leq (1, |\psi|) \leq \|\psi\| \leq \|\psi\|_C.$$

**10. Погрешность аппроксимации в классе непрерывных коэффициентов.** Рассмотрим погрешность аппроксимации для схемы (25), (26):

$$\psi = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi. \quad (51)$$

В п. 6 были получены условия (27) второго порядка локальной аппроксимации для консервативной схемы (25). Эти условия выполнены, если  $k(x) \in C^{(3)}$ ,  $q, f \in C^{(2)}$ , шаблонный функционал  $A[\bar{k}(s)]$  имеет третий дифференциал и имеют место равенства

$$A[1] = 1, \quad A_1[s] = -0,5, \quad A_2[s] = A_2[1 + s].$$

Из априорной оценки теоремы 3 видно, что порядок точности консервативной схемы определяется порядком не локальной, а суммарной (интегральной) аппроксимации в некоторой специальной норме  $\|\psi\|_{(-1)}$ .

Ниже будет показано, что для суммарной аппроксимации  $O(h^2)$  достаточно, чтобы вместо (27) выполнялись требования

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= k(x - 0,5h) + O(h^2), \\ d(x) &= q(x) + O(h^2), \quad \varphi(x) = f(x) + O(h^2). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Покажем сначала, что погрешность аппроксимации  $\psi = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi$  можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \eta_x + \psi^*, \quad \eta = au_{\bar{x}} - \overline{ku'}, \\ \psi^*(x) &= \left( \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) u(x+sh) ds - d(x) u(x) \right) + \\ &\quad + \left( \varphi(x) - \int_{-0,5}^{0,5} f(x+sh) ds \right), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где  $\overline{ku'} = k(x - 0,5h) u'(x - 0,5h)$ .

Воспользуемся уравнением баланса (20), которое запишем в виде

$$(\overline{ku'})_x - \frac{1}{h} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} q(x') u(x') dx' + \frac{1}{h} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} f(x') dx' = 0. \quad (54)$$

Полагая  $x' = x + sh$ , получим отсюда:

$$0 = (\overline{ku'})_x - \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) u(x+sh) ds + \int_{-0,5}^{0,5} f(x+sh) ds.$$

Вычитая это тождество из формулы (51), получаем (53).

Предположим теперь, что  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in C^{(2)}$  и выполнены условия (52). Покажем, что  $\eta(x) = O(h^2)$ ,  $\psi^*(x) = O(h^2)$  для всех  $x = ih \in (0, 1)$ , и, следовательно,  $\|\psi\|_{[-1]} = O(h^2)$ .

Учитывая, что  $u(x) \in C^{(3)}$  и  $u(x) = \bar{u} + 0,5h\bar{u}' + \frac{1}{8}h^2\bar{u}'' + O(h^3)$ ,  $u(x-h) = \bar{u} - \frac{h}{2}\bar{u}' + \frac{h^2}{8}\bar{u}'' + O(h^3)$ , находим

$$u_{\bar{x}} = \bar{u}' + O(h^2), \quad \eta(x) = (a - \bar{k})\bar{u}' + O(h^2) = O(h^2),$$

так как  $a = \bar{k} + O(h^2)$ . Замечая затем, что  $\int_{-0,5}^{0,5} v(x+sh) ds = v(x) + O(h^2)$  для  $v(x) \in C^{(2)}$ , получаем

$$\psi^* = q(x)u(x) - d(x)u(x) + (\varphi(x) - f(x)) + O(h^2) = O(h^2)$$

в силу (52).

**11. Погрешность аппроксимации в классе разрывных коэффициентов.** Вычислим погрешность аппроксимации (51) схемы (25), (26) в случае, когда коэффициенты уравнения (1) разрывны. Без ограничения общности можно считать, что  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  имеют разрывы только в одной точке  $x = \xi \in (0, 1)$ . Решение  $u = u(x)$  уравнения (1) при  $x = \xi$  удовлетворяет условиям непрерывности  $u$ ,  $ku'$ :

$$u_{\text{лев}} = u_{\text{прав}}, (ku')_{\text{лев}} = (ku')_{\text{прав}} = w_0 \text{ при } x = \xi, \quad (55)$$

где  $v_{\text{лев}} = v(\xi - 0)$ ,  $v_{\text{прав}} = v(\xi + 0)$ .

Будем предполагать, что  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}$  и, следовательно,  $u(x) \in Q^{(3)}$ .

Рассмотрим наилучшую схему (23), (24). Для нее формула (53) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\eta}_x + \dot{\psi}^*, \quad \dot{\eta} = \dot{a}u_x - \overline{ku'}, \\ \dot{\psi}^* &= \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh)[u(x+sh) - u(x)] ds, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_i &= \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i+sh)} \right)^{-1}, \quad \dot{d}_i = \int_{-0,5}^{0,5} q(x_i+sh) ds, \\ \dot{\varphi}_i &= \int_{-0,5}^{0,5} f(x_i+sh) ds. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Нетрудно видеть, что

$$\dot{\eta}_i = \frac{\dot{a}_i}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k(x)u'(x) - w_{i-1/2}}{k(x)} dx. \quad (58)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k(x)u'(x) - w_{i-1/2}}{k(x)} dx &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx - \frac{w_{i-1/2}}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} = \\ &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{w_{i-1/2}}{\dot{a}_i} = \frac{1}{\dot{a}_i} (\dot{a}_i u_{\bar{x}, i} - w_{i-1/2}) = \frac{\dot{\eta}_i}{\dot{a}_i}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (51) следует, что погрешность аппроксимации  $\psi$  любой из схем (25), (26) можно записать в форме:

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad \eta = \dot{\eta} + (a - \dot{a})u_{\bar{x}}, \quad \psi^* = \dot{\psi}^* - (d - \dot{d})u + \varphi - \dot{\varphi}. \quad (59)$$



Учитывая ограниченность  $u$  и  $u_{\bar{x}}$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} (1, |\eta|) &\leq (1, |\dot{\eta}|) + M(1, |a - \dot{a}|), \\ \|\psi^* \|_{(-1)} &\leq \|\dot{\psi}^* \|_{(-1)} + \|\varphi - \dot{\varphi} \|_{(-1)} + M(1, |d - \dot{d}|). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Предположим, что точка разрыва  $x = \xi$  функций  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  находится на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  сетки  $\bar{\omega}_n$ , так что

$$\xi = x_n + \theta h, \quad x_n = n(h, \xi)h, \quad \theta = \theta(h, \xi), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

При  $x < \xi$  и  $x > \xi$  функции  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  являются достаточно гладкими. Поэтому для любой схемы (25), (26)

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= O(h^2) \quad \text{при } i \neq n+1, \\ \psi_i^* &= O(h^2) \quad \text{при } i \neq n, \text{ если } \theta < 0,5, \\ \psi_i^* &= O(h^2) \quad \text{при } i \neq n+1, \text{ если } \theta \geq 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Рассмотрим наилучшую схему (23), (24). Для оценки  $\dot{\eta}_{n+1}$  воспользуемся формулой (58). Так как поток  $ku'$  непрерывен, то  $ku' = w_{n+1/2} + O(h)$  и из (58) следует, что  $\dot{\eta}_{n+1} = O(h)$ .

В силу непрерывности и кусочной дифференцируемости функции  $u(x)$  имеем  $u(x+sh) - u(x) = O(h)$  и  $\psi_n^* = O(h)$  при  $\theta < 0,5$ ,  $\psi_{n+1}^* = O(h)$  при  $\theta > 0,5$ .

Отсюда и из (56), (61) следует, что  $(1, |\dot{\eta}|) = |\dot{\eta}_{n+1}|h + O(h^2) = O(h^2)$ ,  $\|\dot{\psi}^* \|_{(-1)} \leq (1, |\dot{\psi}^*|) = h|\psi_n^*| + O(h^2) = O(h^2)$  при  $\theta < 0,5$ ,  $\|\dot{\psi}^* \|_{(-1)} \leq h|\psi_{n+1}^*| + O(h^2) = O(h^2)$  при  $\theta > 0,5$  и

$$\|\dot{\psi} \|_{(-1)} \leq (1, |\dot{\eta}|) + |\dot{\eta}_n| + \|\dot{\psi}^* \|_{(-1)} = O(h^2), \quad (62)$$

т. е. наилучшая схема (23), (24) в классе разрывных коэффициентов  $k(x) \in Q^{(2)}$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(1)}$  имеет второй порядок аппроксимации в негативной норме  $\|\cdot\|_{(-1)}$ .

Для произвольной схемы (25), (26) погрешность аппроксимации оценивается по формулам (60). Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} (1, |a - \dot{a}|) &= h|a_{n+1} - \dot{a}_{n+1}| + O(h^2) = O(h), \quad (1, |d - \dot{d}|) = \\ &= h|d_n - \dot{d}_n| + O(h^2) = O(h) \quad \text{при } \theta < 0,5, \quad (1, |d - \dot{d}|) = \\ &= h|d_{n+1} - \dot{d}_{n+1}| + O(h^2) = O(h) \quad \text{при } \theta > 0,5, \end{aligned}$$

так как в общем случае  $a_{n+1} - \dot{a}_{n+1} = O(1)$ ,  $d_{n+1} - \dot{d}_{n+1} = O(1)$ .

В результате приходим к оценке

$$\|\psi\|_{(-1)} \leq (1, |\overset{\circ}{\eta}|] + |\overset{\circ}{\eta}_1| + \|\overset{\circ}{\psi}^*\|_{(-1)} + \|\varphi - \overset{\circ}{\varphi}\|_{(-1)} + \\ + M((1, |a - \overset{\circ}{a}|] + (1, |d - \overset{\circ}{d}|]) = O(h), \quad (63)$$

т. е. любая исходная схема в классе разрывных коэффициентов имеет первый порядок аппроксимации в норме  $\|\cdot\|_{(-1)}$ .

Остановимся более подробно на вопросе о локальной структуре погрешности аппроксимации  $\psi$ . Очевидно, что в узлах  $x = x_n$  и  $x = x_{n+1}$  функция  $\psi(x)$  имеет вид

$$\psi_n = \frac{\eta_{n+1}}{h} + O(1), \quad \psi_{n+1} = -\frac{\eta_{n+1}}{h} + O(1), \quad \eta_{n+1} = O(1), \quad (64)$$

т. е. в узлах, соседних с точкой разрыва  $x = \xi$  схема (25) не аппроксимирует уравнение (1), так как  $\psi_n = O(1/h)$ ,  $\psi_{n+1} = O(1/h)$ .

Из формулы (64) видно, что главные слагаемые в выражениях  $\psi_n$  и  $\psi_{n+1}$  равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, так что

$$\psi_n + \psi_{n+1} = O(1), \quad h(\psi_n + \psi_{n+1}) = O(h),$$

т. е. погрешность аппроксимации в окрестности разрыва коэффициента  $k(x)$  имеет дипольный характер. Именно поэтому, несмотря на отсутствие локальной аппроксимации, консервативная схема (25), (26) имеет первый суммарный порядок аппроксимации:

$$\|\psi\|_{(-1)} = O(h) \text{ при } k, q, f \in Q^{(m)}, \quad m \geq 1.$$

Можно указать схемы, отличные от (23), (24) и имеющие второй порядок аппроксимации в случае разрывных коэффициентов. При этом предполагается, что известно положение разрыва на сетке:  $\xi = x_n + \theta h$ . Заменяя интегралы (в 57) их приближенными значениями, например, полагая

$$\frac{1}{\overset{\circ}{a}_{n+1}} = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{\theta}{k(x_n)} + \frac{1-\theta}{k(x_{n+1})} = \frac{1}{a_{n+1}} \quad (65)$$

и аналогично для  $\overset{\circ}{\varphi}_n$  и  $\overset{\circ}{d}_n$ , получаем схему с коэффициентами  $a, d, \varphi$ , которая будет иметь точность  $O(h^2)$  для  $k, q, f \in Q^{(2)}$ , так как  $\overset{\circ}{a}_{n+1} - a_{n+1} = O(h)$  и

$$(1, |a - \overset{\circ}{a}|] = O(h^2), \quad (1, |d - \overset{\circ}{d}|] = O(h^2), \quad (1, |\varphi - \overset{\circ}{\varphi}|] = O(h^2). \quad (66)$$

Если разрыв находится в узле  $x_i$  сетки  $\omega_h$ , то условия (66) выполняются для

$$\left. \begin{aligned} a_i &= k_{i-1/2}, \quad a_i = 0,5(k(x_{i-1} + 0) + k(x_i - 0)), \\ \varphi_i &= 0,5(f(x_i - 0) + f(x_i + 0)), \quad d_i = 0,5(q(x_i - 0) + q(x_i + 0)). \end{aligned} \right\} (67)$$

Если  $\xi = x_{i-1/2}$ , то можно взять

$$a_i = \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i}, \quad \varphi_i = f_i, \quad d_i = q_i. \quad (68)$$

При этом будем иметь  $\|\psi\|_{(-1)} = O(h^2)$  для  $k, q, f \in Q^{(2)}$ .

**12. О сходимости и точности.** Пусть  $y$  — решение задачи (25), (26),  $u$  — решение задачи (1),  $z = y - u$  — погрешность схемы (25), (26). Погрешность  $z$  является решением задачи (29), где  $\psi = \psi(x)$  определяется формулой (30).

Из априорной оценки (47) для решения задачи (29) следует, что если схема (25), (26) аппроксимирует задачу (1) в норме  $\|\psi\|_{(-1)}$ , то она сходится в норме  $C$ , причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Таким образом, верна

**Теорема 4.** Если выполнены условия  $k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}$ , то любая исходная схема (25), (26) равномерно сходится со скоростью  $O(h^2)$  (имеет второй порядок точности), т. е.

$$\|y - u\|_C = O(h^2). \quad (69)$$

Любая исходная схема в классе разрывных функций  $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)}$  имеет, по крайней мере, первый порядок точности:

$$\|y - u\|_C = O(h). \quad (70)$$

*Наилучшая схема (23), (24) в классе функций*

$$k(x) \in Q^{(2)}, \quad q(x), f(x) \in Q^{(1)}$$

*имеет второй порядок точности,  $\|y - u\|_C = O(h^2)$ , на любой последовательности сеток  $\omega_h$ .*

В работе А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1] показано, что аппроксимация в классе гладких коэффициентов необходима и достаточна для сходимости однородной схемы (25), (26).

**13. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках.** Для решения дифференциальных уравнений на практике часто используются разностные схемы на неравномерных сетках. В гл. I, § 1 для простейшего уравнения  $u'' = -f$  была рассмотрена схема на неравномерной сетке

$$\widehat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1, h_i = x_i - x_{i-1}\}$$

и проведено изучение погрешности аппроксимации для этой схемы.

Чтобы получить однородную консервативную схему на неравномерной сетке  $\hat{\omega}_h$ , напомним на интервале  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ , где  $x_{i-1/2} = x_i - 0,5h_i$ ,  $x_{i+1/2} = x_i + 0,5h_{i+1}$ , уравнение баланса

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx = - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx, \quad W = -ku'. \quad (71)$$

По аналогии с п. 5 проведем замену

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} qu dx \sim \hat{h}_i \hat{d}_i u_i, \quad \hat{d}_i = \frac{1}{\hat{h}_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad \hat{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1}),$$

$$W_{i-1/2} \sim \tilde{W}_{i-1/2} = -\hat{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = -\hat{a}_i u_{\bar{x}, i}, \quad \hat{a}_i = \left( \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

После этого, так же как и в п. 5, получаем разностную схему

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\hat{h}_i} \left[ \hat{a}_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \hat{a}_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] - \hat{d}_i y_i &= -\hat{\Phi}_i, \\ \hat{a}_i &= \left( \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad \hat{d}_i = \frac{1}{\hat{h}_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad \hat{\Phi}_i = \frac{1}{\hat{h}_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Эту схему будем называть, как и в случае равномерной сетки, *наилучшей схемой*.

Коэффициенты  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{d}_i$ ,  $\hat{\Phi}_i$  очевидно можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_i &= \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x_i + sh_i)} \right)^{-1}, \\ \hat{d}_i &= \frac{h_i}{\hat{h}_i} \int_{-0,5}^0 q(x_i + sh_i) ds + \frac{h_{i+1}}{\hat{h}_i} \int_0^{0,5} q(x_i + sh_{i+1}) ds, \\ \hat{\Phi}_i &= \frac{h_i}{\hat{h}_i} \int_{-0,5}^0 f(x_i + sh_i) ds + \frac{h_{i+1}}{\hat{h}_i} \int_0^{0,5} f(x_i + sh_{i+1}) ds. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Введем обозначения (см. гл. I, § 1):

$$y_{\bar{x}, i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad y_{x, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad y_{\bar{x}, i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}.$$

Рассмотрим трехточечную схему

$$\left. \begin{aligned} (ay_{\bar{x}})_x - dy &= -\varphi, \quad x = x_i \in \hat{\omega}_h, \\ y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Если заданы  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  из  $Q^{(0)}[0, 1]$  и известны точки их разрывов, то всегда можно выбрать неравномерную сетку так, чтобы точки разрыва коэффициентов  $k$ ,  $q$ ,  $f$  были бы ее узлами. Такую сетку, зависящую от конкретных функций  $k$ ,  $q$ ,  $f$ , будем обозначать  $\hat{\omega}_h(K)$ . Простейшие выражения для  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\varphi_i$  на  $\hat{\omega}_h(K)$ , как следует из (73), имеют вид

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = \frac{h_i q_i^- + h_{i+1} q_i^+}{2h_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i}, \quad (75)$$

где  $f_i^\pm = f(x_i \pm 0)$  и т. д. Впрочем, можно пользоваться и другими формулами, например:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} (k_{i-1}^+ + k_i^-), \quad \varphi_i = \frac{2k_{i-1}^+ k_i^-}{k_{i-1}^+ + k_i^-}, \\ d_i &= \frac{h_i q_{i-1/2} + h_{i+1} q_{i+1/2}}{2h_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_{i-1/2} + h_{i+1} f_{i+1/2}}{2h_i}. \end{aligned}$$

В случае непрерывных коэффициентов из (75) следует

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i.$$

Если разрывы совпадают с потоковыми точками ( $x = x_{i-1/2}$ ) сетки  $\hat{\omega}_h$ , то коэффициенты  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\varphi_i$  выберем следующим образом:

$$a_i = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad (75')$$

либо возьмем

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2k_{i-1/2}^+ k_{i-1/2}^-}{k_{i-1/2}^+ + k_{i-1/2}^-}, \quad d_i = \frac{h_{i+1} q_{i+1/2}^- + h_i q_{i-1/2}^+}{2h_i}, \\ \varphi_i &= \frac{h_{i+1} f_{i+1/2}^- + h_i f_{i-1/2}^+}{2h_i}. \end{aligned}$$

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации схемы (74) на неравномерной сетке  $\omega_h(K)$ . Напишем уравнение для ошибки  $z = y - u$ :

$$\left. \begin{aligned} (az_{\bar{x}})_x - dz &= -\psi(x), \quad x = x_i \in \hat{\omega}_h, \\ z_0 = z_N &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

где  $\psi(x) = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi(x)$  — погрешность аппроксимации.

Пользуясь уравнением баланса (71) по аналогии с п. 11 представим погрешность аппроксимации  $\psi$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= \eta_{\varepsilon, i} + \psi_i^*, \quad \eta_i = (au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2}, \\ \psi_i^* &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)(u(x) - u_i) dx + (\varphi_i - \dot{\varphi}_i) - (d_i - \dot{d}_i) u_i. \end{aligned} \right\} (77)$$

Для наилучшей схемы (72), в частности, имеем

$$\begin{aligned} \psi_i^* &= \dot{\psi}_i^* = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)(u(x) - u_i) dx, \\ \eta_i &= \dot{\eta}_i = \frac{\dot{a}_i}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega - \omega_{i-1/2}}{k(x)} dx, \quad \omega = ku'. \end{aligned}$$

Для простоты изложения рассмотрим сейчас погрешность аппроксимации  $\psi$  для наилучшей схемы (72).

Предположим, что  $k, q, f$  имеют разрыв первого рода в узле  $x_i \in \hat{\omega}_h$ , а при  $x_{i-1} < x < x_i$ ,  $x_i < x < x_{i+1}$  являются гладкими функциями. Выражение для  $\psi^*$  перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i^* &= \frac{h_i}{h_i} \int_{-0,5}^0 q(x_i + sh_i)(u(x_i + sh_i) - u(x_i)) ds + \\ &+ \frac{h_{i+1}}{h_i} \int_0^{0,5} q(x_i + sh_{i+1})(u(x_i + sh_{i+1}) - u(x_i)) ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что для любой функции  $\mu(x) \in Q^{(2)}$ , имеющей разрыв первого рода в точке  $x = x_i$ , верны формулы

$$\begin{aligned} \mu(x_i + sh_i) &= \mu_i^- + sh_i(\mu')_i^- + O(h_i^2), \quad -0,5 < s < 0, \quad \mu_i^- = \mu(x_i - 0), \\ \mu(x_i + sh_{i+1}) &= \mu_i^+ + sh_{i+1}(\mu')_i^+ + O(h_{i+1}^2), \quad 0 < s < 0,5, \quad \mu_i^+ = \mu(x_i + 0), \\ (\mu')_i^+ &= (\mu')_{i+1}^- + O(h_{i+1}), \end{aligned}$$

находим

$$\dot{\psi}_i^* = \frac{1}{8} (h^2 (qu')^-)_{x, i} + O(h_i^2). \quad (78)$$

Для  $\dot{\eta}_i$  будем иметь

$$\dot{\eta}_i = \dot{a}_i u_{\bar{x}, i} - (ku')_{i-1/2} = O(h_i^2),$$

так как  $\dot{a}_i = k_{i-1/2} + O(h_i^2)$ .

Погрешность аппроксимации  $\psi$  для схемы (74), (75) определяется по формулам (77). Воспользуемся формулами для  $\overset{\circ}{\varphi}_i$  и  $\overset{\circ}{d}_i$ :

$$\overset{\circ}{\varphi}_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i} + \frac{1}{8} (h^2 (f')^-)_{x, i} + O(h_i^2),$$

$$\overset{\circ}{d}_i = \frac{h_i q_i^- + h_{i+1} q_i^+}{2h_i} + \frac{1}{8} (h^2 (q')^-)_{x, i} + O(h_i^2).$$

Отсюда и из (75), (77) находим

$$(\varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i) - (d_i - \overset{\circ}{d}_i) u_i = \frac{u_i}{8} (h^2 (q')^-)_{x, i} - \frac{1}{8} (h^2 (f')^-)_{x, i} + O(h_i^2).$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} u_i (h^2 (q')^-)_{x, i} &= (h_i^2 (q'u)^-)_{x, i} - h_{i+1}^2 (q')_{i+1}^- u_{x, i} = \\ &= (h^2 (q'u)^-)_{x, i} + O(h_{i+1}^2). \end{aligned}$$

Учитывая затем формулу для  $\overset{\circ}{\psi}^*$ , получим

$$\overset{\circ}{\psi}_i^* = \frac{1}{8} (h^2 ((qu)' - f')^-)_{x, i} + O(h_i^2).$$

Таким образом, погрешность аппроксимации для схемы (74), (75) на специальной последовательности сеток  $\hat{\omega}_h(K)$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \mu_x + \psi^{**}, \quad \psi^{**} = O(h^2), \\ \mu &= (au_x)_i - (ku')_{i-1/2} + \frac{h_i^2}{8} [(qu)' - f']_i^- = O(h_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Можно показать, что погрешность аппроксимации наилучшей схемы (72) на произвольной неравномерной сетке при любом положении точки разрыва коэффициентов  $\xi$ :

$$x_n \leq \xi \leq x_{n+1}, \quad x_n, x_{n+1} \in \hat{\omega}_h$$

представима в виде (79), где

$$\mu_i = O(h_i^2) + \delta_{i, n+1} O(h_{n+1}), \quad \psi_i^{**} = O(h_i^2). \quad (80)$$

Введем обозначения

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i,$$

$$\|\psi\|_{(-1)^*} = \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1} \left| \sum_{k=1}^i h_k \psi_k \right| \quad \text{или} \quad \|\psi\|_{(-1)^*} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{k=i}^{N-1} h_k \psi_k \right|.$$

Из (79), (80) следует, что для погрешности аппроксимации схемы (74), (75) на специальной последовательности сеток  $\hat{\omega}_h(K)$  и наилучшей схемы (72) на произвольной неравномерной сетке при любом положении точки разрыва справедлива оценка

$$\|\psi\|_{(-1^*)} \leq M\bar{h}^2, \quad \bar{h} = (1, h^2)^{1/2}, \quad (81)$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от сетки. Действительно:

$$\|\psi\|_{(-1^*)} \leq (1, |\mu|) + |\mu_1| + \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{k=1}^i \psi_k^{**} h_k \right| \leq M\bar{h}^2.$$

*Лемма 3. Для решения задачи (76) с правой частью  $-\psi = -\mu_x - \psi^*$  на произвольной неравномерной сетке справедлива априорная оценка*

$$\|z\|_C \leq \frac{2}{c_1} (\|\psi^*\|_{(-1^*)} + (1, |\mu|)). \quad (82)$$

Для доказательства леммы 3 по аналогии с п. 8 вводится разностная функция Грина  $G(x, \xi)$  для задачи (76) как решение уравнения

$$\Lambda_x G = (a(x) G_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d(x) G(x, \xi) = -\frac{\delta(x, \xi)}{\bar{h}}, \quad x, \xi \in \hat{\omega}_h$$

с однородными краевыми условиями

$$G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0, \quad \xi \in \hat{\omega}_h.$$

После этого устанавливаются оценки

$$|G(x, \xi)| \leq 1/c_1, \quad |G_\xi(x, \xi)| \leq 2/c_1, \quad |G_{\bar{x}}(x, \xi)| \leq 2/c_1$$

и доказывается аналог теоремы 3 — лемма 3. Так как при этом никаких новых принципиальных вопросов не возникает, то нет необходимости воспроизводить рассуждения, приводящие к оценке (82). Из (81) и (82) следует

*Теорема 5. Наилучшая схема (72) имеет второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов*

$$k(x) \in Q^{(2)}[0, 1], \quad q(x), f(x) \in Q^{(1)}[0, 1]$$

*на произвольной последовательности неравномерных сеток.*

*Схема (74), (75) имеет второй порядок точности:*

*а) в классе гладких коэффициентов*

$$k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$$

*на произвольной последовательности неравномерных сеток,*

*б) в классе разрывных коэффициентов*

$$k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)}[0, 1]$$



на специальных последовательностях неравномерных сеток  $\hat{\omega}_h(K)$ .

Укажем также, что и схема (74), (75') имеет второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов на специальной последовательности сеток, когда точки разрыва коэффициентов совпадают с потоковыми точками  $x_{i-1/2}$ .

Единственной характеристикой точности является средне-квadraticный шаг  $\bar{h} = \sqrt{(1, \bar{h}^2)}$ .

До сих пор рассматривались конкретные схемы (72), (74), (75). Рассмотрим теперь семейство схем (74), коэффициенты которых  $a$ ,  $d$ ,  $\varphi$  вычисляются при помощи тех же шаблонных функционалов

$$A[\bar{k}(s)], \quad \bar{k}(s) \in Q^{(0)}[-1, 0],$$

$$F[\bar{f}(s)], \quad \bar{f}(s) \in Q^{(0)}[-1/2, 1/2],$$

что и в случае равномерной сетки (см. п. 7).

Формула для  $a_i$  остается неизменной

$$a_i = A[k(x_i + sh_i)], \quad -1 \leq s \leq 0. \quad (83)$$

Формулы для  $d_i$  и  $\varphi_i$  существенно усложняются в случае разрывных коэффициентов.

Введем сначала обозначения для ступенчатых функций:

$$\eta_0^- = \begin{cases} 1, & s < 0, \\ 0, & s \geq 0, \end{cases} \quad \eta_0^+ = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s > 0, \end{cases} \quad \pi_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \neq 0, \end{cases}$$

так, что  $\eta_0^-(s) + \eta_0^+(s) + \pi_0(s) = 1$ .

Предположим, что

а)  $F[\pi_0(s)] = 0$ , т. е.  $F[\bar{f}(s)]$  не зависит от значения в точке  $s = 0$ , а зависит только от предельных значений  $\bar{f}(s)$  справа и слева в этой точке, например,

$$F[\bar{f}(s)] = 0,5(\bar{f}(0+0) + \bar{f}(0-0)),$$

б)  $F[\eta_0^-(s)] = F[\eta_0^+(s)] = 0,5$ , так что  $F[1] = 1$ .

Действительно,

$$F[1] = F[\eta_0^- + \eta_0^+ + \pi_0] = F[\eta_0^-] + F[\eta_0^+] = 1.$$

Из условия  $F[s] = 0$  следует, что  $F[s\eta_0^+] = -F[s\eta_0^-] = \alpha$ , так как  $F[s\pi_0] = F[0] = 0$ .

Коэффициент  $\varphi$  будем вычислять по формуле

$$\varphi = F[f^*(s)],$$

где

$$f^*(s) = \frac{h_i}{\bar{h}_i} f(x_i + sh_i) \eta_0^-(s) + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} f(x_i + sh_{i+1}) \eta_0^+(s) + f(x_i) \pi_0(s), \quad -0,5 \leq s \leq 0,5.$$

В силу линейности  $F$  и условия  $F[\pi_0(s)] = 0$  имеем

$$\varphi_i = \varphi(x_i) = \frac{h_i}{\bar{h}_i} F[f(x_i + sh_i) \eta_0^-(s)] + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} F[f(x_i + sh_{i+1}) \eta_0^+(s)], \quad (84)$$

где  $\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ . Аналогично определяется коэффициент  $d_i$ :

$$d_i = \frac{h_i}{\bar{h}_i} F[q(x_i + sh_i) \eta_0^-(s)] + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} F[q(x_i + sh_{i+1}) \eta_0^+(s)]. \quad (85)$$

Если сетка равномерна, т. е.  $h_i = h_{i+1} = h$ , то формулы (84), (85) дают

$$\varphi_i = F[f(x_i + sh)], \quad d_i = F[q(x_i + sh)].$$

Будем рассматривать семейство схем (74) с коэффициентами (83) — (85), предполагая, что выполнены условия п. 7 и а), б).

Проверим для схемы (73) условие б):

$$\left. \begin{aligned} F[\bar{f}(s)] &= \int_{-0,5}^{0,5} \bar{f}(s) ds, \\ F[\eta_0^-] &= \int_{-0,5}^{0,5} ds = 0,5, \quad F[\eta_0^+] = \int_0^{0,5} ds = 0,5, \\ \alpha &= F[s\eta_0^+(s)] = \int_0^{0,5} s ds = 1/8. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Для схемы (75) имеем

$$\begin{aligned} F[\bar{f}(s)] &= 0,5(\bar{f}(0-0) + \bar{f}(0+0)), \\ F[\eta_0^-] &= 0,5(\eta_0^-(0-0) + \eta_0^-(0+0)) = 0,5\eta_0^-(0-0) = 0,5, \\ F[\eta_0^+] &= 0,5, \quad \alpha = F[s\eta_0^+(s)] = 0. \end{aligned}$$

При вычислении погрешности аппроксимации на сетке  $\hat{\omega}_h(K)$  будем исходить из представления (77). Запишем

$$\varphi_i = \frac{h_i}{\bar{h}_i} \varphi_i^- + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} \varphi_i^+,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i^- &= F[f(x_i + sh_i) \eta_0^-(s)] = F[(f_i^- + sh_i f_i'^- + O(h_i^2)) \eta_0^-(s)] = \\ &= f_i^- F[\eta_0^-(s)] + h_i f_i'^- F[s\eta_0^-(s)] + O(h_i^2) = 0,5f_i^- - ah_i f_i'^- + O(h_i^2). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\varphi_i^+ = F[f(x_i + sh_{i+1}) \eta_0^+(s)] = 0,5f_i^+ + ah_{i+1} f_i'^+ + O(h_{i+1}^2).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} f_i'^+ &= f_{i+1}'^- + O(h_{i+1}), \quad h_{i+1}^2 f_i'^+ - h_i^2 f_i'^- = \\ &= h_{i+1}^2 f_{i+1}'^- - h_i^2 f_i'^- + O(h_{i+1}^3) = (h^2 f'^-)_{x_i} h_i + O(h_{i+1}^3), \end{aligned}$$

получаем

$$\Phi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i} + \alpha (h^2 f'^-)'_{x,i} + O(h_i^2), \quad f \in Q^{(2)}. \quad (87)$$

Точно так же находим

$$d_i = \frac{h_i q_i^- + h_{i+1} q_i^+}{2h_i} + \alpha (h^2 q'^-)'_{x,i} + O(h_i^2), \quad q \in Q^{(2)}. \quad (88)$$

В частности, для схемы (73)  $\alpha = 1/8$ .

Для погрешности аппроксимации  $\Psi_i^*$ , определяемой по формуле (77), имеем

$$\Psi_i^* = \eta_{x,i}^* + \Psi_i^{**}, \quad \Psi_i^{**} = O(h_i^2), \quad (89)$$

$$\eta_i^* = h_i^2 \left[ (\alpha - 1/8) (f' - q'u)'_i^- + \frac{1}{8} (qu')_i^- \right]. \quad (90)$$

При вычислении  $\Psi_i^*$  было использовано равенство

$$u_i (h^2 q'^-)'_{x,i} = (h^2 (q'u)'_i^-)'_{x,i} - h_{i+1}^2 q'_{i+1} u_{x,i}^-.$$

Для наилучшей схемы из (86), (90) следует, что

$$\eta_i^* = \frac{h_i^2}{8} (qu')_i^-.$$

Таким образом, погрешность аппроксимации для любой схемы из рассматриваемого семейства схем (74), (83) — (85) можно представить в виде

$$\Psi_i = \mu_{x,i} + \Psi_i^{**}, \quad \Psi_i^{**} = O(h_i^2), \quad (91)$$

$$\mu_i = \eta_i + \eta_i^* = O(h_i^2), \quad (92)$$

где  $\eta_i$  определяется по формуле (77),  $\eta_i^*$  — по формуле (90). Из (91), (92) следует, что

$$\|\Psi\|_{(-1)^*} \leq M \bar{h}^2, \quad \bar{h}^2 = (1, h^2). \quad (93)$$

Для погрешности  $z = y - u$  верна оценка (82). Из (82), (93) следует

**Теорема 6.** Любая схема из исходного семейства схем (74), (83) — (85) на любой последовательности неравномерных сеток в классе гладких функций

$$k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}[0, 1], \quad u(x) \in C^{(3)}[0, 1]$$

и на специальной последовательности неравномерных сеток  $\omega_h(K)$  для любых функций

$$k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)}[0, 1]$$

имеет второй порядок точности:

$$\|y - u\|_C \leq M \bar{h}^2, \quad (94)$$

где  $\bar{h} = (1, h^2)^{1/2}$  — среднеквадратичный шаг,  $M = \text{const} > 0$ , не зависящая от сетки.

Отметим, что любая однородная схема из исходного семейства в классе разрывных функций  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}[0, 1]$  на произвольной последовательности сеток  $\hat{\omega}_h$  имеет первый порядок точности.

**З а м е ч а н и е.** Для доказательства сходимости схем на неравномерных сетках  $\hat{\omega}_h(K)$  можно воспользоваться априорной оценкой для задачи (76):

$$\|z\|_C \leq \frac{1}{2c_1} \|\psi\|_{(-2^*)}, \quad (95)$$

где

$$\|\psi\|_{(-2^*)} = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h_{i+1} \left( \sum_{k=1}^i h_k \psi_k \right)^2 \right)^{1/2},$$

либо

$$\|\psi\|_{(-2^*)} = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left( \sum_{k=i}^{N-1} h_k \psi_k \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Эта оценка может быть получена энергетическим методом. Умножим уравнение (76) скалярно на  $-z$ :

$$-((az_{\bar{x}})_{\bar{x}}, z)_* + (d, z^2)_* = (\psi, z)_*.$$

В силу первой формулы Грина имеем отсюда

$$(a, z_{\bar{x}}^2] + (d, z^2)_* = (\psi, z)_*. \quad (96)$$

Положим  $\psi = S_x$ , где  $S_i = \sum_{k=i}^{N-1} h_k \psi_k$ ,  $S_N = 0$ , либо  $S_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k \psi_k$ ,  $S_1 = 0$ . Тогда

$$(z, \psi)_* = (S_x, z)_* = -(z_{\bar{x}}, S] \leq \|z_{\bar{x}}\| \|S\| \leq \varepsilon \|z_{\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|S\|^2.$$

Подставим эту оценку в (96), учтем, что  $a \geq c_1 > 0$ , и выберем  $\varepsilon = 0,5 c_1$  из условия минимума  $1/(c_1\varepsilon - \varepsilon^2)$ :

$$\|z_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon(c_1 - \varepsilon)} \|S\|^2 = \frac{1}{c_1^2} \|\psi\|_{(-2^*)}^2.$$

Пользуясь теперь леммой 1 гл. I, § 2:  $\|z\|_C \leq 0,5\|z_{\bar{x}}\|$ , получаем (95).

**14. Точная схема. Схема любого порядка точности.** Для уравнения (1) можно построить однородную консервативную трехточечную схему, являющуюся точной, так что решение разностной задачи  $y_i$  совпадает в узлах любой сетки  $\omega_h$  с точным решением  $u = u(x)$  задачи (1):

$$y_i = u(x_i) \text{ для } k, q, f \in Q^{(0)}.$$

Для удобства дальнейшего изложения перепишем (1) в виде

$$\left. \begin{aligned} L^{(p, q)} u &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{p(x)} \frac{du}{dx} \right) - q(x) u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u_1, \quad u(1) = u_2, \quad p(x) = k^{-1}(x), \quad 0 < p(x) < 1/c_1, \quad q(x) \geq 0. \end{aligned} \right\} (97)$$

Отметим, прежде всего, что наилучшая схема (23), (24) при  $q = f \equiv 0$  является точной. В самом деле, решение задачи (97) при  $q = f \equiv 0$ :

$$u(x) = u_1 + c \int_0^x p(t) dt, \quad c = (u_2 - u_1) \left( \int_0^1 p(t) dt \right)^{-1}. \quad (98)$$

Отсюда видно, что

$$u_{\bar{x}, i} = \frac{c}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(t) dt = \frac{c}{\dot{a}_i}, \quad \dot{a}_i u_{\bar{x}, i} = c,$$

где  $\dot{a}_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(t) dt \right)^{-1}$  и, следовательно, функция (98) удовлетворяет уравнению

$$(\dot{a} u_{\bar{x}})_x = 0.$$

Обратимся к уравнению (97). Пусть  $\omega_h$  — равномерная сетка. Основная идея получения точной схемы состоит в том, что решение  $u = u(x)$  уравнения (97) в любой внутренней точке  $i$ , в частности, при  $x = x_i$  интервала  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  выражается через значения  $u_{i-1}$ ,  $u_{i+1}$  и правую часть  $f(x)$ .

В самом деле,  $u(x)$  можно представить в виде

$$u(x) = A_i v_1^i(x) + B_i v_2^i(x) + v_3^i(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}, \quad (99)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — числа,  $v_1^i(x)$  и  $v_2^i(x)$  — линейно независимые решения однородного уравнения  $L^{(p, q)} u = 0$  (шаблонные функции), а  $v_3^i(x)$  — частное решение неоднородного уравнения (97) при однородных условиях:

$$L^{(p, q)} v_3^i = f(x), \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad v_3^i(x_{i+1}) = v_3^i(x_{i-1}) = 0. \quad (100)$$

Определим *шаблонные функции*  $v_1^i(x)$ ,  $v_2^i(x)$  как решения задач Коши:

$$L^{(p, q)} v_1^i = 0, \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad v_1^i(x_{i-1}) = 0, \quad \frac{1}{p(x_{i-1})} (v_1^i)'(x_{i-1}) = 1, \quad (101)$$

$$L^{(p, q)} v_2^i = 0, \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad v_2^i(x_{i+1}) = 0, \quad \frac{1}{p(x_{i+1})} (v_2^i)'(x_{i+1}) = -1. \quad (102)$$

Полагая в (99)  $x = x_{i-1}$  и  $x = x_{i+1}$ , найдем

$$A_i = \frac{u(x_{i+1})}{v_1^i(x_{i+1})}, \quad B_i = \frac{u(x_{i-1})}{v_2^i(x_{i-1})}. \quad (103)$$

Шаблонные функции обладают следующими свойствами:

1)  $v_1^i(x) > 0$  и монотонно возрастает при  $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ ,  
 $v_2^i(x) > 0$  и монотонно убывает при  $x_{i-1} < x < x_{i+1}$ .

2) имеет место равенство

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_2^i(x_{i-1}), \quad (104)$$

3) справедливо соотношение

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_1^i(x_i) + v_2^i(x_i) + v_2^i(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i q(x) dx + v_1^i(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i q(x) dx, \quad (105)$$

4) и, наконец,

$$v_2^i(x_i) = v_1^{i+1}(x_{i+1}). \quad (106)$$

Докажем эти свойства.

1) Свойство 1) непосредственно следует из (101) и (102).

2) Учитывая (101) и (102), имеем (при  $L = L^{(p, q)}$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (v_1^i L v_2^i - v_2^i L v_1^i) dx = \\ &= \left( v_1^i \frac{1}{p} (v_2^i)' - v_2^i \frac{1}{p} (v_1^i)' \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = -v_1^i(x_{i+1}) + v_2^i(x_{i-1}). \end{aligned}$$

3) Напишем формулу Грина на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v_1^i L v_2^i - v_2^i L v_1^i) dx = \left( v_1^i \frac{1}{p} (v_2^i)' - v_2^i \frac{1}{p} (v_1^i)' \right) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= \frac{1}{p_i} (v_2^i)'(x_i) v_1^i(x_i) - \frac{1}{p_i} (v_1^i)'(x_i) v_2^i(x_i) + v_2^i(x_{i-1}), \end{aligned}$$

и подставим сюда

$$\frac{1}{p_i} (v_1^i)'(x_i) = 1 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) v_1^i(x) dx,$$

$$\frac{1}{p_i} (v_2^i)'(x_i) = -1 - \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) v_2^i(x) dx.$$

4) Учитывая, что  $v_1^{i+1}(x)$  удовлетворяет условиям

$$L^{(p, q)} v_1^{i+1} = 0, \quad x_i < x < x_{i+2}, \quad v_1^{i+1}(x_i) = 0, \quad \left. \frac{1}{p} \frac{dv_1^{i+1}}{dx} \right|_{x=x_i} = 1,$$

получаем

$$0 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v_1^{i+1} L v_2^i - v_2^i L v_1^i) dx =$$

$$= \left[ v_1^{i+1} \frac{1}{p} (v_2^i)' - v_2^i \frac{1}{p} (v_1^{i+1})' \right] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = -v_1^{i+1}(x_{i+1}) + v_2^i(x_i).$$

Функцию  $v_3^i(x)$  можно представить в виде

$$v_3^i(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad (107)$$

где  $G(x, \xi)$  — функция Грина задачи (100) (см. (37)), равная

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{v_1^i(\xi) v_2^i(x)}{v_1^i(x_{i+1})}, & x_{i-1} < \xi \leq x, \\ \frac{v_1^i(x) v_2^i(\xi)}{v_1^i(x_{i+1})}, & x \leq \xi < x_{i+1}. \end{cases} \quad (108)$$

Подставим выражение для  $G$  в (107) и положим  $x = x_i$ :

$$v_3^i(x_i) = \frac{1}{v_1^i(x_{i+1})} \left[ v_2^i(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) f(\xi) d\xi + v_1^i(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) f(\xi) d\xi \right]. \quad (109)$$

Используя (103), (105) и (109), из (99) получим:

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{v_2^i(x_i)} - \frac{u_i - u_{i-1}}{v_1^i(x_i)} \right] - d_i u_i = -\Phi_i, \quad (110)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_i &= \frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) q(\xi) d\xi + \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) q(\xi) d\xi, \\ \varphi_i &= \frac{1}{hv_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{hv_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Введем теперь в точке  $x = x_i$  местную систему координат, полагая  $x = x_i + sh$ ,  $s = (x - x_i)/h$ . Тогда отрезок  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  преобразуется в отрезок (шаблон)  $-1 \leq s \leq 1$ , точке  $s = 0$  будет соответствовать узел  $x = x_i$ . Положим  $v_1^i(x) = v_1^i(x_i + sh) = h\alpha^i(s, h)$ ,  $v_2^i(x) = v_2^i(x_i + sh) = h\beta^i(s, h)$ ,  $-1 \leq s \leq 1$ ,  $v_1^i(x_i) = ha_i$  и, в силу (106),  $v_2^i(x_i) = ha_{i+1}$ . Шаблоновые функции  $\alpha^i(s, h)$  и  $\beta^i(s, h)$ , очевидно, удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}\alpha &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\bar{p}(s)} \frac{d\alpha}{ds} \right) - h^2 \bar{q}(s) \alpha = 0, \quad -1 < s < 1, \\ \alpha(-1, h) &= 0, \quad \alpha'(-1, h) = \bar{p}(-1), \\ \bar{L}\beta &= 0, \quad -1 < s < 1, \quad \beta(1, h) = 0, \quad \beta'(1, h) = -\bar{p}(1), \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

где  $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$ ,  $\bar{q}(s) = q(x_i + sh)$ , и зависят только от значений  $\bar{q}(s)$ ,  $\bar{p}(s)$  ( $p(x)$ ,  $q(x)$ ) на отрезке  $-1 \leq s \leq 1$  (на отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$ ). Опуская в (110) индекс  $i$ , получаем для  $y(x) = u(x)$ ,  $x \in \omega_h$ , однородную консервативную схему

$$\left( \frac{1}{a} y_x \right)_x - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2, \quad (113)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= \alpha(0, h) = A[p(x + sh), q(x + sh)], \\ d(x) &= \frac{1}{a(x)} \int_{-1}^0 \alpha(s, h) q(x + sh) ds + \frac{1}{a(x+h)} \int_0^1 \beta(s, h) q(x + sh) ds, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{a(x)} \int_{-1}^0 \alpha(s, h) f(x + sh) ds + \frac{1}{a(x+h)} \int_0^1 \beta(s, h) f(x + sh) ds. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Коэффициенты  $d(x)$ ,  $\varphi(x)$  вычисляются по одной и той же формуле

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= F[p(x + sh), q(x + sh); f(x + sh)], \\ d(x) &= F[p(x + sh), q(x + sh); q(x + sh)]. \end{aligned}$$



Шаблонные функционалы заданы в классе кусочно-непрерывных функций:  $A[\bar{p}(s), \bar{q}(s)]$  задан для  $\bar{p}(s), \bar{q}(s) \in Q^{(0)}[-1, 0]$ ,  $F[\bar{p}(s), \bar{q}(s); \bar{f}(s)]$  — для  $\bar{p}(s), \bar{q}(s), \bar{f}(s) \in Q^{(0)}[-1, 1]$ .

Из (113), (114) видно, что точная схема не принадлежит семейству схем (25), (26), у которых шаблонные функционалы  $A[\bar{p}(s)]$  и  $F[\bar{f}(s)]$  зависят только от одной функции.

В случае уравнения (97) с постоянными коэффициентами  $p(x) = p_0 = \text{const}$  и  $q(x) = q_0 = \text{const}$  шаблонные функции  $\alpha(s, h)$ ,  $\beta(s, h)$  находятся в явном виде

$$\alpha(s, h) = \frac{\text{sh}(\kappa(1+s)h)}{\kappa h}, \quad \beta(s, h) = \frac{\text{sh}(\kappa(1-s)h)}{\kappa h}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{q_0}{k_0}}.$$

Для коэффициентов  $a(x)$  и  $d(x)$  получаем постоянные значения

$$a(x) = \frac{\text{sh}(\kappa h)}{\kappa h}, \quad d(x) = \frac{2q_0}{h} \text{th} \frac{\kappa h}{2}.$$

Из (112) видно, что  $\alpha(s, h)$  и  $\beta(s, h)$  являются аналитическими функциями параметра  $h^2$  и поэтому разлагаются в ряды

$$\alpha(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \beta(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s) h^{2k}, \quad (115)$$

где  $\alpha_k(s)$  и  $\beta_k(s)$  определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(t) \left[ 1 + \left( \int_{-1}^t \alpha_{k-1}(\lambda) \bar{q}(\lambda) d\lambda \right) \right] dt, \quad k > 0,$$

$$\alpha_0(s) = \int_{-1}^s \bar{p}(t) dt,$$

$$\beta_k(s) = \int_s^1 \bar{p}(t) \left[ 1 + \left( \int_t^1 \beta_{k-1}(\lambda) \bar{q}(\lambda) d\lambda \right) \right] dt, \quad k > 0,$$

$$\beta_0(s) = \int_s^1 \bar{p}(t) dt.$$

Если в (115) взять конечное число членов:

$$\alpha^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^m \alpha_k(s) h^{2k}, \quad \beta^{(m)}(s, h) = \sum_{k=0}^m \beta_k(s) h^{2k}$$

и вычислить по формулам (114) коэффициенты  $\alpha^{(m)}$ ,  $d^{(m)}$ ,  $\varphi^{(m)}$ , заменяя в этих формулах  $\alpha$  и  $\beta$  полиномами  $\alpha^{(m)}$  и  $\beta^{(m)}$ , то мы получим схему (называемую *усеченной схемой ранга  $m$* ), которая имеет точность  $O(h^{2m+2})$  в классе кусочно-непрерывных функций  $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}[0, 1]$ .

При  $m = 0$  получаем схему нулевого ранга. Она имеет точность  $O(h^2)$  для  $k, q, f \in Q^{(0)}$  и отличается от наилучшей схемы (23), (24) выражениями для  $d$  и  $\varphi$ :

$$a^{(0)} = \frac{1}{a} = \int_{-1}^0 p(x+sh) ds, \quad p = \frac{1}{k},$$

$$d^{(0)} = \overset{\circ}{d} + (hd_*)_x, \quad \varphi^{(0)} = \overset{\circ}{\varphi} + (h\varphi_*)_x,$$

$$d_* = \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \int_{-0,5}^s q(x+th) dt, \quad \varphi_* = \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \int_{-0,5}^s f(x+th) dt.$$

Усеченные схемы замечательны тем, что они позволяют получить любой порядок точности для произвольных кусочно-непрерывных функций.

Точная схема и усеченные схемы могут быть получены (теми же методами) на произвольной неравномерной сетке  $\hat{\omega}_h$  (см. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский [4]) \*).

Практическое использование усеченных схем в случае переменных коэффициентов уравнения (1) требует вычисления многократных интегралов на каждом интервале сетки. Заменяя эти интегралы конечными суммами, можно получить весьма простые схемы  $O(h^4)$  и  $O(h^6)$ , коэффициенты которых выражаются через значения  $k, q$  и  $f$  в отдельных точках на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Эти схемы сохраняют свой порядок точности и в случае разрывных  $k, q, f$  на сетках  $\hat{\omega}_h(K)$ , когда точки разрыва являются узлами сетки  $\hat{\omega}_h(K)$ .

Точную и усеченную схемы можно использовать в качестве эталонных схем для исследования точности схем (25), (26). Это позволяет снизить требования гладкости  $k, q, f$ , которые использовались при оценке порядка точности схем (25), (26).

В работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [5] получены точные и усеченные разностные краевые условия третьего рода.

**15. Монотонные схемы для уравнения общего вида.** Рассмотрим краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} Lu &= (ku')' + r(x)u' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u_1, \quad u(1) = u_2, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \quad |r(x)| \leq c_2, \quad q \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Напишем для нее разностную схему второго порядка аппроксимации, для которой справедлив принцип максимума при любом

\*) Отметим, что в [4], несмотря на вкравшиеся опечатки — в уравнениях (3), (28), (35) коэффициент  $a$  надо заменить на  $1/a$  — все теоремы верны.

шаге  $h$ . Это значит (см. гл. I, § 2), что схема может быть записана в виде

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (117)$$

где

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i - A_i - B_i = D_i \geq 0.$$

Такие схемы называют *монотонными*. Это название объясняется тем, что решение задачи (117) при  $D_i = 0, F_i = 0, A_i > 0, B_i > 0$  является монотонной функцией на всем отрезке  $0 < x < 1$ , т. е. либо  $y_i \leq y_{i+1}$ , либо  $y_i \geq y_{i+1}$  для всех  $i = 0, 1, \dots, N-1, N$ .

Оператор  $Lu = (ku')' - qu$  заменим, как обычно, однородной трехточечной схемой

$$\Delta y = (ay_x)_x - dy$$

второго порядка аппроксимации.

Естественная замена первой производной  $u'(x)$  центральной разностной производной  $u_x$  дает схему второго порядка аппроксимации. Эта схема монотонна лишь при достаточно малых шагах сетки. Формулы прогонки применимы при достаточно малом  $h$ , когда  $h|r(x)| < 2k(x)$ . Если воспользоваться односторонними разностными производными (правой  $u_x$  при  $r > 0$  и левой  $u_{\bar{x}}$  при  $r < 0$ ) для аппроксимации  $u'$ , то получим монотонную схему, для которой справедлив принцип максимума при любых  $h$ . Однако она имеет первый порядок аппроксимации.

Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные, учитывающие знак  $r(x)$ . Покажем, что для этого достаточно написать монотонную схему с односторонними первыми разностными производными для уравнения с возмущенными коэффициентами

$$\tilde{L}u = -f, \quad \tilde{L}u = \kappa(ku')' + ru' - qu, \quad (118)$$

где  $\kappa = 1/(1+R)$ ,  $R = 0,5h|r|/k$  — «разностное число Рейнольдса».

Представим  $r(x)$  в виде суммы

$$r = r^+ + r^-, \quad r^+ = 0,5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0,5(r - |r|) \leq 0,$$

и аппроксимируем  $ru'$  выражением

$$(ru')_i = \left(\frac{r}{k}(ku')\right)_i \sim b_i^+ a_{i+1} u_{x,i} + b_i^- a_i u_{\bar{x},i},$$

где  $b_i^\pm = F[\tilde{r}^\pm(x_i + sh)]$ ,  $\tilde{r}^\pm = r^\pm/k$ , а  $F$  — шаблонный функционал, используемый для вычисления коэффициентов  $d$  и  $\varphi$ . В результате мы получаем однородную схему

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L}y &= \kappa (ay_x)_x + b^+ a^{(+1)} y_x + b^- ay_{\bar{x}} - dy = -\varphi, \\ y_0 &= u_1, \quad y_N = u_2; \quad a^{(+1)} = a(x+h), \quad a \geq c_1 > 0, \\ \kappa &= 1/(1+R), \quad R = 0,5|r|h/k. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Покажем, что схема (119) монотонна. Для этого запишем ее в виде

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = \Phi_i, \quad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2, \quad (120)$$

где

$$A_i = \frac{a_i}{h^2} (\kappa_i - hb_i^-), \quad B_i = \frac{a_{i+1}}{h^2} (\kappa_i + hb_i^+),$$

$$C_i = A_i + B_i + d_i.$$

Отсюда видно, что  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$  и  $D_i \geq 0$ , так как  $b_i^- \leq 0$ ,  $b_i^+ \geq 0$ ,  $d_i \geq 0$ .

Уравнения (120) разрешимы методом прогонки при любых  $h$  и  $r$ .

Погрешность аппроксимации схемы (119)

$$\psi = \kappa (au_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} u_x + b^- au_{\bar{x}} - du + \Phi - (Lu + f)$$

представим в виде суммы  $\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}$ ,

$$\psi^{(1)} = [(au_{\bar{x}})_x - du + \Phi] - [(ku')' - qu + f],$$

$$\psi^{(2)} = [(\kappa - 1)(au_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} u_x + b^- au_{\bar{x}}] - ru'.$$

Для  $\psi^{(1)}$  имеем оценку

$$\psi^{(1)} = O(h^2) \quad \text{при} \quad k \in C^{(3)}, \quad q, f \in C^{(2)}.$$

Учитывая, что

$$b^+ = \bar{r}^+ + O(h^2), \quad b^- = \bar{r}^- + O(h^2),$$

$$k\bar{r}^\pm = r^\pm, \quad r^+ + r^- = r, \quad r^+ - r^- = |r|,$$

$$au_{\bar{x}} = ku' - 0,5h(ku')' + O(h^2),$$

$$a^{(+1)} u_x = ku' + 0,5h(ku')' + O(h^2),$$

$$(au_{\bar{x}})_x = (ku')' + O(h^2),$$

получаем

$$b^+ a^{(+1)} u_x + b^- au_{\bar{x}} = ru' + 0,5h(ku')' \frac{|r|}{k} + O(h^2),$$

$$\psi^{(2)} = -\frac{R}{1+R} (ku')' + R(ku')' + O(h^2) =$$

$$= \frac{R^2}{1+R} (ku')' + O(h^2) = O(h^2),$$

так как  $R = 0,5h|r|/k = O(h)$ .

Таким образом, монотонная схема (119) имеет второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(h^2). \quad (121)$$

Если  $q \geq c_1 > 0$ , то для решения задачи (119) при  $y_0 = y_N = 0$  принцип максимума дает оценку

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_C,$$

из которой, в силу (121), следует равномерная сходимость схемы (119) со скоростью  $O(h^2)$ .

Монотонной схемой (119) целесообразно пользоваться в тех случаях, когда  $r(x)$  является быстроменяющейся функцией  $x$  и в отдельных точках возможно нарушение условия  $R < 1$  (что не сказывается существенно на точности схемы).

Не представляет труда написать монотонную схему на неравномерных сетках. Методом, изложенным в предыдущем пункте, можно построить точную схему и схемы любого порядка точности. Они будут монотонными схемами вида (119).

**16. Третья краевая задача.** Построим однородную разностную схему для краевой задачи третьего рода:

$$\left. \begin{aligned} Lu = (ku')' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad k(x) \geq c_1 > 0, \\ q \geq 0, \quad k(0)u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1, \quad -k(1)u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, \\ \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Уравнение (122) аппроксимируем обычным образом

$$\Delta y = -\varphi(x), \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \quad (123)$$

где  $a, d, \varphi$  удовлетворяют условиям аппроксимации (5).

Рассмотрим сначала простейшую аппроксимацию краевого условия при  $x = 0$ :  $a_1 y_{\bar{x},1} = \beta_1 y_0 - \mu_1$  и вычислим погрешность аппроксимации, подставив в это условие  $y = z + u$ :

$$a_1 z_{\bar{x},1} = \beta_1 z_0 - \nu_1, \quad \nu_1 = a_1 u_{\bar{x},1} - \beta_1 u_0 + \mu_1.$$

Учитывая, что

$$a_1 = k_0 + 0,5hk'_0 + O(h^2), \quad u_{\bar{x},1} = u'_0 + 0,5hu''_0 + O(h^2),$$

получаем

$$\nu_1 = (k_0 u'_0 - \beta_1 u_0 + \mu_1) + 0,5h(ku')'_0 + O(h^2) = 0,5h(ku')'_0 + O(h^2).$$

Подставим сюда из уравнения (122)  $(ku')'_0 = q_0 u_0 - f_0$ :

$$\nu_1 = 0,5h(q_0 u_0 - f_0) + O(h^2).$$

Отсюда видно, что краевое условие

$$a_1 y_{\bar{x},1} = \beta_1 y_0 - \bar{\mu}_1, \quad \beta_1 = \beta_1 + 0,5hq_0, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 - 0,5hf_0 \quad (124)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении  $u(x)$  задачи (122). Аналогично получается разностное краевое условие второго порядка аппроксимации при  $x = 1$ :

$$-a_N y_{\bar{x},N} = \beta_2 y_N - \bar{\mu}_2, \quad \beta_2 = \beta_2 + 0,5hq_N, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 + 0,5hf_N. \quad (125)$$

Таким образом, исходной задаче (122) ставится в соответствие разностная краевая задача третьего рода (123)—(125), имеющая второй порядок аппроксимации на решении исходной задачи.

**17. Коэффициентная устойчивость разностных схем.** При решении задачи для дифференциального уравнения может оказаться, что коэффициенты уравнения заданы не точно, а приближенно (находятся при помощи некоторого вычислительного алгоритма, в результате физических измерений и т. п.). Коэффициенты однородной разностной схемы являются функционалами от коэффициентов дифференциального уравнения. Погрешность в определении коэффициентов схемы может быть вызвана несколькими причинами: погрешностью в вычислении шаблонных функционалов, погрешностью в задании коэффициентов дифференциального уравнения, ошибками округления.

Будем называть схему *коэффициентно-устойчивой* (ко-устойчивой), если при малом возмущении коэффициентов схемы решение краевой задачи меняется также мало,

Пусть задана схема с коэффициентами  $a, d, \varphi$ :

$$\Delta y = (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2. \quad (126)$$

Рассмотрим эту же схему с возмущенными коэффициентами  $\tilde{a}, \tilde{d}, \tilde{\varphi}$  (для упрощения считаем граничные значения  $u_1$  и  $u_2$  невозмущенными):

$$\tilde{\Delta} \tilde{y} = (\tilde{a}\tilde{y}_{\bar{x}})_x - \tilde{d}\tilde{y} = -\tilde{\varphi}, \quad 0 < x = ih < 1, \quad \tilde{y}(0) = u_1, \quad \tilde{y}(1) = u_2. \quad (127)$$

Будем предполагать, что выполнены условия

$$a(x) \geq c_1 > 0, \quad \tilde{a}(x) \geq c_1 > 0, \quad d(x) \geq 0, \quad \tilde{d}(x) \geq 0, \quad c_1 = \text{const} > 0, \quad (128)$$

$c_1$  не зависит от сетки.

Оценим разность  $z = \tilde{y} - y$  через величины возмущения коэффициентов. Подставляя  $\tilde{y} = z + y$  в (127) и учитывая (126), получаем

$$\tilde{\Delta} z = (\tilde{a}z_{\bar{x}})_x - \tilde{d}z = -\Psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad (129)$$

где

$$\Psi = \tilde{\varphi} - \varphi + (\tilde{\Lambda} - \Lambda)y = \tilde{\varphi} - \varphi + ((\tilde{a} - a)y_{\bar{x}})_x - (\tilde{d} - d)y. \quad (130)$$

Решение задачи (129) представим в виде

$$z(x) = (\tilde{G}(x, \xi), \Psi(\xi)), \quad (131)$$

где  $\tilde{G}(x, \xi)$  — функция Грина разностного оператора  $\tilde{\Lambda}$  (см. п. 8):

$$0 \leq \tilde{G}(x, \xi) \leq \frac{1}{c_1}, \quad |\tilde{G}_{\bar{x}}| \leq \frac{2}{c_1}, \quad |\tilde{G}_{\xi}| \leq \frac{2}{c_1}. \quad (132)$$

Подставим в (131) выражение для  $\Psi$  из (130) и преобразуем каждое слагаемое в отдельности. Полагая  $\tilde{\varphi} - \varphi = S_x$ ,  $S_N = 0$ ,  $S_i = - \sum_{k=i}^{N-1} h(\tilde{\varphi}_k - \varphi_k)$ , получаем

$$(\tilde{G}(x, \xi), \varphi - \tilde{\varphi}) = (\tilde{G}, S_\xi) = -(\tilde{G}_\xi, S].$$

Отсюда и из (132) следует оценка

$$|(\tilde{G}, \varphi - \tilde{\varphi})| \leq \frac{2}{c_1} (1, |S|) = \frac{2}{c_1} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{(-1)}, \quad (133)$$

где, как и раньше,

$$\|\mu\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=i}^{N-1} h\mu_k \right|.$$

Пусть  $G(x, \xi)$  — функция Грина для задачи (126). Тогда

$$y(x) = (G(x, \xi), \varphi(\xi)), \quad \|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_{(1)},$$

$$y_{\bar{x}} = (G_{\bar{x}}(x, \xi), \varphi(\xi)), \quad \|y_{\bar{x}}\|_C \leq \frac{2}{c_1} \|\varphi\|_{(1)}.$$

Здесь  $\|\varphi\|_{(1)} = (1, |\varphi|)$ . Введем также обозначение

$$\|a - \tilde{a}\|_{(1)} = (1, |a - \tilde{a}|).$$

Из двух последних неравенств и (132) получаем

$$|(\tilde{G}(x, \xi), ((a - \tilde{a})y_\xi)_\xi)| = |(\tilde{G}_\xi, (a - \tilde{a})y_\xi)| \leq \frac{4}{c_1^2} \|\varphi\|_{(1)} \|a - \tilde{a}\|_{(1)}. \quad (134)$$

Полагая, наконец,  $d - \tilde{d} = S_x$ ,  $S_N = 0$ , преобразуем выражение

$$(\tilde{G}, (d - \tilde{d})y) = (\tilde{G}y, S_\xi) = -((\tilde{G}y)_\xi, S] = -(\tilde{G}y_\xi + y(\xi - h)\tilde{G}_\xi, S].$$

Отсюда и из предыдущих оценок имеем

$$|(\tilde{G}, (d - \tilde{d})y)| \leq \frac{4}{c_1^2} \|\varphi\|_{(1)} \|d - \tilde{d}\|_{(-1)}. \quad (135)$$

Из оценок (133) — (135) следует

**Теорема 7.** Пусть  $y(x)$  и  $\tilde{y}(x)$  — решения задач (126), (127) и выполнено условие (128). Тогда имеет место оценка

$$\|y - \tilde{y}\|_C \leq \frac{2}{c_1} \left\{ \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{(-1)} + \frac{2}{c_1} \|\varphi\|_{(1)} (\|d - \tilde{d}\|_{(-1)} + \|a - \tilde{a}\|_{(1)}) \right\}, \quad (136)$$

выражающая коэффициентную устойчивость задачи (126).

Оценку (136) можно заменить более грубой

$$\|y - \tilde{y}\|_C \leq \frac{2}{c_1} \left\{ \|\Phi - \tilde{\Phi}\|_{(1)} + \frac{2}{c_1} \|\Phi\|_{(1)} (\|d - \tilde{d}\|_{(1)} + \|a - \tilde{a}\|_{(1)}) \right\}. \quad (137)$$

Если

$$\|a - \tilde{a}\|_{(1)} = \rho(h), \quad \|\Phi - \tilde{\Phi}\|_{(-1)} = \rho(h), \quad \|d - \tilde{d}\|_{(-1)} = \rho(h),$$

где  $\rho(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то схемы (126) и (127) ко-эквивалентны и при  $\rho(h) = O(h^m)$  имеют  $m$ -й порядок ко-эквивалентности. Если схемы (126) и (127) ко-эквивалентны и схема (126) сходится, то и схема (127) сходится. Это следует из неравенства

$$\|\tilde{y} - u\|_C \leq \|\tilde{y} - y\|_C + \|y - u\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Свойство ко-эквивалентности однородных схем (126) позволяет оценивать порядок точности данной конкретной схемы путем сравнения, согласно (136) или (137), ее коэффициентов  $a, d, \Phi$  с коэффициентами  $\tilde{a}, \tilde{d}, \tilde{\Phi}$  некоторой эталонной схемы, порядок точности которой известен.

Особенно удобно использовать в качестве эталонных схем усеченные схемы  $2m$ -го ранга и в частности схему нулевого ранга, имеющую второй порядок точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов:  $k, q, f \in Q^{(0)}[0, 1]$  (см. п. 14). Эта схема записывается в виде уравнения (126) с коэффициентами

$$\begin{aligned} \tilde{a} = \mathring{a} &= \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \right)^{-1}, \quad \tilde{\Phi} = \mathring{\Phi} + h(\Phi^*)_x, \quad \tilde{d} = \mathring{d} + h(d^*)_x, \\ \mathring{d} &= \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) ds, \quad \mathring{\Phi} = \int_{-0,5}^{0,5} f(x+sh) ds, \\ d^* &= \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \int_{-0,5}^s q(x+th) dt, \quad \Phi^* = \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x+sh)} \int_{-1}^s f(x+th) dt. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (136), получаем

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{y}\|_C \leq \frac{2}{c_1} \left\{ \|\Phi - \mathring{\Phi}\|_{(-1)} + \frac{2}{c_1} \|\Phi\|_{(1)} (\|d - \mathring{d}\|_{(-1)} + \|a - \mathring{a}\|_{(1)}) \right\} + \\ + \frac{2h}{c_1} \left\{ (1, |\Phi^*|) + |\Phi_N^*| + \frac{2}{c_1} \|\Phi\|_{(1)} ((1, |d^*|) + |d_N^*|) \right\}. \quad (138) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $d^*$  и  $\Phi^*$ , как нетрудно заметить, являются величинами  $O(h)$ :

$$d^* = O(h) \quad \text{при } q \in C^{(1)}[0, 1], \quad \Phi^* = O(h) \quad \text{при } f \in C^{(1)}[0, 1].$$



Если же  $k, q, f$  — кусочно-непрерывны и кусочно-дифференцируемы и точка  $\xi$  разрыва коэффициентов находится вне отрезка  $[1-h, 1]$ , то

$$(1, |d^*|) = O(h), \quad (1, |\varphi^*|) = O(h), \quad \varphi_N^* = O(h), \\ d_N^* = O(h).$$

Если  $1-h < \xi < 1$ , то незначительные изменения в предыдущих рассуждениях приводят к оценке (138), где  $|d_N^*|, |\varphi_N^*|$  следует заменить на  $|d_1^*|, |\varphi_1^*|$ , а норму  $\|\mu\|_{(-1)}$  выражением

$$\|\mu\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h \mu_k \right|.$$

Тогда  $|\varphi_1^*| = O(h), |d_1^*| = O(h)$ .

Таким образом, неравенство (138) принимает вид

$$\|y - \tilde{y}\|_C \leq \frac{2}{c_1} \left\{ \|\varphi - \overset{\circ}{\varphi}\|_{(-1)} + \frac{2}{c_1} \|\varphi\|_{(1)} (\|d - \overset{\circ}{d}\|_{(-1)} + \|a - \overset{\circ}{a}\|_{(1)}) \right\} + \\ + Mh^2, \quad M = \text{const.}$$

Отсюда следует, что наилучшая схема (23), (24) имеет второй порядок точности в классе коэффициентов  $k, q, f \in Q^{(1)}[0, 1]$ .

18. Однородные схемы для уравнения в цилиндрической и сферической системах координат. Рассмотрим уравнение более общего вида, чем (1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} \left( x^n k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u &= -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad n > 0, \\ 0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, \quad q(x) &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

К такому уравнению приводятся стационарные задачи диффузии с осевой симметрией ( $n = 1$ ) и с центральной симметрией ( $n = 2$ ).

При  $x = 0$  ставится условие ограниченности  $|u(0)| < \infty$  (см. Добавление II в книге А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [6]), которое эквивалентно условию

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n k(x) \frac{du}{dx} = 0. \quad (140)$$

При  $x = 1$  ставится обычное краевое условие, например,

$$u(1) = \mu_2. \quad (141)$$

Пусть  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  — линейно независимые решения уравнения (139) при  $n \geq 1$  и  $u_1(x)$  ограничено при  $x \in [0, 1]$ . Тогда справедливы свойства:

1) Если  $q(0)$  и  $f(0)$  конечны, то

$$u_1(0) \neq 0, \quad u_1'(0) = 0.$$

2) Если  $q(x), f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ ,  $k(x) \in C^{(3)}[0, 1]$ , то производные  $u_1', u_1'', u_1^{(3)}, u_1^{(4)}$  ограничены при  $0 \leq x \leq 1$ .

3) Второе, линейно независимое с  $u_1(x)$  решение  $u_2(x)$  уравнения (139) имеет при  $x = 0$  логарифмическую особенность.

Условия (140) и (141) выделяют единственное решение уравнения (139). В силу свойства 1) условие (140) можно заменить требованием

$$u'(0) = 0. \quad (142)$$

Разностную схему для уравнения (139) напомним так, чтобы при  $n = 0$  она формально переходила в схему (25):

$$L_h^{(k, q)} y = \Lambda y = \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n a(x) y_{\bar{x}}(x))_x - d(x) y = -\varphi(x), \quad (143)$$

$$0 < x = ih < 1,$$

где  $\bar{x} = x - 0,5h$  или  $\bar{x}_i = (i - 0,5)h$  и

$$a(x) = A[k(x + sh)], \quad -1 \leq s \leq 0,$$

$$d(x) = \frac{1}{x^n} F[(x + sh)^n q(x + sh)], \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^n} F[(x + sh)^n f(x + sh)], \quad \left. \vphantom{d(x)} \right\} \quad (144)$$

$A[\bar{k}(s)]$  и  $F[\bar{f}(s)]$  — шаблонные функционалы, рассмотренные в п. 7.

Краевое условие при  $x = 1$  имеет вид

$$y(1) = \mu_2. \quad (145)$$

Покажем, что разностное краевое условие

$$a(h) y_x(0) = \frac{h}{2(n+1)} (q(0) y(0) - f(0)) \quad (146)$$

аппроксимирует условие (140) с порядком  $h^2$  на решении уравнения (139), удовлетворяющем условию (140). В самом деле, погрешность аппроксимации условия (146), очевидно, равна

$$v = a(h) u_x(0) - \frac{h}{2(n+1)} (q(0) u(0) - f(0)).$$

Подставляя сюда  $a(h) = k(0) + 0,5hk'(0) + O(h^2)$ ,

$$u_x(0) = u'(0) + 0,5hu''(0) + O(h^2),$$

получаем

$$v = (ku')_0 + 0,5h(ku')'_0 - \frac{h}{2(n+1)} (q(0) u(0) - f(0)) + O(h^2). \quad (147)$$

Из уравнения (139) имеем:

$$(ku')' = qu - f - \frac{nk u'}{x}.$$

Так как  $ku' \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $\frac{ku'}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} (ku')'_0$  и

$$(ku')'_0 = (qu - f)_0 - n(ku')'_0 = \frac{1}{n+1}(qu - f)_0.$$

Отсюда и из формулы (147) следует, что

$$v = O(h^2).$$

Разностное краевое условие (146) будем записывать в виде

$$\frac{a_1 y_{x,0}}{h^*} - q_0 y_0 = -f_0, \quad h^* = \frac{h}{2(n+1)} = \begin{cases} h/4, & n=1, \\ h/6, & n=2. \end{cases} \quad (148)$$

Напишем условие для разности  $z = y - u$ , где  $y$  — решение задачи (143)–(146),  $u$  — решение задачи (139)–(141). Подставляя  $y = z + u$  в (143)–(146), получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= \frac{1}{x^n} (a\bar{x}^n z_{\bar{x}})_x - dz = -\psi(x), \quad 0 < x = ih < 1, \\ z(1) &= 0, \quad \frac{a_1 z_{x,0}}{h^*} - q_0 z_0 = -\frac{v}{h^*}, \quad h^* = \frac{h}{2(n+1)}, \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^n} (a\bar{x}^n u_{\bar{x}})_x - du + \varphi(x) \quad (150)$$

погрешность аппроксимации схемы в классе решений  $u = u(x)$  исходной задачи.

Напишем уравнение баланса для (139):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{hx_i^n} (\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}) - \frac{1}{hx_i^n} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) x^n dx + \\ &+ \frac{1}{hx_i^n} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) x^n dx, \quad \omega_i = x_i^n k(x_i) u'(x_i). \end{aligned} \quad (151)$$

Вычитая это тождество из (150), будем иметь:

$$\psi = \frac{1}{x^n} \eta_x + \psi^*, \quad (152)$$

$$\eta(x) = \bar{x}^n (au_{\bar{x}} - k(\bar{x}) u'(\bar{x})), \quad (153)$$

$$\psi_i^* = \left( \varphi_i - \frac{1}{hx_i^n} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) x^n dx \right) - \left( d_i u_i - \frac{1}{hx_i^n} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) x^n dx \right). \quad (154)$$

По условию, при  $n=0$  схема (143) принадлежит исходному семейству схем из п. 7, удовлетворяющих условиям второго порядка аппроксимации:

$$A[1] = 1, \quad A_1[s] = -0,5, \quad \text{так что} \quad a_i = k_{i-1/2} + O(h^2), \quad k \in C^{(2)},$$

$$F[1] = 1, \quad F[s] = 0, \quad \text{так что} \quad F[f(x_i + sh)] = f_i + O(h^2), \quad f \in C^{(2)}.$$

Найдем разложения  $\varphi$  и  $d$  по степеням  $h$ . Подставляя выражение

$$f(x_i + sh) = f(x_i) + hsf'(x_i) + 0,5h^2s^2\tilde{f}''', \quad -0,5 \leq s \leq 0,5,$$

где  $\tilde{f}''$  значение производной  $f''(x)$  в некоторой средней точке интервала  $(x_i - 0,5h, x_i + 0,5h)$ , в формулу для  $\varphi(x)$ , получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^n} F[(x+sh)^n f(x+sh)] = \frac{F[(x+sh)^n]}{x^n} f(x) +$$

$$+ \frac{hF[(x+sh)^n s]}{x^n} f'(x) + \frac{h^2}{2x^n} F[(x+sh)^n s^2\tilde{f}''']. \quad (155)$$

Вычислим коэффициенты при  $f(x)$  и  $f'(x)$ . При  $n=1$  имеем

$$\frac{1}{x} F[x+sh] = 1, \quad \frac{1}{x} F[sx+s^2h] = \frac{h}{x} F[s^2].$$

При  $n=2$  имеем

$$\frac{1}{x^2} F[(x+sh)^2] = 1 + \frac{h^2}{x^2} F[s^2],$$

$$\frac{1}{x^2} F[s(x+sh)^2] = \frac{2h}{x} F[s^2] + \frac{h^2}{x^2} F[s^3].$$

Так как  $F[\bar{f}(s)]$  — неотрицательный функционал, т. е.  $F[\bar{f}] \geq 0$  при  $\bar{f} \geq 0$ , то

$$\frac{1}{x^n} F[s^2(x+sh)^n \tilde{f}'''] \leq \frac{\|f''\|_C}{x^n} F[s^2(x+0,5h)^n] = \|f''\|_C \left(\frac{x+0,5h}{x}\right)^n F[s^2],$$

$$\frac{1}{x} F[s^2(x+sh)\tilde{f}'''] \leq \left(1 + \frac{h}{2x}\right) \|f''\|_C F[s^2] < \frac{3}{2} \|f''\|_C F[s^2],$$

$$\frac{1}{x^2} F[s^2(x+sh)^2\tilde{f}'''] \leq \left(1 + \frac{h}{x} + \frac{h^2}{4x^2}\right) \|f''\|_C F[s^2] < \frac{9}{4} \|f''\|_C F[s^2].$$

Отсюда и из (155) следует, что для  $\varphi(x)$  справедливы формулы

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{h^2}{x} F[s^2] f'(x) + O(h^2), \quad n=1, \quad (156)$$

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{h^2}{x^2} F[s^2]\right) f(x) +$$

$$+ \frac{h^2}{x} \left(2F[s^2] + \frac{h}{x} F[s^3]\right) f'(x) + O(h^2), \quad n=2. \quad (157)$$

Для наилучшей схемы

$$\overset{\circ}{F}[f(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} f(s) ds, \quad \overset{\circ}{F}[s^2] = \frac{1}{12}, \quad \overset{\circ}{F}[s^3] = 0,$$

и, следовательно

$$\overset{\circ}{\Phi}(x) = \frac{1}{hx^n} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} t^n f(t) dt = \left(1 + \frac{(n-1)h^2}{12x^2}\right) f(x) + \frac{nh^2}{12x} f'(x) + O(h^2), \quad n = 1, 2. \quad (158)$$

Аналогичные формулы получаются для  $d(x)$  и  $\overset{\circ}{d}(x)$ . Напишем теперь выражение для  $\psi^*$ :

$$\psi^* = \varphi - \left(1 + \frac{(n-1)h^2}{12x^2}\right) f(x) + \left[d - \left(1 + \frac{n-1}{12x^2} h^2\right) q(x)\right] u(x) - \frac{nh^2}{12x} (f - qu)' + O(h^2). \quad (159)$$

Из формулы (159) видно, что при  $F[s^2] = 1/12$

$$\psi^* = \frac{nh^2}{12x} (qu - f)' + O(h^2), \quad (160)$$

т. е.  $x\psi^*(x) = O(h^2)$  для  $n = 1, 2$ .

Простейшие формулы для  $\varphi(x)$  и  $d(x)$ , очевидно, имеют вид

$$\varphi(x) = f(x), \quad d(x) = q(x) \quad \text{при } n = 1, \quad (161)$$

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{h^2}{12x^2}\right) f(x), \quad d(x) = \left(1 + \frac{h^2}{12x^2}\right) q(x) \quad \text{при } n = 2. \quad (162)$$

В этом случае  $F[s^2] = 1/12$ .

В дальнейшем будем предполагать, что  $\varphi(x)$  и  $d(x)$  в нашей схеме определяются либо по этим формулам, либо по формулам (156) и (157) при условии, что  $F[s^2] = 1/12$ . Тогда погрешность аппроксимации в классе  $q, f \in C^{(2)}$  равна

$$\psi_i^* = \varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i - (d_i - \overset{\circ}{d}_i) u_i + \psi_i^{**} = O(h^2/x) \quad \text{при } n = 1, 2,$$

так как

$$\varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i = O(h^2/x_i) + O(h^2), \quad d_i - \overset{\circ}{d}_i = O(h^2/x) + O(h^2),$$

$$\psi_i^{**} = \frac{1}{hx_i^n} \int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} q(x) x^n (u(x) - u(x_i)) dx = \frac{nh^2}{12x_i} qu' + O(h^2),$$

В результате для  $\psi$  получаем формулу

$$\psi = \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n \bar{\eta})_x + \psi^*, \quad \bar{\eta}_i = (au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2}, \quad (163)$$

причем

$$\bar{\eta} = O(h^2), \quad x\psi^*(x) = O(h^2) \quad \text{при } k, q, f \in C^{(2)}. \quad (164)$$

Перейдем теперь к выводу априорной оценки для решения задачи (149) с правой частью (163).

Нам понадобится разностная функция Грина  $G(x, \xi)$ , которую определим как решение задачи (ср. с п. 8)

$$\begin{aligned} \Lambda_x G(x, \xi) &= -\frac{\delta(x, \xi)}{x^n h}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{1}{h^*} a_1 \bar{x}_1^n G_x(0, \xi) &= q_0 \bar{x}_1^n G(0, \xi) - \frac{\delta(x, \xi)}{h^*}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ G(1, \xi) &= 0, \quad \bar{x}_1 = 0,5h, \quad h^* = 0,5h/(n+1). \end{aligned}$$

Функция Грина  $G(x, \xi)$  выражается формулой

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha(x) \beta(\xi)}{\alpha(1)}, & x \leq \xi, \\ \frac{\alpha(\xi) \beta(x)}{\alpha(1)}, & x \geq \xi, \end{cases}$$

где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — решения задач Коши:

$$\begin{aligned} \Lambda \alpha &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad a_1 \alpha_{x,0} = h^* q_0 \alpha_0, \quad \alpha_0 = 1, \\ \Lambda \beta &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad (a \bar{x}^n \beta_{\bar{x}})_N = -1, \quad \beta_N = \beta(1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $\alpha(x)$  монотонно возрастает, а  $\beta(x)$  монотонно убывает.

Изучение свойств функции  $G(x, \xi)$  проводится по аналогии с п. 9: сначала устанавливаются оценки для функции  $G_0(x, \xi)$  (и  $G_{0\xi}(x, \xi)$ ), соответствующей случаю  $q(x) \equiv 0$ , а затем применяется аналог леммы 1, в силу которого

$$0 \leq G(x, \xi) \leq G_0(x, \xi), \quad |G_\xi(x, \xi)| \leq 2 \max_{x, \xi} |G_{0\xi}(x, \xi)|.$$

Если  $q(x) \equiv 0$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  находятся в явном виде

$$\alpha(x) \equiv 1, \quad \beta(x) = \sum_{t=x+h}^1 \frac{h}{a(t) \bar{t}^n}, \quad \bar{t} = t - 0,5h, \quad x \geq 0. \quad (165)$$

Отсюда следует, что

$$G_0(x, \xi) = \begin{cases} \beta(\xi), & x \leq \xi, \\ \beta(x), & x \geq \xi, \end{cases} \quad G_{0\xi}(x, \xi) = \begin{cases} \beta'_\xi(\xi), & x < \xi, \\ 0, & x \geq \xi. \end{cases} \quad (166)$$

Покажем, что справедливы следующие оценки

$$\xi G(x, \xi) \leq M_1, \quad \bar{\xi}^n |G_\xi(x, \xi)| \leq M_2, \quad (G(x, \xi), 1) \leq M_3, \quad (167)$$

где  $M_1, M_2, M_3$  — положительные постоянные, зависящие только от  $c_1$ .

Из сказанного выше следует, что достаточно установить эти оценки для функции  $G_0(x, \xi)$ . Рассмотрим сначала функцию

$$\beta(x) = \sum_{t=x+h}^1 \frac{h}{a(t) t^n} \leq \frac{1}{c_1} \sum_{t=x+h}^1 \frac{h}{t^n}.$$

Пользуясь известным неравенством

$$\sum_{x=a}^b f(x) < \int_{a-1}^b f(x) dx, \quad a > 1,$$

где  $f(x)$  — положительная убывающая функция,  $a$  и  $b$  — целые числа, суммирование ведется по целым  $x$ , получаем

$$\beta(x_i) \leq \frac{1}{c_1} \frac{h}{(x_i + 0,5h)^n} + \frac{1}{c_1 h^{n-1}} \int_{i+0,5}^N \frac{d\alpha}{\alpha^n},$$

$$\left. \begin{aligned} \beta(x_i) &< \frac{1}{c_1} \left( 2 + \ln \frac{1}{x_i + 0,5h} \right) \quad \text{при } n=1, \quad x_i \geq 0, \\ \beta(x_i) &< \frac{3}{c_1} \frac{1}{x_i + 0,5h} \quad \text{при } n=2, \quad x_i \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

так как  $1/(x_i + 0,5h) \leq 2/h$  при  $x_i \geq 0$ . Если  $x_i > 0$ , то  $\beta(x_i) < \frac{1}{c_1} \ln \frac{1}{x_i}$  при  $n=1$ ,  $\beta(x_i) < 1/(c_1 x_i)$  при  $n=2$  ( $x_i \geq h$ ).

Рассмотрим теперь выражение

$$\xi G(x, \xi) \leq \xi G_0(x, \xi) = \begin{cases} \xi \beta(\xi), & x \leq \xi, \\ \xi \beta(x), & x \geq \xi. \end{cases}$$

Так как  $\beta(x)$  монотонно убывающая функция, то  $\beta(x) \leq \beta(\xi)$  при  $x \geq \xi$  и, в силу (168), получим

$$\xi G_0(\xi) \leq \xi \beta(\xi) \leq M_1, \quad M_1 = 6/c_1, \quad n=1, 2.$$

Далее, из определения  $\beta(x)$  следует, что

$$|\beta_{\xi}(\xi)| = \left| -\frac{1}{a(\xi) \xi^n} \right| \leq \frac{1}{c_1 \xi^n},$$

т. е.

$$\bar{\xi}^n |\beta_{\xi}(\xi)| \leq 1/c_1.$$

Из формулы для  $G_{0\xi}(x, \xi)$  находим  $\bar{\xi}^n |G_{0\xi}| \leq \bar{\xi}^n |\beta_{\xi}(\xi)| \leq 1/c_1$ , т. е.  $M_2 = 2/c_1$ .

Оценим скалярное произведение  $(G(x, \xi), 1)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} (G(x, \xi), 1) &\leq (G_0(x, \xi), 1) = \sum_{\xi=h}^x h\beta(x) + \sum_{\xi=x+h}^{1-h} h\beta(\xi) = \\ &= x\beta(x) + \sum_{\xi=x+h}^{1-h} h\beta(\xi). \end{aligned}$$

Подставляя сюда оценки для  $\beta(x)$ , пользуясь неравенством (168), получаем

$$(G(x, \xi), 1) < 4/c_1 \quad \text{при } n = 1. \quad (169)$$

В самом деле,

$$(G_0(x, \xi), 1) \leq \frac{1}{c_1} \left( 2x + x \ln \frac{1}{x+0,5h} \right) + \frac{1}{c_1} \sum_{\xi=x+h}^{1-h} \left( 2 + \ln \frac{1}{\xi+0,5h} \right) h.$$

Функция  $t \ln \frac{1}{t}$  принимает при  $t = e^{-1}$  наибольшее значение, равное  $e^{-1}$ , а сумма оценивается так

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=x_i+h}^{1-h} h \ln \frac{1}{\xi+0,5h} &= h \sum_{j=i+1}^{N-1} \ln \frac{N}{j+0,5} < h \int_i^{N-1} \ln \frac{N}{\alpha+0,5} d\alpha < \\ &< h \int_{i+0,5}^N \ln \frac{N}{\alpha} d\alpha = h\alpha \ln \frac{eN}{\alpha} \Big|_{i+0,5}^N = 1 - (x+0,5h) \ln \frac{e}{x+0,5h} < 1, \end{aligned}$$

так как  $0 < (x+0,5h) \ln \frac{e}{x+0,5h} \leq 1$ . В результате получаем

$$(G_0(x, \xi), 1) < \frac{1}{c_1} \left\{ \left( 2x + \frac{1}{e} \right) + 2(1-x) + 1 \right\} = \frac{1}{c_1} \left( 3 + \frac{1}{e} \right) < \frac{4}{c_1}.$$

Решение задачи (149) при помощи функции Грина  $G(x, \xi)$  выражается формулой

$$z(x) = (G(x, \xi), \xi^n \psi(\xi)) + G(x, 0) \bar{x}_1^n v. \quad (170)$$

В этом можно убедиться непосредственно путем подстановки выражения (170) в уравнение (149).

Подставим в (170) выражение (163) для  $\psi$  и воспользуемся формулой суммирования по частям:

$$z(x) = - (G_{\xi}(x, \xi) \bar{\xi}^n, \bar{\eta}(\xi)) + (G(x, \xi), \bar{\xi}^n \psi^*(\xi)) + G(x, 0) \bar{x}_1^n v.$$

Учитывая (165)–(167), получим:

$$\|z\|_C \leq M_2(1, |\bar{\eta}|) + |v|/c_1 + M_3 \|\xi \psi^*(\xi)\|_C \quad \text{при } n = 1,$$

$$\|z\|_C \leq M_2(1, |\bar{\eta}|) + |v|/c_1 + M_1 \|\xi \psi^*(\xi)\|_C \quad \text{при } n = 2.$$



Выберем наибольшую из постоянных  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  и обозначим ее  $M_0$ . Тогда обе оценки можно объединить:

$$\|z\|_C \leq M_0((1, |\bar{\eta}|] + \|\xi\psi^*(\xi)\|_C + |\nu|). \quad (171)$$

Так как  $\bar{\eta}(\xi) = O(h^2)$ ,  $\xi\psi^*(\xi) = O(h^2)$ ,  $\nu = O(h^2)$  при  $k, q, f \in C^{(2)}$ , то схема (143) — (146) сходится со скоростью  $O(h^2)$  при  $n = 1, 2$ .

Пусть теперь  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  — разрывные функции. Выберем неравномерную сетку  $\hat{\omega}_h(K)$  так, чтобы точки разрыва функций  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  были узловыми точками сетки. Разностная схема для задачи (139) — (141) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n a y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - dy = -\varphi(x), \quad x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{a_1 y_{x,0}}{h_1/(2(n+1))} - q_0 y_0 = -f_0, \quad y_N = \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Коэффициент  $a_i = A[k(x_i + sh_i)]$ , а  $\varphi_i$  и  $d_i$  определяются по формуле

$$\begin{aligned} \varphi_i = \frac{h_i}{2\bar{h}_i} \left( 1 - \frac{nh_i}{4x_i} + \frac{n(n-1)h_i^2}{24x_i^2} \right) f_{i-0} + \\ + \frac{h_{i+1}}{2\bar{h}_i} \left( 1 + \frac{nh_{i+1}}{4x_i} + \frac{n(n-1)h_{i+1}^2}{24x_i^2} \right) f_{i+0}, \end{aligned} \quad (173)$$

где  $f_{i\pm 0} = f(x_i \pm 0)$ .

При  $n = 0$  отсюда следует известная формула (см. п. 13)

$$\varphi_i = \frac{h_i}{2\bar{h}_i} f_{i-0} + \frac{h_{i+1}}{2\bar{h}_i} f_{i+0}.$$

Изложенным выше методом можно получить априорную оценку для  $z = y - u$  через погрешность аппроксимации  $\psi = \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n \bar{\eta})_{\bar{x}} + \psi^*$ ; из этой оценки следует, что схема (172) — (173) имеет второй порядок точности на сетке  $\hat{\omega}_h(K)$  в классе разрывных коэффициентов  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}$ .

Рассмотрим схему второго типа — «схему на потоковой сетке». Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  частей, введя узлы (потоковые точки):

$$x_0 = 0, \quad \bar{x}_1 = 0,5h, \quad \bar{x}_2 = 1,5h, \dots, \quad \bar{x}_i = (i - 0,5)h, \dots$$

$$\dots, \quad \bar{x}_{N-1} = (N - 1,5)h, \quad \bar{x}_N = (N - 0,5)h = 1.$$

Пусть  $\bar{y}_i = y(\bar{x}_i)$  — значения искомой сеточной функции в этих узлах.

Для получения разностной схемы воспользуемся уравнением баланса для (139). Рассматривая уравнение баланса для интервала  $x_{i-1} = \bar{x}_{i-1/2} \leq x \leq \bar{x}_{i+1/2} = x_i$ ,  $i > 1$ , получаем

$$\frac{1}{\bar{x}^n} (x^n a \bar{y}_{\bar{x}})_x - d \bar{y} + \varphi(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} = \bar{x}_i, \quad 1 < i < N, \quad (174)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_i &= ih, \quad a(\bar{x}) = A[k(\bar{x} + sh)], \quad d(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}^n} F[\tilde{q}(\bar{x} + sh)], \\ \varphi(\bar{x}) &= \frac{1}{\bar{x}^n} F[\tilde{f}(\bar{x} + sh)], \quad \tilde{q}(x) = x^n q(x), \quad \tilde{f}(x) = x^n f(x). \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Из уравнения баланса для интервала  $0 \leq x \leq x_1 = h$

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\bar{x}_1^n h} + \frac{1}{h \bar{x}_1^n} \int_0^h (\tilde{f}(x) - q(x) u(x)) x^n dx = 0, \quad \omega(x) = x^n k(x) u'(x)$$

и условия  $\omega_0 = 0$  следует разностное уравнение при  $x = \bar{x}_1 = 0,5h$

$$\frac{x_1^n a_2 \bar{y}_{x,1}}{\bar{x}_1^n h} - d_1 \bar{y}_1 + \varphi_1 = 0, \quad (176)$$

где  $a_2$ ,  $d_1$ ,  $\varphi_1$  определяются по формулам (175).

При  $x = 1$  ставится обычное условие

$$\bar{y}_N = \mu_2. \quad (177)$$

В результате получаем разностное уравнение (174) с крайними условиями (176) и (177).

Пусть  $\bar{y} = y(\bar{x})$  — решение этой задачи. Для погрешности  $z = \bar{y} - u$  получим следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\bar{x}^n} (x^n a z_{\bar{x}})_x - dz + \psi(\bar{x}) &= 0, \quad \bar{x} = (i - 0,5)h, \\ i = 2, 3, \dots, N-1, \quad z_N &= 0, \\ \frac{x_1^n a_2 z_{x,1}}{\bar{x}_1^n h} - d_1 z_1 + \psi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

где  $\psi$  — погрешность аппроксимации, равная

$$\psi_i = \psi(\bar{x}_i) = \frac{1}{\bar{x}_i^n} (x^n a \bar{u}_{\bar{x}})_{x,i} - d_i u_i + \varphi_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$\psi_1 = \frac{x_1^n}{\bar{x}_1^n h} a_2 u_{x,1} - d_1 u_1 + \varphi_1.$$

Отсюда и из уравнения баланса для интервала  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  следует, что

$$\psi_i = \frac{1}{\bar{x}_i^n} (x^n \eta)_{x, i} + \psi_i^*,$$

$$\eta_i = a_i \bar{u}_{\bar{x}, i} - k_i u'_i, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \eta_1 = 0, \quad \bar{u}(x_i) = u_{i-1/2},$$

$$\psi_i^* = \varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i - (d_i - \overset{\circ}{d}_i) \bar{u}_i + \frac{1}{h \bar{x}_i^n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^n q(x) (u(x) - \bar{u}(x_i)) dx,$$

где

$$\overset{\circ}{\varphi}_i = \frac{1}{\bar{x}_i^n h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^n f(x) dx.$$

Полагая  $\varphi_i = f_i$ ,  $d_i = q_i$  при  $n=1$  и  $\varphi_i = \left(1 + \frac{h^2}{12 \bar{x}_i^2}\right) f_i$ ,  $d_i = \left(1 + \frac{h^2}{12 \bar{x}_i^2}\right) q_i$  при  $n=2$ , получаем для  $\psi_i$  следующую формулу:

$$\psi = \frac{1}{\bar{x}^n} (x^n \eta)_x + \psi^*, \quad (179)$$

где

$$\eta = O(h^2), \quad \bar{x} \psi^*(\bar{x}) = O(h^2) \quad \text{при } k, q, f \in C^{(2)}.$$

Вводя разностную функцию Грина при помощи условий

$$\frac{1}{\bar{x}^n} (x^n a G_{\bar{x}}(x, \xi))_x - d G(\bar{x}, \xi) = -\frac{\delta(\bar{x}, \xi)}{\bar{x}^n h}, \quad \bar{x} > 0,5h,$$

$$\frac{x_1^n a_2}{h \bar{x}_1^n} G_x(\bar{x}_1, \xi) - d_1 G(\bar{x}_1, \xi) = -\frac{\delta(\bar{x}, \xi)}{\bar{x}_1^n h}, \quad G(\bar{x}_N, \xi) = 0,$$

получим для  $z = \bar{y} - u$  следующее выражение:

$$z(x) = (G(x, \bar{\xi}), \bar{\xi}^n \psi(\bar{\xi})),$$

где

$$(y(\bar{\xi}), v(\bar{\xi})) = \sum_{i=1}^{N-1} y(\xi_{i-1/2}) v(\xi_{i-1/2}) h, \quad \xi_{i-1/2} = (i - 0,5)h.$$

Подставляя сюда выражение для  $\psi$ , находим:

$$z(x) = - (G_{\bar{\xi}}(x, \bar{\xi}) \bar{\xi}^n, \eta(\bar{\xi})) + (G(x, \bar{\xi}) \bar{\xi}^{n-1}, \bar{\xi} \psi^*(\bar{\xi})).$$

В силу ограниченности  $|G_{\bar{\xi}} \bar{\xi}^n|$  и  $(G(\bar{x}, \bar{\xi}) \bar{\xi}^{n-1}, 1)$  получаем

$$\|z\|_C \leq M_0 ((1, |\eta|) + \|\bar{\xi} \psi^*(\bar{\xi})\|_C).$$

Отсюда и из оценок (179) следует, что схема (174)–(177) имеет второй порядок точности, если  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in C^{(2)}$ .

**19. Задача с условиями периодичности.** Рассмотрим сначала простейшую задачу: найти на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  решение уравнения

$$u''(x) - q_0 u = -f(x), \quad q_0 = \text{const} > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (180)$$

удовлетворяющее условию периодичности с периодом 1:

$$u(x+1) = u(x) \quad \text{для любого } x \in (0, 1). \quad (181)$$

При этом предполагается, что  $f(x)$  периодическая функция  $f(x+1) = f(x)$ .

Условие (181) в любой точке  $x \in (0, 1)$  эквивалентно двум условиям сопряжения в одной точке  $x = 0$ :

$$u(0+0) = u(1-0), \quad u'(0+0) = u'(1-0). \quad (182)$$

Задача (180), (181) имеет единственное решение. Для ее решения, в силу принципа максимума, верна оценка

$$\|u\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{q_0}.$$

Пусть  $q_0 = 0$ . Тогда получим задачу

$$u'' = -f(x), \quad u(0+0) = u(1-0), \quad u'(0+0) = u'(1-0), \quad (183)$$

которая разрешима при условии

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \quad (184)$$

и имеет единственное решение  $u = u(x)$  при условии, что

$$\int_0^1 u(x) dx = 0. \quad (185)$$

В самом деле, общее решение уравнения  $u'' = -f(x)$  имеет вид  $u(x) = C_1 x + C_2 - \int_0^x \left( \int_0^t f(a) da \right) dt = C_1 x + C_2 - \int_0^x (x-t)f(t) dt$ ,

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Условия (182) дают

$$\int_0^1 f(t) dt = 0, \quad C_1 = \int_0^1 t f(t) dt,$$

т. е. условиями (182) функция  $u(x)$  определяется с точностью до постоянной  $C_2$ . Требуя, чтобы выполнялось условие (185), получаем  $C_2 = 0$ , т. е. выделяем единственное решение задачи.

Напишем разностную схему, аппроксимирующую задачу (180), (182). Возьмем на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  равномерную с шагом  $h = 1/N$  сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$$

и аппроксимируем уравнение (180) и условия сопряжения (182). Первое из условий (182) выполнено, если

$$y_0 = y_N. \quad (186)$$

В узлах  $x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1$  напишем трехточечное уравнение

$$y_{\bar{x}x} - q_0 y = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (187)$$

Рассмотрим теперь разностные производные

$$u_{\bar{x}, N} = u'(1-0) - 0,5hu''(1-0) + O(h^2),$$

$$u_{x, 0} = u'(0+0) + 0,5hu''(0+0) + O(h^2).$$

Подставляя сюда  $u'' = q_0 u - f$  из (180), получаем

$$u_{\bar{x}, N} + 0,5h(q_0 u(1) - f(1-0)) = u'(1-0) + O(h^2),$$

$$u_{x, 0} - 0,5h(q_0 u(0) - f(0+0)) = u'(0+0) + O(h^2).$$

Отсюда видно, что уравнение

$$y_{x, 0} - 0,5hq_0 y_0 + 0,5hf(0+0) = y_{\bar{x}, N} + 0,5hq_0 y_N - 0,5hf(1-0) \quad (188)$$

аппроксимирует второе условие сопряжения  $u'(0+0) = u'(1-0)$  с точностью до величины  $O(h^2)$ .

Полагая затем

$$y_{N+1} = y_1,$$

перепишем условие (188) в виде

$$y_{\bar{x}, N} - q_0 y_N = -\varphi_N, \quad \varphi_N = 0,5(f(1-0) + f(0+0)).$$

Таким образом, задаче (180), (182) мы ставим в соответствие следующую разностную схему:

$$y_{\bar{x}x} - q_0 y = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (189)$$

с условиями периодичности

$$y_0 = y_N, \quad y_1 = y_{N+1}. \quad (190)$$

Пусть теперь дано уравнение с переменными коэффициентами

$$(ku)' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (191)$$

причем  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  являются периодическими функциями

$$k(x+1) = k(x), \quad q(x+1) = q(x), \quad f(x+1) = f(x). \quad (192)$$

Будем предполагать, что

$$k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq c_1 > 0. \quad (193)$$

Требуется найти решение уравнения (191), удовлетворяющее условию периодичности

$$u(x+1) = u(x).$$

Это условие эквивалентно требованию

$$u(0+0) = u(1-0), \quad ku' |_{x=0+0} = ku' |_{x=1-0}. \quad (194)$$

Из принципа максимума следует, что задача (192) — (194) имеет единственное решение. Напишем сначала схему для  $0 < x = ih < 1$ :

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

полагая

$$y_0 = y_N.$$

Коэффициенты  $a$ ,  $d$ ,  $\varphi$  выбираются из условий второго порядка аппроксимации (см. п. 7).

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} (au_{\bar{x}})_i &= (ku')_{i-0} + 0,5h(f - qu)_{i-0} + O(h^2), \\ a_{i+1}u_{x,i} &= (ku')_{i+0} - 0,5h(f - qu)_{i+0} + O(h^2), \end{aligned}$$

можно аппроксимировать условие  $ku' |_{x=0+0} = ku' |_{x=1-0}$  со вторым порядком следующим соотношением:

$$\begin{aligned} a_1y_{x,0} - 0,5h(q(0)y_0 - f(0+0)) &= \\ &= a_Ny_{\bar{x},N} + 0,5h(q(1-0)y_N - f(1-0)). \end{aligned}$$

Требуя, чтобы выполнялись условия

$$y_{N+1} = y_1, \quad a_{N+1} = a_1,$$

перепишем это соотношение в виде

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad x = x_N = 1,$$

где

$$d = d_N = 0,5(q(0+0) + q(1-0)), \quad \varphi = \varphi_N = 0,5(f(0+0) + f(1-0)).$$

В результате получаем следующую периодическую разностную схему:

$$\left. \begin{aligned} (ay_{\bar{x}})_x - dy &= -\varphi(x), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ a \geq c_1 > 0, \quad d \geq c_1 > 0, \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

с условиями

$$y_0 = y_N, \quad y_1 = y_{N+1}, \quad a_1 = a_{N+1}. \quad (196)$$

Для определения  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  получаем следующую систему уравнений

$$a_i y_{i-1} - (a_i + a_{i+1} + d_i h^2) y_i + a_{i+1} y_{i+1} = -\varphi_i h^2, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

с условием периодичности

$$y_0 = y_N, \quad y_{N+1} = y_1.$$

Решение этой системы может быть найдено методом циклической прогонки (см. Дополнение, § 3).

Так как  $a \geq c_1 > 0$ ,  $d \geq c_1 > 0$ , то для задачи (195), (196) справедлив принцип максимума, в силу которого

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_C.$$

Это неравенство позволяет получить для погрешности  $z = y - u$  оценку

$$\|z\|_C = O(h),$$

так как  $\psi_i = O(h^2)$  при  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\psi_N = O(h)$ . Поэтому нужна более тонкая оценка, которую можно получить либо при помощи функции Грина, либо методом энергетических неравенств.

Введем скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Оператор  $Ay = -(ay_{\bar{x}})_{\bar{x}} + dy$  в классе функций  $H$ , заданных при  $x_i = ih$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  и удовлетворяющих условию  $y_{N+1} = y_1$ , является положительно определенным:

$$(Ay, y) = -((ay_{\bar{x}})_{\bar{x}}, y) + (d, y^2) = (a, (y_{\bar{x}})^2) + (d, y^2). \quad (197)$$

Умножим уравнение (195) скалярно на  $y$ :

$$(a, y_{\bar{x}}^2) + (d, y^2) = (\varphi, y). \quad (198)$$

Отсюда и из условий  $a > 0$ ,  $d > 0$  следует единственность решения задачи (195), (196). В самом деле, пусть существуют два решения  $y_{(1)}$  и  $y_{(2)}$ . Для их разности  $y = y_{(1)} - y_{(2)}$  получаем однородное уравнение (195) с  $\varphi = 0$  и тождество

$$0 = (a, y_{\bar{x}}^2) + (d, y^2).$$

Так как  $a > 0$  и  $d > 0$ , отсюда следует, что

$$y_{\bar{x}} \equiv 0, \quad y \equiv 0.$$

Преобразуем выражение  $(\varphi, y)$ . Для этого введем функцию  $\eta(x)$ , полагая

$$\eta_i = \sum_{k=i}^N h \varphi_k, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \eta_{N+1} = \eta_1,$$

так что

$$\varphi_i = \eta_{x, i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда сумма  $(\varphi, y]$  преобразуется к виду

$$(\varphi, y] = (y, \eta_x] = -(\eta, y_{\bar{x}}].$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, получаем

$$(\varphi, y] \leq \| \eta \| \| y_{\bar{x}} \| \leq \varepsilon \| y_{\bar{x}} \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \| \eta \|^2.$$

Подставим эту оценку в тождество (198):

$$(a, y_{\bar{x}}^2] + (d, y^2] \leq \frac{\varepsilon}{c_1} (a, y_{\bar{x}}^2] + \frac{1}{4\varepsilon} \| \eta \|^2$$

или, при  $\varepsilon < c_1$ ,

$$(a, y_{\bar{x}}^2] + \frac{1}{1 - \varepsilon/c_1} (d, y^2] \leq \frac{1}{4\varepsilon(1 - \varepsilon/c_1)} \| \eta \|^2.$$

Положим  $\varepsilon = 0,5c_1$ . Тогда коэффициент в правой части принимает наименьшее значение:

$$(a, y_{\bar{x}}^2] + 2(d, y^2] \leq \frac{1}{c_1} \| \eta \|^2. \quad (199)$$

Нам понадобится следующая

*Лемма 4. Для любой сеточной функции  $v(x)$ , заданной на сетке  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N\}$ , справедливо неравенство*

$$\| v \|_C^2 \leq \varepsilon_0 \| v_{\bar{x}} \|^2 + (1 + 1/\varepsilon_0) \| v \|^2, \quad (200)$$

где  $\varepsilon_0 > 0$  — любое число.

*Доказательство.* Так как

$$v_i^2 = v_{i-1}^2 + h(v^2)_{\bar{x}, i}, \quad (v^2)_{\bar{x}, i} = (v_i + v_{i-1})v_{\bar{x}, i},$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} v^2(x) &= v^2(\xi) + \sum_{t=\xi+h}^x (v^2(t))_t h = \\ &= v^2(\xi) + \sum_{t=\xi+h}^x h v(t) v_t(t) + \sum_{t=\xi}^{x-h} h v(t) v_t(t). \end{aligned}$$

Отсюда, на основании неравенства Коши — Буняковского, находим

$$v^2(x) \leq v^2(\xi) + 2 \| v \| \| v_t \].$$

Просуммируем это неравенство по  $\xi = h, 2h, \dots, 1$ :

$$v^2(x) \leq \| v \|^2 + 2 \| v \| \| v_t \| \leq \varepsilon_0 \| v_{\bar{x}} \|^2 + (1 + 1/\varepsilon_0) \| v \|^2.$$



Лемма доказана.

Учитывая, что  $a$  и  $d$  ограничены снизу постоянной  $c_1 > 0$ , из (199) получим

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\|y\|^2 \leq \frac{1}{c_1^2} \|\eta\|^2. \quad (201)$$

Положим в лемме 4 постоянную  $\varepsilon_0 = 1$ . Тогда из (200) и (201) найдем

$$\|y\|_C^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\|y\|^2 \leq \frac{1}{c_1^2} \|\eta\|^2.$$

Тем самым доказано, что для решения задачи (195), (196) справедлива априорная оценка

$$\|y\|_C \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_{(-2)}, \quad \|\varphi\|_{(-2)} = \left( \sum_{i=1}^N h \left( \sum_{k=i}^N h \varphi_k \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (202)$$

Для погрешности  $z = y - u$ , где  $u$  — решение исходной задачи (191) — (194),  $y$  — решение задачи (195), (196), получаем условия

$$\left. \begin{aligned} (az_{\bar{x}})_x - dz &= -\psi, \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ z_0 &= z_N, \quad z_1 = z_{N+1}, \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

где  $\psi = (au_{\bar{x}})_x - du + \varphi$  — погрешность аппроксимации, которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \eta_x + \psi^*, \quad \eta = au_{\bar{x}} - \overline{ku'}, \\ \eta &= O(h^2), \quad \psi^* = O(h^2) \quad \text{при } k, q, f \in C^{(2)}. \end{aligned}$$

Для  $z$ , согласно (202), справедлива оценка

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq \frac{1}{c_1} (\|\eta\| + \|\psi^*\|_{(-2)}).$$

Так как  $\eta = O(h^2)$  и  $\psi^* = O(h^2)$ , то тем самым доказано, что схема (195), (196) имеет второй порядок точности в классе  $k, q, f \in C^{(2)}$ .

**20. Разностная задача Штурма — Лиувилля. Постановка задачи и основные свойства.** Задача Штурма — Лиувилля или задача на собственные значения состоит в следующем: требуется найти такие значения параметра  $\lambda$  (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения (собственные функции) однородного уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + \lambda r(x)u &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Здесь  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x) \in Q^{(0)}$  — кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, \quad 0 < c_1 \leq r(x) \leq c_3, \quad 0 \leq q(x) \leq c_4, \quad (205)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — постоянные.

Если  $k(x)$  имеет разрыв первого рода в точке  $x = \xi$  ( $0 < \xi < 1$ ), то в этой точке должны выполняться условия сопряжения

$$[u] = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = 0, \quad [ku'] = 0 \quad \text{при } x = \xi. \quad (206)$$

Задача (204) — (206), как известно (см. Р. Курант и Д. Гильберт [1]), эквивалентна следующей вариационной задаче: на классе кусочно-гладких функций  $\varphi(x) \in Q^{(1)}$ , удовлетворяющих условиям

$$H[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2(x) r(x) dx = 1, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (207)$$

найти минимум функционала

$$D[\varphi] = \int_0^1 k(x) (\varphi'(x))^2 dx + \int_0^1 q(x) \varphi^2(x) dx. \quad (208)$$

Этот минимум определяет наименьшее собственное значение

$$\lambda_1 = \min D[\varphi] = D[u_1]$$

и достигается на первой собственной функции  $u_1$  (*принцип минимума*).

Остальные собственные значения  $\lambda_n$ ,  $n > 1$  находятся как минимум функционала (208) на классе кусочно-гладких функций сравнения  $\varphi(x) \in Q^{(1)}$ , удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} H[\varphi] = 1, \quad H[\varphi, u_m] = \int_0^1 \varphi(x) u_m(x) r(x) dx = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

где  $u_m(x)$  — собственная функция номера  $m$ . Этот минимум определяет  $n$ -е собственное значение

$$\lambda_n = \min D[\varphi] = D[u_n],$$

где  $u_n$  —  $n$ -я собственная функция.

Укажем некоторые известные свойства собственных функций и собственных значений (см. Р. Курант и Д. Гильберт [1]).

1. Задача Штурма — Лиувилля (204) — (206) для кусочно-непрерывных функций  $k$ ,  $q$ ,  $r$  имеет счетное множество собственных значений  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ , которым

соответствуют собственные функции  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ . При этом каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.

2. Собственные функции  $\{u_n(x)\}$  образуют ортонормированную (с весом  $r(x)$ ) систему.

3. Собственные значения  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , точнее

$$c_5 n^2 \leq \lambda_n \leq c_6 n^2, \quad c_5 > 0, \quad (210)$$

где  $c_5$  и  $c_6$  зависят только от  $c_1, c_2, c_3, c_4$  и не зависят от  $n$ .

4. Для собственных функций и их производных справедливы оценки

$$|u_n(x)| \leq c_7, \quad |u'_n(x)| \leq c'_8 \sqrt{\lambda_n} \leq c_8 n, \quad (211)$$

где  $c_7$  и  $c_8$  — положительные постоянные, не зависящие от  $n$ .

Для случая  $k, q, r \in C^{(2)}$  доказательство оценок (211) дано в книге Р. Куранта и Д. Гильберта [1].

Покажем, что оценки (211) имеют место и в случае кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых коэффициентов, точнее, при  $k, r \in Q^{(1)}, q \in Q^{(0)}$ .

Без ограничения общности можно считать, что  $k, q, r$  имеют разрывы первого рода в одной точке  $x = \xi$ ,  $0 < \xi < 1$ . В этой точке выполняются условия сопряжения (206).

Сделаем замену аргумента, положив

$$t = \int_0^x r(x) dx.$$

Тогда уравнение (204) при  $\lambda = \lambda_n$  примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \bar{k}(t) \frac{d\bar{u}}{dt} \right) - \bar{q}(t) \bar{u} + \lambda \bar{u} &= 0, \quad 0 < t < l, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}(l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

где  $\bar{k}(t) = k(x)r(x)$ ,  $\bar{q}(t) = (q(x))/r(x)$ ,  $\bar{u}(t) = u(x)$ ,  $l = \int_0^1 r(x) dx$ .

Умножим уравнение (212) на  $\bar{u}'(t)$  и проинтегрируем от 0 до  $t$ . Учитывая, что

$$(\bar{k}\bar{u}')' \bar{u}' = \frac{1}{2\bar{k}} [(\bar{k}\bar{u}')^2]', \quad \bar{u}\bar{u}' = 0,5(\bar{u}^2)',$$

и пользуясь условиями сопряжения, получаем после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \bar{k}(0)(\bar{u}'(0))^2 + \lambda \bar{u}^2(0) &= \bar{k}(t)(\bar{u}'(t))^2 + \lambda \bar{u}^2(t) - \\ &- 2 \int_0^t \bar{q}(t_1) \bar{u}(t_1) dt_1 - \int_0^t \bar{k}(\bar{u}')^2 \frac{\bar{k}'}{\bar{k}} dt_1. \end{aligned}$$

Проинтегрируем еще раз по  $t$  от 0 до  $l$  и учтем, что

$$\int_0^l \bar{u}^2(t) dt = 1, \quad \int_0^l \bar{k}(t) (\bar{u}'(t))^2 dt \leq \lambda_n.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^l dt \int_0^t \bar{q} \bar{u} \bar{u}' dt_1 \right| &\leq 2l \|\bar{q}\|_C \left[ \int_0^l \bar{u}^2(t) dt \int_0^l (\bar{u}'(t))^2 dt \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{2lc_3}{c_1} \sqrt{\lambda_n} = c_9 \sqrt{\lambda_n}, \\ \left| \int_0^l dt \int_0^t \bar{k} (\bar{u}')^2 \frac{k'}{\bar{k}} dt_1 \right| &\leq l \left\| \frac{k'}{\bar{k}} \right\|_C \lambda_n \leq c_{10} \lambda_n. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\bar{k}(0) (\bar{u}'(0))^2 + \lambda \bar{u}^2(0) \leq \bar{c}_{10} \lambda_n + c_9 \sqrt{\lambda_n}, \quad \bar{c}_{10} = 2 + c_{10}.$$

Отсюда и из предыдущих оценок следует:

$$\begin{aligned} \bar{k}(t) (\bar{u}'(t))^2 + \lambda_n \bar{u}_n^2(t) &\leq \bar{k}(0) (\bar{u}'(0))^2 + \lambda_n \bar{u}_n^2(0) + \\ &+ c_9 \sqrt{\lambda_n} + c_{10} \lambda_n \leq \bar{c}_9 \sqrt{\lambda_n} + \bar{c}_{10} \lambda_n, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^2(t) &\leq \bar{c}_9 + \frac{\bar{c}_{10}}{\sqrt{\lambda_n}} \leq c_7^2, \quad |\bar{u}_n(t)| = |u_n(x)| \leq c_7, \\ |\bar{u}'_n(t)| &= \frac{1}{r(x)} |u'_n(x)| \leq c_{11} \sqrt{\lambda_n}, \quad |u'_n(x)| \leq c'_8 \sqrt{\lambda_n}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В процессе доказательства мы использовали кусочную непрерывность и кусочную дифференцируемость  $\bar{k}(t) = k(x)r(x)$  по  $t$ , что имеет место, если  $k(x), r(x) \in Q^{(1)}[0, 1]$ .

Перейдем к постановке разностной задачи на собственные значения. Введем на отрезке  $[0, 1]$  равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}$$

и аппроксимируем задачу (204), (205) при помощи однородной разностной схемы

$$\Lambda y + \lambda^h \rho y = 0, \quad 0 < x = ih < 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (213)$$

где  $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - d(x)y$ .

Будем предполагать, что  $\Lambda$  — однородный разностный оператор второго порядка аппроксимации (см. п. 7), а коэффициент

$\rho(x)$  определяется по той же формуле, что и  $d(x)$ . Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$0 < c_1 \leq a \leq c_2, \quad 0 < c_1 \leq \rho(x) \leq c_3, \quad 0 \leq d(x) \leq c_4. \quad (214)$$

Таким образом, *разностная задача Штурма — Лиувилля* состоит в следующем: требуется найти такие значения параметра  $\lambda^h$  (*собственные значения*), которым соответствуют нетривиальные решения уравнения (213), а также найти эти нетривиальные решения (*собственные функции*).

Условия сопряжения, аналогичные условиям (206), в окрестности разрыва коэффициента  $k(x)$  отсутствуют, так как мы рассматриваем однородные схемы, не предусматривающие явного выделения точек разрыва коэффициентов (схемы сквозного счета).

Умножая (213) скалярно на  $y$  и учитывая формулу Грина (см. гл. I, § 2, п. 1), находим

$$\lambda^h = \frac{D_N[y]}{H_N[y]}, \quad (215)$$

где

$$D_N[y] = (a, (y_x)^2) + (d, y^2), \quad H_N[y] = (\rho, y^2), \quad (216)$$

а  $y$  — решение задачи (213).

Пользуясь формулой Грина, нетрудно убедиться также в том, что разностная краевая задача (213) эквивалентна следующей вариационной задаче: найти минимум функционала  $D_N[\varphi]$  в классе сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и удовлетворяющих условиям

$$H_N[\varphi] = 1, \quad \varphi_0 = \varphi_N = 0. \quad (217)$$

При этом число

$$\lambda_1^h = \min D_N[\varphi] = D_N[y_1]$$

есть наименьшее собственное значение, а  $y_1(x)$  — соответствующая собственная функция задачи (213) (принцип минимума).

Собственное значение  $\lambda_n^h$  номера  $n > 1$  находится как минимум функционала  $D_N[\varphi]$  в классе функций сравнения, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} H_N[\varphi] = 1, \quad H_N[\varphi, y_m] = (\rho\varphi, y_m) = 0, \\ m = 1, 2, \dots, n-1, \quad \varphi_0 = \varphi_N = 0. \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Здесь  $y_m$  — собственная функция номера  $m$ . При этом

$$\min D_N[\varphi] = D_N[y_n] = \lambda_n^h.$$

Разностная задача Штурма — Лиувилля (213) является чисто алгебраической задачей. Поэтому не представляет труда доказательство следующих утверждений.

1. Существует  $N - 1$  собственных значений

$$0 < \lambda_1^h < \lambda_2^h < \dots < \lambda_{N-1}^h,$$

которым соответствуют собственные функции

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_{N-1}(x).$$

Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.

2. Собственные функции  $\{y_n(x)\}$  образуют ортонормированную (с весом  $\rho$ ) систему:

$$H_N[y_n, y_m] = 0, \quad m \neq n, \quad H_N[y_n] = 1.$$

3. Справедливы оценки

$$M_1' n^2 \leq \lambda_n^h \leq M_2' n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (219)$$

где  $M_1'$  и  $M_2'$  — положительные постоянные, не зависящие от  $h$  и  $n$ .

4. Если  $k, q, r \in Q^{(0)}$ , то имеют место оценки

$$\|y_n\|_C \leq M_1 \sqrt{n}, \quad \|(y_n)_{\bar{x}}\|_C \leq M_2 n^{3/2}, \quad (220)$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|(y_{\bar{x}})\|_C = \max_{1 \leq i \leq N} |y_{\bar{x}_i}|,$$

$M_1$  и  $M_2$  — постоянные, не зависящие от  $h$  и  $n$ .

Докажем оценки (219) и (220).

Заметим, прежде всего, что для случая

$$d \equiv 0, \quad a \equiv 1, \quad \rho \equiv 1$$

собственные значения выписываются в явном виде:

$$\lambda_n^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi n h}{2} = \pi^2 n^2 f(\xi), \quad f(\xi) = \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}, \quad \xi = \frac{\pi n h}{2}.$$

Функция  $f(\xi)$  монотонно убывает при  $\xi \in [0, \pi/2]$ . Поэтому справедлива оценка

$$4/\pi^2 \leq f(\xi) < 1 \quad \text{при} \quad 0 < \xi < \pi/2$$

и, следовательно,

$$4n^2 < \lambda_n^h < \pi^2 n^2.$$

Далее, имеет место очевидное неравенство

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1(1, \varphi_{\bar{x}}^2)}{c_2(1, \varphi^2)} \leq \frac{D_N[\varphi]}{H_N[\varphi]} = \frac{(a, \varphi_{\bar{x}}^2) + (d, \varphi^2)}{(\rho, \varphi^2)} \leq \frac{c_2(1, \varphi_{\bar{x}}^2)}{c_1(1, \varphi^2)} + \frac{c_4}{c_2},$$

из которого следует

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1}{c_2} \lambda_n^h \leq \lambda_n^h \leq \frac{c_2}{c_1} \lambda_n^h + \frac{c_4}{c_1}.$$

Подставляя сюда полученную выше оценку для  $\lambda_n^h$ , приходим к неравенству (219).

Перейдем к доказательству оценки (220).

Пусть  $y = y_n$  — собственная функция,  $\lambda^h = \lambda_n^h$  — собственное значение задачи (213),  $x$  и  $x'$  — любые две точки сетки  $\omega_h$ . Рассмотрим два очевидных тождества

$$y^2(x) - y^2(x') = \sum_{s=x'+h}^{s=x} (y^2(s))_s h = \sum_{s=x'+h}^{s=x} [y(s) + y(s-h)] y_s(s) h, \quad (221)$$

$$\begin{aligned} (a(x) y_{\bar{x}}(x))^2 - (a(x') y_{\bar{x}}(x'))^2 &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} h [(a(s) y_s(s))^2]_s = \\ &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} (a(s) y_s(s))_s [a(s) y_s(s) + a(s+h) y_s(s)] h = \\ &= \sum_{s=x'}^{s=x-h} (d(s) - \lambda^h \rho(s)) [a(s) y_s(s) + a(s+h) y_s(s)] y(s) h. \quad (222) \end{aligned}$$

Из условия нормировки  $(\rho, y^2) = 1$  следует, что существует хотя бы одна точка  $x'$ , в которой  $\rho(x') y^2(x') \leq 1$  и, следовательно,  $y^2(x') \leq 1/c_1$ . Применяя для преобразования правой части (221) неравенство Коши — Буняковского и учитывая свойства (215) и (219), получим

$$y^2(x) \leq \frac{1}{c_1} + \frac{2}{c_1} (\rho, y^2)^{1/2} (a, (y_{\bar{x}})^2)^{1/2} \leq 1/c_1 + 2 \sqrt{\lambda_n^h}/c_1 \leq M_1^2 n.$$

Далее, из условия  $(a, (y_{\bar{x}})^2) \leq \lambda^h$  следует, что существует такая точка  $x'$ , в которой  $a(x') y_{\bar{x}}^2(x') \leq \lambda^h$  и, следовательно,  $(a(x') y_{\bar{x}}(x'))^2 \leq c_2 \lambda^h$ . Пользуясь затем неравенством Коши — Буняковского для преобразования правой части тождества (222) и учитывая (214), (215) и (219), будем иметь

$$y_{\bar{x}}^2(x) \leq \frac{c_2}{c_1^2} \lambda^h + 2 \sqrt{\frac{c_4}{c_1}} \frac{c_4}{c_1^2} (\lambda^h)^{1/2} + \frac{2c_2}{c_1^2} (\lambda^h)^{3/2} \leq M_2^2 n^3.$$

Тем самым, в силу произвольности  $x$ , доказаны неравенства (220).

Условие нормировки  $(\rho, y^2) = 1$  определяет собственную функцию с точностью до знака. Для однозначного определения собственной функции надо ввести дополнительное условие выбора знака. Для этого можно, например, потребовать, чтобы  $y_{x,0} > 0$ . Аналогичный выбор знака может быть проведен и для собственных функций  $u(x)$  исходной задачи (204). В дальнейшем изложении нормировка собственных функций наряду с условиями  $H_N[y] = 1$  и  $H_N[u] = 1$  будет включать и выбор знака указанным выше способом.

Сходимость при  $N \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow 0$ ) собственных значений и собственных функций разностной задачи (213) к собственным значениям и функциям исходной задачи (204) была доказана Курантом [1] для простейшей схемы:  $a(x) = k(x-h)$ ,  $d(x) = q(x)$ ,  $\rho(x) = r(x)$  в классе гладких коэффициентов.

Пользуясь методом Куранта, докажем сходимость схемы (213) в классе кусочно-дифференцируемых коэффициентов.

Рассмотрим сначала случай первого собственного значения ( $n = 1$ ).

Пусть  $\varphi(x)$  — любая непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Нетрудно заметить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N[\varphi] = D[\varphi], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} H_N[\varphi] = H[\varphi].$$

Отсюда следует, что  $D_N[\varphi] \leq M_0$  при любых  $N$ , где  $M_0 > 0$  — положительная постоянная, не зависящая от  $N$ .

Пусть  $y = y(x, h)$  — сеточная функция, реализующая минимум функционала  $D_N[\varphi]$ :

$$\lambda^h = D_N[y]$$

при условии нормировки  $H_N[y] = 1$ . Рассмотрим последовательность сеточных функций  $\{y(x, h)\}$  на некоторой последовательности сеток  $\{\omega_h\}$ .

**Лемма 5.** *Последовательность функций  $\{y(x, h)\}$  равномерно непрерывна и равномерно ограничена.*

**Доказательство.** а) Если  $x'$  и  $x''$  — точки сетки, то

$$y(x'', h) - y(x', h) = \sum_{s=x'}^{s=x''-h} h y_s(s, h).$$

Пользуясь неравенством Коши — Буняковского и ограниченностью  $D_N[y]$ , получим отсюда

$$|y(x'', h) - y(x', h)| \leq \sqrt{(1, (y_{\bar{x}})^2)} \sqrt{|x'' - x'|} \leq \frac{M_0}{\sqrt{c_1}} \sqrt{|x'' - x'|}, \quad (223)$$

т. е.  $\{y(x, h)\}$  равномерно непрерывна.

б) Из условия нормировки  $(\rho, y^2) = 1$  следует, что по крайней мере в одной точке  $x = x'$  имеет место неравенство  $\rho(x') y^2(x', h) \leq 1$ , т. е.  $|y(x', h)| \leq 1/\sqrt{c_1}$ . Отсюда и из (223) следует равномерная ограниченность последовательности  $\{y(x, h)\}$ :

$$|y(x'', h)| \leq |y(x', h)| + |y(x'', h) - y(x', h)| \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{M_0}{\sqrt{c_1}}.$$

По теореме Арцела, примененной к последовательности сеточных функций, существует некоторая подпоследовательность



$\{y(x, h_k)\}$ , равномерно сходящаяся к некоторой функции  $\tilde{u}(x)$ , непрерывной на отрезке  $[0, 1]$ :

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \|y(x, h_k) - \tilde{u}(x)\|_C = 0. \quad (224)$$

Будем предполагать, что соответствующая числовая последовательность  $\{\lambda^{h_k}\} = \{\lambda(h_k)\}$ , ограниченная в силу (219), сходится к некоторому пределу  $\bar{\lambda}$ :

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \lambda(h_k) = \bar{\lambda}.$$

В противном случае мы выбрали бы из нее сходящуюся подпоследовательность и ограничились бы рассмотрением только этой подпоследовательности.

*Лемма 6.* Если для некоторой последовательности  $\{\lambda(h_k)\}$

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \lambda(h_k) = \bar{\lambda}, \quad (225)$$

то  $\bar{\lambda} \leq \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — наименьшее собственное значение задачи (204).

*Доказательство.* Пусть  $u^*(x)$  — некоторая кусочно-гладкая функция, для которой  $u^*(0) = u^*(1) = 0$  и

$$\lambda^* = \frac{D[u^*]}{H[u^*]} \leq \lambda_1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

и пусть

$$\lambda^*(h_k) = \frac{D_{N_k}[u^*]}{H_{N_k}[u^*]}, \quad N_k = 1/h_k.$$

В силу принципа минимума  $\lambda_1(h_k) \leq \lambda^*(h_k)$ , причем  $\lambda^*(h_k) \rightarrow \lambda^*$  при  $h_k \rightarrow 0$ . Переходя к пределу при  $h_k \rightarrow 0$ , получим

$$\bar{\lambda} \leq \lambda^* \leq \lambda_1 + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности  $\varepsilon$ , следует, что  $\bar{\lambda} \leq \lambda_1$ .

Наша ближайшая цель — показать, что предельная функция  $\tilde{u}(x)$  удовлетворяет уравнению (204) при  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

Задача (213) эквивалентна разностному аналогу интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda^h (G(x, \xi), \rho(\xi) y(\xi)), \quad (226)$$

где  $G(x, \xi)$  — функция Грина для оператора  $\Lambda$  (см. п. 8).

В самом деле, в п. 8 было показано, что решение задачи

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi(x), \quad 0 < x = ih < 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

дается формулой

$$y(x) = (G(x, \xi), \varphi(\xi)).$$

В нашем случае следует формально положить  $\varphi = \lambda \rho y$ , что сразу дает (226).

Если воспользоваться функцией Грина  $G_0^h(x, \xi)$  оператора

$$\dot{\Delta} y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad y_0 = y_N = 0, \quad (227)$$

то задачу (213) можно свести к уравнению

$$y(x) = (G_0^h(x, \xi), (\lambda^h \rho(\xi) - d(\xi)) y(\xi)). \quad (228)$$

В п. 9 было выписано явное выражение для  $G_0^h$ . Из него видно, что  $G_0^h(x, \xi)$  при  $h \rightarrow 0$  сходится к функции Грина  $G_0(x, \xi)$  задачи

$$(ku')' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (229)$$

так, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} |G_0^h(x, \xi) - G_0(x, \xi)| = 0. \quad (230)$$

Совершим в (228) предельный переход при  $h \rightarrow 0$  и учтем соотношения (224), (225) и (230):

$$\tilde{u}(x) = \int_0^1 G_0(x, \xi) (\bar{\lambda} r(\xi) - q(\xi)) \tilde{u}(\xi) d\xi. \quad (231)$$

Отсюда, по определению функции  $G_0(x, \xi)$ , следует, что решение  $\tilde{u}(x)$  интегрального уравнения (231) удовлетворяет дифференциальному уравнению (204) при  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Итак,  $\bar{\lambda}$  — собственное значение задачи (204). Так как, согласно лемме 5,  $\bar{\lambda} \leq \leq \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — наименьшее собственное значение, то  $\bar{\lambda} = \lambda_1$  и, следовательно,  $u(x) = u_1(x)$  — первая собственная функция задачи (204).

Таким образом, мы доказали, что последовательность  $\{y(x, h)\}$  равномерно сходится к  $u_1(x)$ , а  $\lambda_1^h = \lambda_1(h)$  сходится к  $\lambda_1$  при  $h \rightarrow 0$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|y_1(x, h) - u_1(x)\|_C = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \lambda_1^h = \lambda_1. \quad (232)$$

Приведенные выше рассуждения относились к наименьшему собственному значению  $\lambda_1^h$ .

В случае других собственных значений  $\lambda_n^h$  при  $n > 1$  все рассуждения сохраняют силу, если учесть, что  $\lambda_n^h$  и  $\lambda_n$  определяются как минимумы функционалов  $(D_N[\varphi])/(H_N[\varphi])$  и, соответственно,  $(D[\varphi])/(H[\varphi])$  при дополнительных условиях ортогональности  $H_N[\varphi, y_m] = 0$  и  $H[\varphi, u_m] = 0$ ,  $1 \leq m < n$ .

Следует отметить, что мы исследуем собственные значения и собственные функции номеров  $n \leq n_0$ , где  $n, n_0$  не зависят от  $h$ ,

При изучении задачи Штурма — Лиувилля для простейшего оператора  $\dot{\Lambda}y = y_{\bar{x}\bar{x}}$  в гл. I, § 2, мы нашли собственные значения

$$\dot{\lambda}_n^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi nh}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Их число равно числу  $N-1$  внутренних узлов сетки.

Сравнивая  $\dot{\lambda}_n^h$  с решением задачи для дифференциального уравнения ( $u'' + \lambda u = 0$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ ),  $\dot{\lambda}_n = \pi^2 n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , видим, что последние собственные значения  $\dot{\lambda}_n^h$  не имеют никакого отношения к точным собственным значениям  $\dot{\lambda}_n$  тех же номеров. Так, например,

$$\dot{\lambda}_{N-1}^h = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \dot{\lambda}_{N-1} = \pi^2 (N-1)^2 = \frac{\pi^2 (1-h)^2}{h^2},$$

$$\frac{\dot{\lambda}_{N-1}^h}{\dot{\lambda}_{N-1}} = \frac{4}{\pi^2} (1 + 2h + O(h^2)) \approx 0,4,$$

т. е.  $\dot{\lambda}_{N-1}^h$  отличается от точного значения  $\dot{\lambda}_{N-1}$  примерно в 2,5 раза.

Всюду мы предполагаем, что номер  $n$  собственного значения фиксирован и не зависит от  $h$ . При отыскании собственных значений номера  $n$  фактически требуется, чтобы

$$n \ll N.$$

Поэтому для определения собственных значений высокого порядка требуется очень мелкая сетка. Для  $n \geq 10$  целесообразно использовать схемы высокого порядка точности.

**21. Разностная задача Штурма — Лиувилля. Оценка скорости сходимости.** Пусть  $\lambda^h$ ,  $y(x)$  — решение разностной задачи (213), а  $\lambda$ ,  $u(x)$  — соответствующее решение исходной задачи (204). Выясним вопрос об асимптотическом (при  $h \rightarrow 0$ ) порядке погрешностей  $z = y - u$  и  $\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda$  в равномерной метрике.

Для погрешности  $z = y - u$  получаем разностную краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} \Lambda z + \lambda^h \rho z &= -\Psi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad z(0) = z(1) = 0, \\ \Lambda z &= (az_{\bar{x}})_x - dz, \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

где

$$\Psi = \Lambda u + \lambda^h \rho u \quad (234)$$

— погрешность аппроксимации для схемы (213) на решении уравнения (204).

Преобразуем выражение для  $\Psi$ . Для этого проинтегрируем уравнение (204) по  $x$  в пределах от  $x_{i-1/2}$  до  $x_{i+1/2}$ :

$$\frac{\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}}{h} - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (q(x) - \lambda r(x)) u(x) dx = 0,$$

$$\omega_i = k(x_i) \frac{du(x_i)}{dx}.$$

Вычитая это тождество из (234), получим

$$\Psi = \psi + (\lambda^h - \lambda) \rho u, \quad (235)$$

где

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad (236)$$

$$\psi^* = - \left( du(x) - \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) u(x+sh) ds \right) +$$

$$+ \lambda \left( \rho u - \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh) u(x+sh) ds \right), \quad (237)$$

$$\eta = au_{\bar{x}} - k(x - 0,5h) u'(x - 0,5h). \quad (238)$$

В частности, для схемы (213) с коэффициентами (57) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \dot{\psi} + (\lambda^h - \lambda) \dot{\rho} u, \\ \dot{\psi} &= \dot{\eta}_x + \dot{\psi}^*, \\ \dot{\psi}^* &= \int_{-0,5}^{0,5} q(x+sh) (u(x+sh) - u(x)) ds + \\ &+ \lambda \int_{-0,5}^{0,5} r(x+sh) (u(x) - u(x+sh)) ds. \end{aligned} \quad (239)$$

Для выяснения точности схемы (213) надо оценить решение задачи (233).

Параметр  $\lambda^h$  является собственным значением. Поэтому неоднородное уравнение (233) разрешимо только в том случае, когда собственная функция  $y$  задачи (213) ортогональна к правой части уравнения (233), или, точнее, должно быть выполнено тождество

$$(\Psi, y) = (\psi, y) + (\lambda^h - \lambda) (\rho u, y) = 0. \quad (240)$$

Пусть  $u(x)$  и  $y(x)$  — нормированные собственные функции:

$$H[u] = 1, \quad H_N[y] = 1.$$

Выше было доказано, что  $\|y - u\|_C \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому при достаточно малом  $h$  можно утверждать, что  $(\rho u, y) \neq 0$ . Собственному значению  $\lambda^h$  соответствует только одна собственная функция, определяемая с точностью до произвольного множителя  $C_0$ . Выберем множитель  $C_0$  таким образом, чтобы функция  $\bar{y} = C_0 y$  был ортогональна разности  $\bar{z} = \bar{y} - u$ :

$$(\rho \bar{y}, \bar{z}) = 0. \quad (241)$$

Отсюда получаем

$$(\rho, uy) = (\rho y, \bar{y} - \bar{z}) = (\rho y, \bar{y}) - (\rho y, \bar{z}) = (\rho y, \bar{y}) = C_0 (\rho, y^2) = C_0.$$

В предыдущем пункте было показано, что  $y(x) \rightarrow u(x)$  при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому  $C_0 \rightarrow 1$  при  $h \rightarrow 0$ . Будем считать, что  $C_0 > 0$ .

Далее,

$$\begin{aligned} (\rho, u^2) &= (\rho, (\bar{z} - \bar{y})^2) = (\rho, \bar{z}^2) - 2(\rho, \bar{z}\bar{y}) + (\rho, \bar{y}^2) = \\ &= (\rho, \bar{y}^2) + (\rho, \bar{z}^2) = C_0^2 - (\rho, \bar{z}u), \end{aligned}$$

так, что

$$1 - C_0^2 = -(\rho, \bar{z}u) - (H_N[u] - H[u]). \quad (242)$$

Условие (240) используем для определения  $\Delta\lambda$ :

$$\Delta\lambda = \lambda^h - \lambda = -(\psi, y)/(\rho u, y) = -(\psi, \bar{y})/C_0^2. \quad (243)$$

Преобразуем теперь правую часть этого тождества, учитывая, что  $\psi = \eta_x + \psi^*$ :

$$(\psi, \bar{y}) = -(\eta, \bar{y}_x) + (\psi^*, \bar{y}).$$

Отсюда и из оценок (220) для  $\bar{y}$  и  $\bar{y}_x$  следует

*Лемма 7.* Пусть  $k, q, r$  — кусочно-дифференцируемые функции,  $\lambda_n$  и  $\lambda_n^h$  — собственные значения задач (204) и (213), соответственно. Тогда справедлива оценка

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| \leq Mn^{3/2} ((1, |\eta|) + (1, |\psi^*|)), \quad (244)$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$  и  $n$ .

Перейдем к оценке  $\bar{z}$ . Так как  $\bar{y} = C_0 y$ , то  $\bar{y}$  удовлетворяет уравнению (213) и  $H_N[\bar{y}] = C_0^2$ , а для  $\bar{z} = \bar{y} - u$  получаем задачу (233).

Сведем задачу (233) к дискретному аналогу интегрального уравнения

$$\bar{z}(x) = \lambda^h (G(x, \xi), \rho(\xi) \bar{z}(\xi)) + (G(x, \xi), \Psi(\xi)), \quad (245)$$

где  $G(x, \xi) = G^h(x, \xi)$  — разностная функция Грина оператора  $\Delta y = (ay_x)_x - dy$  с краевыми условиями  $y(0) = y(1) = 0$ .

Собственная функция  $\bar{y}$  задачи (213) удовлетворяет уравнению

$$\bar{y}(x) = \lambda^h (G(x, \xi), \rho(\xi) \bar{y}(\xi)). \quad (246)$$

Пусть  $\lambda^h = \lambda_n^h$  — собственное значение номера  $n$ , а  $y = y_n(x)$  — нормированная собственная функция,  $(\rho, y_n^2) = 1$ .

Чтобы получить вместо (245) и (246) уравнения с симметричным ядром, сделаем замену

$$v(x) = \sqrt{\rho(x)} \bar{z}(x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\rho(x)} y, \quad (247)$$

$$K(x, \xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} G(x, \xi). \quad (248)$$

Тогда уравнения (245) и (246) примут вид

$$\left. \begin{aligned} v_n(x) &= \lambda_n^h (K(x, \xi), v(\xi)) + f(x), \\ f(x) &= (K(x, \xi), \bar{\Psi}(\xi)), \quad \bar{\Psi} = \Psi / \sqrt{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

$$\varphi_n(x) = \lambda_n^h (K(x, \xi), \varphi_n(\xi)). \quad (250)$$

Условие ортогональности  $f(x)$  к функции  $\varphi_n(x)$  выполняется в силу условия (240):

$$\begin{aligned} (\varphi_n(x), f(x)) &= (\varphi_n(x), (K(x, \xi), \bar{\Psi}(\xi))) = (\bar{\Psi}(\xi), (K(\xi, x), \varphi_n(x))) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n^h} (\bar{\Psi}(\xi), \varphi_n(\xi)) = \frac{1}{\lambda_n^h} \left( \frac{\Psi}{\sqrt{\rho}}, \sqrt{\rho} y_n \right) = \frac{1}{\lambda_n^h} (\Psi, y_n) = 0. \end{aligned}$$

Условие (241) запишется в виде

$$(\varphi_n, v_n) = 0. \quad (251)$$

Будем искать решение  $v(x) = v_n(x)$  уравнения (249) в виде

$$v(x) = f(x) + \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} c_k \varphi_k(x) \quad (252)$$

при дополнительном условии (251).

Подставим это выражение в уравнение (249):

$$v(x) = f(x) + \lambda_n^h \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} c_k (K(x, \xi), \varphi_k(\xi)) + \lambda_n^h (K(x, \xi), f(\xi)).$$

Разлагая  $f(x)$  по собственным функциям  $\{\varphi_k\}$ :

$$f(x) = \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} d_k \varphi_k(x), \quad d_k = (f, \varphi_k), \quad (253)$$

получим

$$(K(x, \xi), f(\xi)) = \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} \frac{d_k}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

и

$$c_k = \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h} c_k + \frac{\lambda_n^h}{\lambda_k^h} (f, \varphi_k),$$

так что

$$v(x) = f(x) + \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} \frac{\lambda_n^h(f, \varphi_k)}{\lambda_k^h(1 - \lambda_n^h/\lambda_k^h)} \varphi_k(x). \quad (254)$$

Оценим выражение, стоящее под знаком суммы:

$$\left| \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} \frac{\lambda_n^h(f, \varphi_k) \varphi_k(x)}{\lambda_k^h - \lambda_n^h} \right| \leq M \|f\| \lambda_n^h \sum_{k=1, k \neq n}^{N-1} \frac{\sqrt{k}}{|\lambda_k^h - \lambda_n^h|}.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  — любое число, не зависящее от  $h$ . Выберем номер  $n_0$  такой, что  $\lambda_{n_0}^h \geq (1 + \varepsilon) \lambda_n^h$ . Тогда

$$\sum_{k=n_0}^{N-1} \frac{\sqrt{k}}{|\lambda_k^h - \lambda_n^h|} \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \sum_{k=n_0}^{N-1} \frac{\sqrt{k}}{\lambda_k^h} \leq \frac{M'}{\varepsilon} \sum_{k=n_0}^{N-1} \frac{1}{k^{3/2}} \leq M,$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$ . Так как  $\lambda_k^h \rightarrow \lambda_k$  для  $k \leq n_0$  при  $h \rightarrow 0$ , то сумма по  $k$  от 1 до  $n_0 - 1$  при достаточно малом  $h \leq h_0$  ограничена постоянной, не зависящей от  $h$ .

Таким образом, справедлива оценка

$$\|v\|_C \leq M(n) \|f\|_C. \quad (255)$$

Преобразуем выражение для  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= (K(x, \xi), \bar{\Psi}(\xi)) = \sqrt{\rho(x)} (G(x, \xi), \Psi(\xi)) = \\ &= (\lambda^h - \lambda) \sqrt{\rho(x)} (G(x, \xi), \rho(\xi) u(\xi)) + \sqrt{\rho(x)} (G(x, \xi), \eta_\xi(\xi) + \psi^*(\xi)) = \\ &= \Delta \lambda^h \sqrt{\rho(x)} (G(x, \xi), \rho(\xi) u(\xi)) + \sqrt{\rho(x)} \{ (G_\xi(x, \xi), \eta(\xi)) + \\ &\quad + (G(x, \xi), \psi^*(\xi)) \}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая ограниченность  $G(x, \xi)$  и  $G_\xi(x, \xi)$  (см. п. 9):

$$|G(x, \xi)| \leq 1/c_1, \quad |G_\xi(x, \xi)| \leq 2/c_1,$$

получаем оценку

$$\|f\|_C \leq M_1((1, |\eta|) + (1, |\psi^*|)) + M_2 \lambda^h |\Delta \lambda^h|.$$

Подставим эту оценку в (255), вернемся к функции  $z = v/\sqrt{\rho}$  и учтем (219):

$$\|\bar{z}\|_C \leq M(n)((1, |\eta|) + (1, |\psi^*|)).$$

Нас интересует разность  $z = y - u$ , которая выражается через  $\bar{z}$ :

$$z = \frac{\bar{z}}{C_0} + \frac{1 - C_0}{C_0} u = \frac{\bar{z}}{C_0} + \frac{1 - C_0^2}{C_0(1 + C_0)} u,$$

где  $C_0$  — постоянная, введенная ранее. Отсюда следует:

$$\|z\|_C \leq \frac{\|\bar{z}\|_C}{C_0} + |1 - C_0^2| \frac{\|u\|_C}{C_0(1 + C_0)} \leq M(\|\bar{z}\|_C + |1 - C_0^2|)$$

при достаточно малом  $h$ , так как  $C_0 \rightarrow 1$  при  $h \rightarrow 0$ , а величина  $\|u\|_C$  ограничена. Из формулы (242) видно, что

$$|1 - C_0^2| = (\rho, \bar{z}^2)^{1/2} (\rho, u^2)^{1/2} + |H_N[u] - H[u]|$$

и, следовательно,

$$\|z\|_C \leq M\|\bar{z}\|_C + M|H_N[u] - H[u]|.$$

Подставляя сюда оценку для  $\|\bar{z}\|_C$ , убеждаемся в том, что верна

**Теорема 8.** Для погрешности схемы (213) при  $\lambda = \lambda_n^h$  и при достаточно малом  $h \leq h_0$  имеют место оценки

$$\|z_n\|_C = \|y_n - u_n\|_C \leq M_1(n) ((1, |\eta|) + (1, |\psi^*|)) + M_2 |H_N[u_n] - H[u_n]|, \quad (256)$$

$$|\Delta \lambda_n| = |\lambda_n^h - \lambda_n| \leq M_3 ((1, |\eta|) + (1, |\psi^*|)), \quad (257)$$

где  $n$  не зависит от  $h$ ,  $M_1(n) > 0$ ,  $M_2 > 0$ ,  $M_3 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $h$ .

Перейдем теперь к оценке порядка точности разностной задачи Штурма — Лиувилля (213). Для этого нужно оценить величины  $(1, |\eta|) + (1, |\psi^*|)$  и  $H_N[u] - H[u]$ .

Если  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $r(x)$  — достаточно гладкие функции, точнее,  $k, q, r \in C^{(2)}$ , то так же, как и в п. 10, можно показать, что  $(1, |\eta|) = O(h^2)$ ,  $(1, |\psi^*|) = O(h^2)$  для любой исходной схемы.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} H_N[u] - H[u] &= (\rho, u^2) - \int_0^1 r(x) u^2(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \rho_i u_i^2 - \int_{-0,5}^{0,5} r(x_i + sh) u^2(x_i + sh) ds \right) - \\ &\quad - \int_0^{0,5h} r u^2 dx - \int_{1-0,5h}^1 r u^2 dx = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i h + O(h^2), \end{aligned}$$

где

$$\Delta_i = \rho_i u_i^2 - \int_{-0,5}^{0,5} r(x_i + sh) u^2(x_i + sh) ds. \quad (258)$$

Интегралы от 0 до 0,5 и от  $1 - 0,5h$  до 1 есть величины  $O(h^3)$ , так как  $u^2 = O(h^2)$  в силу краевых условий,



Учитывая, что

$$\begin{aligned} r(x_i + sh)u^2(x_i + sh) &= (r_i + shr'_i)(u_i^2 + sh(u^2)'_i) + O(h^2) = \\ &= r_i u_i^2 + sh(ru^2)'_i + O(h^2), \quad \int_{-0,5}^{0,5} s ds = 0, \end{aligned}$$

получаем  $\Delta_i = O(h^2)$  и, следовательно,  $H_N[u] - H[u] = O(h^2)$  при  $r \in C^{(2)}$ .

Таким образом, любая исходная схема (213) имеет второй порядок точности

$$\|y_n - u_n\|_C = O(h^2), \quad |\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h^2)$$

в классе достаточно гладких коэффициентов  $k, q, r \in C^{(2)}$ .

Рассмотрим теперь класс разрывных коэффициентов

$$k(x), q(x), r(x) \in Q^{(2)}$$

и покажем, что любая схема (213) имеет в этом классе первый порядок точности, а наилучшая схема (213), (57) имеет второй порядок точности при  $k(x) \in Q^{(2)}, q(x), r(x) \in Q^{(1)}$ .

Доказательство этого утверждения проведем, предполагая для простоты, что  $k, q, r$  имеют только один разрыв первого рода в точке  $\xi = x_n + \theta h$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $x_n = nh$ ,  $0 < n < N - 1$ . По аналогии с п. 11 находим

$$(1, |\eta|) = O(h), \quad (1, |\psi^*|) = O(h).$$

Из формулы (258) видно, что  $\Delta_i = O(h^2)$  при  $i \neq n$  и  $i \neq n + 1$ , а  $\Delta_n = O(1)$ ,  $\Delta_{n+1} = O(h^2)$  при  $\theta < 0,5$ ;  $\Delta_n = O(h^2)$ ,  $\Delta_{n+1} = O(1)$  при  $\theta > 0,5$ , так что

$$H_N[u] - H[u] = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i h + O(h^2) = O(h).$$

Отсюда в силу априорных оценок (256), (257) следует, что для любой схемы (213)  $\|y_n - u_n\|_C = O(h)$ ,  $|\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h)$  при  $k, q, r \in Q^{(2)}$ .

Для схемы (213) с коэффициентами (57)

$$(1, |\dot{\eta}|) + (1, |\dot{\psi}^*|) = O(h^2),$$

$$\Delta_i = \int_{-0,5}^{0,5} r(x_i + sh)(u^2(x_i + sh) - u^2(x_i)) ds + O(h^2) \text{ при } i \neq n, n + 1,$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_{-0,5}^{0,5} (r(\xi - 0) + O(h)) O(h) ds + \int_{\theta}^{0,5} (r(\xi + 0) + O(h)) O(h) ds = \\ &= O(h), \quad \Delta_{n+1} = O(h^2) \text{ при } \theta < 0,5, \end{aligned}$$

$$\Delta_n = O(h^2), \quad \Delta_{n+1} = O(h) \text{ при } \theta > 0,5,$$

$$H_N[u] - H[u] = O(h^2), \quad r \in Q^{(1)}.$$

Отсюда, в силу априорных оценок (256), (257), заключаем, что для наилучшей схемы

$$\|y_n - u_n\|_C = O(h^2), \quad |\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h^2), \quad \text{если } k(x) \in Q^{(2)}, q(x), r(x) \in Q^{(1)}.$$

Все результаты, полученные для однородных схем, соответствующих краевой задаче, сохраняют силу и для разностной задачи на собственные значения (213).

Так, любая исходная схема на неравномерной сетке

$$\begin{aligned} \Delta y + \lambda^h \rho y &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad y_0 = y_N = 0, \\ \Delta y &= (ay_{\bar{x}})_x - dy, \end{aligned}$$

коэффициенты которой  $a$ ,  $d$ ,  $\rho$  определяются по формулам (83) и (85), имеет второй порядок точности в классе разрывных коэффициентов  $k$ ,  $q$ ,  $r \in Q^{(2)}$  на специальных последовательностях неравномерных сеток  $\hat{\omega}_h(K)$  (таких, что точки разрыва функций  $k$ ,  $q$ ,  $r$  являются узлами сетки).

По аналогии с п. 14 можно написать точную схему и усеченные схемы любого порядка точности. Такие схемы были исследованы В. Г. Приказчиковым [2].

## § 2. Однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

**1. Однородные разностные схемы.** В этом параграфе рассматриваются однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности  $k(x, t)$ , а также для квазилинейного уравнения с  $k = k(x, t, u)$ .

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности: ищется непрерывное в прямоугольнике  $D_T = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$  решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Коэффициент  $k(x, t)$  ограничен снизу и сверху

$$0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (4)$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные, и удовлетворяет условию Липшица по  $t$ , которое мы запишем в виде

$$\left| \frac{k(x, t_2) - k(x, t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq c_3 k(x, t_1), \quad (5)$$

где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $t_1 < t_2$ ,  $c_3 > 0$  — постоянная.

Предполагается, что задача (1) — (3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

Построим в  $\bar{D}_T$  сетку. Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N\}$$

равномерная сетка с шагом  $h$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau = T/N_0\}$$

сетка с шагом  $\tau$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau\}$$

сетка в  $\bar{D}_T$ ,

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_i, t_j), \quad x_i = ih, \quad 0 < i < N, \quad t_j = j\tau, \quad 0 < j \leq N_0\}.$$

Для получения однородных консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом. Рассмотрим уравнение (1) при  $t = \bar{t} = t_{j+1/2}$  и напомним для него уравнение баланса на отрезке  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} dx = w(x_{i+1/2}, \bar{t}) - w(x_{i-1/2}, \bar{t}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, \bar{t}) dx, \quad (6)$$

где

$$w(x_{i-1/2}, \bar{t}) = \left( k(x, \bar{t}) \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial x} \right)_{x=x_{i-1/2}}.$$

Аппроксимируем входящие в (6) слагаемые

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} dx \sim hu_{t, i}, \quad \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, \bar{t}) dx \sim hf_i,$$

$$w(x_{i-1/2}, \bar{t}) \sim a_i (\sigma \hat{u}_{\bar{x}, i} + (1 - \sigma) u_{\bar{x}, i}), \quad \hat{u} = u^{l+1}, \quad u = u^l,$$

где  $\sigma$  — параметр,  $a_i$  выражается через значения функции  $k(x, t)$  при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  (ср. § 1, п. 5).

Подставим эти выражения в (6), заменим  $u$  на  $y$ , знак аппроксимации — знаком равенства. В результате получим сле-

дующую однородную консервативную разностную схему (обозначим  $y = y^j$ ,  $\hat{y} = y^{j+1}$ ,  $y_t = (\hat{y} - y)/\tau$ ):

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda(\bar{t})(\sigma\hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad 0 \leq t_j = j\tau < T, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) &= u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \\ \Lambda(\bar{t})y &= (a(x, \bar{t})y_x)_x. \end{aligned} \right\} (7)$$

Начальное условие и краевые условия первого рода выполняются на сетке точно.

Коэффициент  $a$  и правая часть  $\varphi$  вычисляются при помощи введенных в § 1, п. 3 шаблонных функционалов

$$A[\bar{k}(s)], \quad -1 \leq s \leq 0 \quad \text{и} \quad F[\bar{f}(s)], \quad -0,5 \leq s \leq 0,5$$

по следующим формулам

$$a(x, \bar{t}) = A[k(x + sh, \bar{t})], \quad \varphi(x, t) = F[f(x + sh, \bar{t})].$$

Шаблонные функционалы заданы на классах кусочно-непрерывных функций  $\bar{k}(s) \in Q^{(0)}[-1, 0]$ ,  $\bar{f}(s) \in Q^{(0)}[-1/2, 1/2]$ . Так как  $A[\bar{k}(s)]$  — неубывающий однородный функционал первой степени и  $A[1] = 1$ , то из условий (4) и (5) следует

$$0 < c_1 \leq a \leq c_2, \quad (8)$$

$$|a_t| \leq c_3 a. \quad (9)$$

Семейство однородных схем (7) определяется заданием  $A$ ,  $F$  и параметра  $\sigma$ , от которого зависят устойчивость и точность (по  $t$ ) схемы (7).

Если  $k = 1$ , то  $a = 1$  и схема (7) переходит в схему с весами для уравнения с постоянным коэффициентом теплопроводности, исследованную в гл. II.

Интегро-интерполяционный метод позволяет получить и ряд других схем. Так, например, пользуясь уравнением баланса в прямоугольнике

$$(x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}),$$

легко получить схему

$$y_t = \sigma \Lambda(t_{j+1})y^{j+1} + (1 - \sigma) \Lambda(t_j)y^j + \varphi^j.$$

Для вычисления  $\varphi$  могут быть использованы и другие формулы, например,

$$\varphi_i^j = \frac{1}{h\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) dx dt.$$

Мы ограничимся здесь изучением только схем (7). При практическом применении схем (7) для вычисления  $a$  и  $\varphi$  можно рекомендовать простейшие формулы из § 1:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= k(x_{i-1/2}, \bar{t}), & a_i &= \frac{2k(x_i - 0, \bar{t})k(x_{i-1} + 0, \bar{t})}{k(x_i - 0, \bar{t}) + k(x_{i-1} + 0, \bar{t})}, \\ \varphi_i &= 0,5(f(x_i - 0, \bar{t}) + f(x_i + 0, \bar{t})). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Приведем схему (7) к «счетному виду», т. е. к виду, удобному для вычислений. Для этого разрешим уравнение (7) относительно  $\hat{y} = y^{j+1}$ :

$$\sigma\tau\Lambda\hat{y} - \hat{y} = -F, \quad F = y + \tau(1 - \sigma)\Lambda y + \tau\varphi.$$

Запишем это уравнение в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} A_i\hat{y}_{i-1} - C_i\hat{y}_i + A_{i+1}\hat{y}_{i+1} &= -F_i, & i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ A_i &= \sigma\tau a_i/h^2, & C_i &= A_i + A_{i+1} + 1, \\ F_i &= \left(1 - \frac{\tau}{h^2}(1 - \sigma)(a_i + a_{i+1})\right)y_i + \\ &+ \frac{\tau}{h^2}(1 - \sigma)(a_i y_{i-1} + a_{i+1} y_{i+1}) + \varphi_i\tau. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для определения  $\hat{y}_i = y_i^{j+1}$  на новом слое получаем разностное уравнение второго порядка (11) (или трехточечное разностное уравнение) с краевыми условиями

$$\hat{y}_0 = u_1(t_{j+1}), \quad \hat{y}_N = u_2(t_{j+1}). \quad (12)$$

Для вычисления правой части уравнения (11) можно пользоваться рекуррентной формулой

$$F_i^j = \frac{1}{\sigma} y_i^j - \frac{1 - \sigma}{\sigma} F_{i-1}^j + \tau\varphi_i^j.$$

Объем вычислений при этом уменьшается.

Решение задачи (11), (12) может быть найдено методом прогонки при  $\sigma > 0$ , так как условия устойчивости прогонки

$$A_i > 0, \quad C_i \geq A_i + A_{i+1}$$

выполнены.

При  $\sigma = 0$  получаем явную схему

$$y_i = \Lambda(\bar{t})y + \varphi \quad \text{или} \quad y^{j+1} = y^j + \tau(\Lambda(\bar{t})y^j + \varphi),$$

при  $\sigma = 1$  — схему с опережением или чисто неявную схему

$$y_i = \Lambda(\bar{t})\hat{y} + \varphi.$$

При  $\sigma = 0,5$  получаем симметричную схему

$$y_i = 0,5\Lambda(\bar{t})(\hat{y} + y) + \varphi.$$

**2. Погрешность аппроксимации.** Вычислим погрешность аппроксимации для схемы (7). Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1)–(3),  $y_i^j$  — решение соответствующей разностной задачи (7),  $z_i^j = y_i^j - u_i^j$  — погрешность схемы (7). Подставляя  $y_i^j = u_i^j + z_i^j$  (или  $y = u + z$ ) в (7) и считая  $u(x, t)$  заданной функцией, получим для  $z$  следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} z_t &= \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - \sigma)z) + \psi, \quad \Lambda z = (az_{\bar{x}})_x, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) &= 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\psi = \Lambda(\bar{t})(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) + \varphi - u_t \quad (14)$$

— погрешность аппроксимации для схемы в классе решений  $u = u(x, t)$  задачи (1)–(3).

При оценке порядка аппроксимации будем предполагать, что  $u(x, t)$ ,  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  имеют нужное по ходу изложения число производных. По аналогии с § 1 преобразуем формулу для погрешности аппроксимации. В силу уравнения баланса (6) можно написать

$$\psi_i = [(\dot{a}(\sigma \hat{u}_{\bar{x}} + (1 - \sigma)u_{\bar{x}}))_x + \varphi - u_t]_i -$$

$$- \left[ (\omega(x_{i-1/2}, \bar{t}))_{x, i} + \overset{\circ}{\varphi}_i - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} dx \right],$$

$$\text{где } \omega(x_{i-1/2}, \bar{t}) = \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_{i-1/2}},$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, \bar{t}) dx. \quad (15)$$

Отсюда следуют формулы (см. § 1, п. 10):

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad (16)$$

$$\eta_i = a(x_i, \bar{t})(\sigma \hat{u}_{\bar{x}} + (1 - \sigma)u_{\bar{x}})_i - k(x_{i-1/2}, \bar{t}) \frac{\partial u(x_{i-1/2}, \bar{t})}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\psi_i^* = (\varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i) + \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} dx - u_{t, i} \right). \quad (18)$$

Преобразуем  $\eta_i$ . Так как  $\sigma \hat{v} + (1 - \sigma)v = (\sigma - 0,5)\tau v_t + 0,5(\hat{v} + v)$ , то

$$\eta_i = a_i \left( \frac{\hat{u}_{\bar{x}} + u_{\bar{x}}}{2} \right)_i - \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_{i-1/2}}^{t=\bar{t}} + (\sigma - 0,5)\tau a_i u_{\bar{x}t, i}.$$

Учитывая, что по определению исходного семейства схем (см. § 1, п. 7)

$$a_i = k_{i-1/2} + O(h^2), \quad \varphi_i = f(x_i, t) + O(h^2), \quad \overset{\circ}{\varphi}_i = \dot{f}_i + O(h^2),$$

получаем

$$\eta_i = O(\tau^{m_\sigma} + h^2), \quad \psi_i^* = O(\tau^2 + h^2), \quad (19)$$

$$m_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0,5, \\ 2, & \sigma = 0,5, \end{cases}$$

если существуют непрерывные в  $\bar{D}_T$  производные  $k''$ ,  $\dot{k}$ ,  $f''$ ,  $\dot{f}$ ,  $\ddot{u}$ ,  $u'''$ ,  $\dot{u}''$  при  $\sigma \neq 0,5$ , а при  $\sigma = 0,5$ , кроме того, — производные  $\ddot{u}'$ ,  $\ddot{u}$  (точками обозначены производные по  $t$ , штрихами — производные по  $x$ ).

Если стационарная схема  $\Delta y + \varphi = 0$  имеет второй порядок локальной (в норме  $C$ ) аппроксимации, т. е.  $a$  удовлетворяет условиям

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_i + O(h^2), \quad \frac{a_i + a_{i+1}}{2} = k_i + O(h^2),$$

то  $\eta_{x,i} = O(\tau^{m_\sigma} + h^2)$  и  $\psi = O(\tau^{m_\sigma} + h^2)$  при условии, что  $\sigma$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ .

Для оценки порядка погрешности аппроксимации в форме (16) будем пользоваться нормами

$$\|\psi\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h \psi_k \right|, \quad \|\psi\|_{(-1)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=i+1}^{N-1} h \psi_k \right|,$$

$$\|\psi\|_{(-2)} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \sum_{k=1}^i h \psi_k \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \|\psi\|_{(-2)} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \sum_{k=i+1}^{N-1} h \psi_k \right)^2 \right]^{1/2}.$$

**3. Погрешность аппроксимации в классе разрывных коэффициентов.** Пусть  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  имеют разрывы первого рода на прямой  $x = \xi$ , параллельной оси  $t$ . Пусть  $\xi = x_n + \theta h$ ,  $x_n = nh$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $n \geq 1$ . На линии разрыва выполняются обычные условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{при } x = \xi, \quad t \in (0, T).$$

Для погрешности аппроксимации  $\psi$  и в этом случае верны формулы (16) — (18). Оценки (19) имеют место во всех узлах,

кроме  $x = x_n$  и  $x = x_{n+1}$ . Если коэффициенты  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$  при каждом фиксированном  $t$  принадлежат классу  $Q^{(12)}[0, 1]$  и  $u(x, t) \in C_4^{(m\sigma)}(D_T)$ , то

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= O(h^2 + \tau^{m\sigma}) \text{ при } i \neq n+1, & m_\sigma &= \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0,5, \\ 2, & \sigma = 0,5, \end{cases} \\ \eta_{n+1} &= O(1), \\ \psi_i^* &= O(h^2 + \tau^2) \text{ для } i \neq n \text{ при } \theta < 0,5 \text{ или для} \\ & & & i \neq n+1 \text{ при } \theta > 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Для наилучшей схемы, как это следует из § 1, п. 11,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\eta}_i &= O(h^2 + \tau^{m\sigma}), \quad i \neq n+1, \quad \overset{\circ}{\eta}_{n+1} = O(h + \tau^{m\sigma}), \\ \overset{\circ}{\psi}_i^* &= \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\partial u(x_i + sh, \bar{t})}{\partial x} ds - u_{t,i} = \begin{cases} O(h^2 + \tau^2), & i \neq n, \quad i \neq n+1, \\ O(h + \tau^2), & i = n, \quad \theta < 0,5, \\ O(h + \tau^2), & i = n+1, \quad \theta > 0,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Для произвольной схемы имеем

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \overset{\circ}{\eta}_i + (a_i - \overset{\circ}{a}_i) u_{x,i}^{(\sigma)}, \\ \psi_i^* &= \overset{\circ}{\psi}_i^* + \varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Введем новую функцию  $\bar{\eta}$ , полагая

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{x,i} &= 0, \quad i \neq n, n+1, \quad \bar{\eta}_{x,n} = \psi_n^*, \\ \bar{\eta}_{x,n+1} &= \psi_{n+1}^*, \quad \bar{\eta}_1 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta}_i &= 0, \quad i \leq n, \quad \bar{\eta}_{n+1} = h\psi_n^*, \\ \bar{\eta}_i &= h(\psi_{n+1}^* + \psi_n^*) \text{ при } i > n+1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В результате получаем для  $\psi$  формулу

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \mu_x + \psi^{**}, \quad \mu = \eta + \bar{\eta}, \\ \psi_i^{**} &= \psi_i^*, \quad i \neq n, n+1, \quad \psi_i^{**} = 0 \text{ при } i = n, n+1, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $\eta$  определяется формулой (17),  $\bar{\eta}$  — формулами (22),  $\psi^*$  — формулой (18).

Представление погрешности аппроксимации в таком виде будет использовано в п. 5 при исследовании сходимости схемы (7) в классе разрывных коэффициентов.



Если при фиксированном  $t = \bar{t}$  выполнены условия второго локального порядка аппроксимации схемы  $\Lambda y + \varphi = 0$ :

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_i + O(h^2), \quad \frac{a_i + a_{i+1}}{2} = k_i + O(h^2),$$

$$\varphi_i = f_i + O(h^2)$$

при  $k \in C^{(3)}[0, 1]$ ,  $f \in C^{(2)}[0, 1]$ , то погрешность аппроксимации  $\psi$  схемы (7) можно представить в виде

$$\psi = v_x + \bar{\psi},$$

где  $v$  определяется условиями

$$v_1 = 0, \quad v_{x,i} = 0 \quad \text{при } i \neq n, n+1,$$

$$v_{x,n} = \psi_n, \quad v_{x,n+1} = \psi_{n+1},$$

$$\bar{\psi}_i = 0 \quad \text{при } i = n, n+1,$$

$$\bar{\psi}_i = \psi_i \quad \text{при } i \neq n, n+1.$$

Отсюда находим

$$v_i = 0, \quad i \leq n, \quad v_{n+1} = h\psi_n,$$

$$v_i = h(\psi_n + \psi_{n+1}) \quad \text{при } i > n+1.$$

Выбор того или иного представления  $\psi$  зависит от требований гладкости (в областях  $x < \xi$  и  $x > \xi$ ) решения  $u = u(x, t)$  и функций  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$ .

**4. Устойчивость и априорные оценки.** Исследуем устойчивость схемы (7) по начальным данным и по правой части. Рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda(\bar{t})(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \\ y(x, 0) &= y_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0, \\ 0 < c_1 &\leq a \leq c_2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

В гл. VI, § 1 проведено детальное исследование вопроса об устойчивости операторно-разностных двухслойных схем с весами

$$y_t + A(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad (25)$$

где  $A = A(t)$  линейный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ . При этом относительно оператора  $A$  используется информация общего характера (требуется знание лишь таких свойств оператора  $A$ , как самосопряженность и положительность).

Результаты общей теории устойчивости схемы (25) применим к нашей конкретной схеме (24).

В качестве пространства  $H$  выберем пространство  $\bar{\Omega}$  сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль

на границе (при  $i = 0, i = N$ ). Оператор  $Ay = -\Lambda y$  при  $y \in \overset{\circ}{\Omega}$ . Введем в  $\overset{\circ}{\Omega}$  скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Оператор  $A = -\Lambda$  самосопряжен и положительно определен в  $\overset{\circ}{\Omega}$ . Это следует из формул Грина (см. гл. I, § 2):

$$(y, \Lambda v) = (\Lambda y, v) \quad \text{при } y, v \in \overset{\circ}{\Omega},$$

$$(y, -\Lambda y) = (a, (y_{\bar{x}})^2) \geq c_1 \|y_{\bar{x}}\|^2 \geq 8c_1 \|y\|^2.$$

Вычислим норму  $\|\Lambda\|$  оператора  $\Lambda$ . Так как  $\Lambda$  самосопряжен, то (см. гл. I, § 3)

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|y\|=1} |(\Lambda y, y)|.$$

Подставляя сюда

$$(y, -\Lambda y) = (a, (y_{\bar{x}})^2) \leq c_2 \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4c_2}{h^2} \|y\|^2,$$

находим  $\|A\| = \|\Lambda\| \leq 4c_2/h^2$ .

В гл. VI, § 1 показано, что условие

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|} = \sigma_0 \quad (26)$$

является достаточным для устойчивости схемы (25).

В нашем случае условие (26) имеет вид

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau c_2}, \quad (26')$$

так как  $\|A\| \leq 4c_2/h^2$ .

При этом условии для задачи (25) имеет место априорная оценка (см. гл. VI, § 1, теорема 10)

$$\|y^{i+1}\| \leq \|y_0\| + M \max_{0 < j \leq i} \left\{ \|(A^{-1}\varphi)'\| + \|(A^{-1}\varphi)_i'\| \right\}, \quad (27)$$

где  $M = \text{const} > 0$  зависит только от  $T$ , а оператор  $A = A(t)$  удовлетворяет лишь условию положительной определенности  $A(t) \geq \delta E$ ,  $\delta = \text{const} > 0$ ,  $E$  — единичный оператор.

Если, кроме того,  $A(t)$  — самосопряженный оператор и

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau \|A\|},$$

где  $\varepsilon > 0$  — любое число, не зависящее от  $\tau$  и  $h$ , то для задачи (25) справедливы оценка (см. гл. VI, § 1, теорема 10)

$$\|y^{i+1}\| \leq \|y_0\| + \sqrt{\frac{T}{2\varepsilon}} \max_{0 \leq j \leq i} \|\varphi'\|_{A^{-1}(t_j)}, \quad (28)$$

где  $\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}$ .

Входящие в (27) и (28) нормы  $\|\varphi\|_{A^{-1}}$ ,  $\|A^{-1}\varphi\|$ ,  $\|(A^{-1}\varphi)_t\|$  можно заменить более простыми нормами.

Рассмотрим оператор  $\dot{A}y = -y_{\bar{x}x}$  при  $y \in \dot{\Omega}$ . Из формулы Грина  $(Ay, y) = (a, y_{\bar{x}}^2]$  следует:

$$(Ay, y) \geq c_1(1, y_{\bar{x}}^2] = c_1(\dot{A}y, y).$$

Так как  $A$  и  $\dot{A}$  самосопряженные и положительно определенные операторы, то из операторного неравенства  $A \geq c_1 \dot{A}$  следует  $c_1 A^{-1} \leq \dot{A}^{-1}$  или  $c_1(A^{-1}\varphi, \varphi) \leq (\dot{A}^{-1}\varphi, \varphi)$ .

Функция  $w = \dot{A}^{-1}\varphi$  есть решение задачи  $\dot{A}w = \varphi$  или

$$\dot{\Delta}w = w_{\bar{x}x} = -\varphi(x, t), \quad w_0 = w_N = 0.$$

Полагая  $\varphi = \mu_x$ , получаем

$$(w_{\bar{x}} + \mu)_x = 0, \quad w_{\bar{x}} = C_1 - \mu, \quad C_1 = \text{const},$$

$$w_i = C_1 x_i - \sum_{k=1}^i \mu_k h, \quad C_1 = \sum_{k=1}^N h \mu_k.$$

Оценим теперь выражение  $\|\varphi\|_{\dot{A}^{-1}}$ :

$$(\dot{A}^{-1}\varphi, \varphi) = (\dot{A}w, w) = -(w_{\bar{x}x}, w) = (1, w_{\bar{x}}^2],$$

$$\|\varphi\|_{\dot{A}^{-1}} = \|w_{\bar{x}}\| \leq |C_1| + \|\mu\| \leq 2\|\mu\|.$$

Априорная оценка (28) принимает вид

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y_0\| + \sqrt{\frac{2T}{\varepsilon c_1}} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\mu^{j'}\| \quad \text{при } \varphi = \mu_x, \quad (29)$$

если выполнено условие  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ .

Обратимся теперь к выражению  $\|A^{-1}\varphi\| + \|(A^{-1}\varphi)_t\| = \|w\| + \|\dot{w}_t\|$ , где  $w = A^{-1}\varphi$  есть решение задачи  $Aw = \varphi$  или  $\Delta w = (aw_{\bar{x}})_x = -\varphi(x, \bar{t})$ ,  $w_0 = w_N = 0$ .

Полагая  $\varphi = \mu_x$ , находим

$$w_{\bar{x}, i} = \frac{C_1 - \mu_i}{a_i}, \quad C_1 = \left( \sum_{k=1}^N \frac{h\mu_k}{a_k} \right) \left| \sum_{k=1}^N \frac{h}{a_k} \right|,$$

$$w_i = C_1 \sum_{k=1}^i \frac{h}{a_k} - \sum_{k=1}^i \frac{\mu_k}{a_k} h.$$

Функция  $z = w_i$  определяется из условий

$$(az_{\bar{x}})_x = -\bar{\mu}_x, \quad \bar{\mu} = \mu_{\bar{t}} + a_{\bar{t}} \dot{w}, \quad z_0 = z_N = 0$$

по формуле для  $w_i$ , если в ней заменить  $\mu$  на  $\bar{\mu}$ .

Из явных выражений для  $\omega$  и  $\omega_t$  легко получить оценки

$$\left. \begin{aligned} \|\omega\| &\leq \frac{2}{c_1} \sum_{k=1}^N h |\mu_k| = \frac{2}{c_1} (1, |\mu|), \\ \|\omega_t\| &\leq \frac{2}{c_1} \{(1, |\mu_t|) + c_3 \|\dot{\omega}\|\} \leq \frac{2}{c_1} \left\{ (1, |\mu_t|) + \frac{2c_3}{c_1} (1, |\mu|) \right\}, \end{aligned} \right\} (30)$$

где  $c_1$  и  $c_3$  — постоянные из (8) и (9).

Подставляя  $\|\omega\|$  и  $\|\omega_t\|$  в (27), получаем для решения задачи (24) при  $\varphi = \mu_x$  следующую априорную оценку:

$$\|y^{i+1}\| \leq \|y_0\| + M \max_{0 < i' \leq i} \{(1, |\mu^{i'}|) + (1, |\mu_t^{i'}|)\}, \quad (31)$$

если выполнено условие (26').

Чтобы получить оценку решения задачи (25) в энергетической норме  $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ , потребуем выполнение условий:

$$\left. \begin{aligned} &A(t) \text{ самосопряженный положительно определенный оператор,} \\ &A(t) \text{ удовлетворяет условию Липшица по } t: \\ &|(A(t) - A(t - \tau))y, y| \leq \tau c_3 (A(t - \tau)y, y) \text{ для всех } y \in H. \end{aligned} \right\} (32)$$

Это неравенство для нашего оператора  $A(t) = -\Lambda(t)$  выполняется, если потребовать, чтобы

$$|a(x, t) - a(x, t - \tau)| \leq \tau c_3 a(x, t - \tau) \quad \text{или} \quad |a_t| \leq c_3 \dot{a},$$

где  $c_3 = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} |(A(t) - A(t - \tau))y, y| &= |((\Lambda - \dot{\Lambda})y, y)| = \\ &= |((a - \dot{a})y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})| = \tau |(a_t y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})| \leq \tau c_3 (\dot{a} y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}) = \tau c_3 (\dot{A}y, y). \end{aligned}$$

В силу теорем 12, 13 из гл. VI, § 1 для схемы (25) имеют место следующие априорные оценки:

1) Если выполнены условия (32) и  $\sigma \geq \sigma_0$ , то

$$\|y^{i+1}\|_{A(t_j)} \leq M_1 \|y_0\|_{A(0)} + M_2 \max_{0 < i' \leq i} [\|\Phi^{i'}\|_{A^{-1}(t_{i'})} + \|\Phi_t^{i'}\|_{A^{-1}(t_{i'})}]. \quad (33)$$

2) Если выполнены условия (32) и  $\sigma \geq \sigma_e$ , то

$$\|y^{i+1}\|_{A(t_j)} \leq M_1 \|y_0\|_{A(0)} + \frac{M_2}{\sqrt{e}} \max_{0 \leq i' \leq i} \|\Phi^{i'}\|. \quad (34)$$

Здесь  $M_1, M_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $\tau$  и  $h$ .

В нашем случае  $Ay = -\Lambda y = -(ay_{\bar{x}})_x$ ,  $\dot{A}y = -y_{\bar{x}x}$ , так что

$$(Ay, y) \geq c_1 (\dot{A}y, y), \quad (A^{-1}y, y) \leq \frac{1}{c_1} (\dot{A}^{-1}y, y). \quad (35)$$

Учитывая (33) — (35), оценки для  $(\dot{A}\omega, \omega)$ ,  $\omega = \dot{A}^{-1}\varphi$  и неравенство

$$\|y\|_C \leq 0,5 \|y_{\bar{x}}\|,$$

получим для решения задачи (24) в случае  $y_0 = 0$  следующие оценки:

$$\|y^{j+1}\|_C \leq M_2 \max_{0 < j' \leq j} (\|\mu^{j'}\| + \|\mu_{i'}^{j'}\|) \quad (33')$$

при  $\sigma \geq \sigma_0$  и  $\varphi = \mu_x$ ,

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \frac{M_2}{V\epsilon} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\| \quad (34')$$

при  $\sigma \geq \sigma_\epsilon$ , где  $\sigma_\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\epsilon)h^2}{4\tau c_2}$ .

Отсюда видно, что схема (24) при  $\sigma \geq 0,5$  абсолютно устойчива. Явная схема ( $\sigma = 0$ ), как это видно из (26'), устойчива при

$$\tau \leq 0,5h^2/c_2 = \tau_0,$$

т. е. условно устойчива. Величина максимального допустимого шага  $\tau_0$  зависит от максимума  $c_2$  коэффициента теплопроводности так, что  $\tau_0 \rightarrow 0$  при  $c_2 \rightarrow \infty$ . Поэтому пользоваться явными схемами для уравнения (1) с большим коэффициентом теплопроводности  $k(x, t)$  нецелесообразно.

Из оценок (33) и (34) устойчивость в  $C$  по начальным данным не следует. Соответствующие оценки в норме  $C$  можно получить при помощи принципа максимума. Для этого запишем уравнение (24) в виде

$$-\sigma\tau\Lambda\hat{y} + \hat{y} = F, \quad F = y + (1-\sigma)\tau\Lambda y + \tau\varphi$$

или

$$\left. \begin{aligned} A_i\hat{y}_{i-1} - C_i\hat{y}_i + A_{i+1}\hat{y}_{i+1} &= -F_i, \quad 0 < i < N, \quad \hat{y}_0 = \hat{y}_N = 0, \\ \bullet \quad A_i &= \tau\sigma a_i/h^2, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + D_i, \quad D_i = 1. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

В гл. I, § 2, п. 5 для уравнения (36) с правой частью  $F_i D_i$  при условии  $A_i > 0$ ,  $D_i > 0$  доказан принцип максимума и получена априорная оценка

$$\|\hat{y}\|_C \leq \|F\|_C. \quad (37)$$

В нашем случае  $D_i = 1$ ,  $F_i = F_i D_i$  и

$$F_i = \left(1 - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} (a_i + a_{i+1})\right) y_i + \frac{\tau(1-\sigma)}{h^2} (a_i y_{i-1} + a_{i+1} y_{i+1}) + \tau\varphi_i. \quad (38)$$

Пусть выполнены условия

$$0 < \sigma \leq 1, \quad 2(1-\sigma)\tau c_2 \leq h^2.$$

Тогда  $A_i > 0$  и все коэффициенты при  $y_i, y_{i-1}, y_{i+1}$  в (38) неотрицательны, поэтому  $\|F\|_C \leq \|y\|_C + \tau\|\varphi\|_C$  и из (37) получаем

$$\|y^{j'+1}\|_C \leq \|y^{j'}\|_C + \tau\|\varphi^{j'}\|_C, \quad j' = 0, 1, \dots, j.$$

Суммируя по  $j'$  от 0 до  $j$ , имеем

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y_0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau\|\varphi^{j'}\|_C. \quad (39)$$

Эта же оценка справедлива и для явной схемы ( $\sigma = 0, A_i = 0$ ).

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)c_2}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad (40)$$

то для задачи (24) справедлив принцип максимума и имеет место априорная оценка (39) в равномерной метрике  $\|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i|$ .

Из (40) видно, что при  $\sigma = 1$  оценка (39) верна при любых  $\tau$  и  $h$ , т. е. схема с опережением абсолютно устойчива в  $C$ . Для явной схемы,  $\sigma = 0$ , оценка (39) верна при условии (35).

Рассмотренные в этом пункте априорные оценки мы применим для исследования скорости сходимости разностной схемы (7)–(9).

**5. Сходимость и точность.** Чтобы выяснить скорость сходимости или порядок точности схемы (7)–(9) как в классе непрерывных так и разрывных коэффициентов, нужно оценить решение задачи (13), учитывая при этом структуру погрешности аппроксимации (16)–(23).

Рассмотрим сначала случай непрерывных и достаточно гладких коэффициентов  $k$  и  $f$ .

Пусть схема имеет второй порядок локальной аппроксимации, т. е.  $\psi = O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ .

Оценка (34') принимает вид

$$\|z^{j+1}\|_C \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\psi^{j'}\| \quad \text{при} \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau c_2}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость схемы (7)–(9) со скоростью  $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ , если выполнены условия, при которых

$$\|\psi\| = O(h^2 + \tau^{m_\sigma}), \quad m_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0,5, \\ 2, & \sigma = 0,5. \end{cases}$$

Займемся теперь исследованием вопроса о сходимости схем (7) в классе разрывных коэффициентов. Представим  $z$  в виде

суммы  $z = v + w$ , где  $v$  и  $w$  — решения задач

$$v_t = \Lambda v^{(\sigma)} + \mu_x, \quad v(x, 0) = 0, \quad v_0 = v_N = 0, \quad \mu = \eta + \bar{\eta}, \quad (41)$$

$$w_t = \Lambda w^{(\sigma)} + \psi^{**}, \quad w(x, 0) = 0, \quad w_0 = w_N = 0. \quad (42)$$

Наиболее слабые требования к правой части предъявляет априорная оценка (29), которая для задач (42) и (41) при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  имеет вид

$$\|w^{j+1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\psi^{**j'}\|_{(-2)}, \quad (43)$$

$$\|v^{j+1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \max_{0 \leq j' \leq j} (1, |\mu^{j'}|), \quad (44)$$

где  $\mu = \eta + \bar{\eta}$ ,  $\psi^{**}$  определяются формулами (17), (18), (22) и (23).

При этом  $v$  и  $w$  оцениваются в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$ .

Из (20) следует, что

$$(1, |\eta|) = O(h^2) + |\eta_{n+1}|h = O(h), \quad \text{так как } \eta_{n+1} = O(1).$$

Для  $\bar{\eta}$  получаем оценку

$$(1, |\bar{\eta}|) \leq h^2 |\psi_n| + h(\psi_n + \psi_{n+1}) = O(h).$$

Априорная оценка (44) дает

$$\|v^{j+1}\| = O(h + \tau^{m\sigma}).$$

Из априорной оценки (43) следует

$$\|w^{j+1}\| = O(h^2 + \tau^2), \quad \text{так как } \psi^{**} = O(h^2 + \tau^2).$$

Объединяя оценки для  $\|v\|$  и  $\|w\|$ , получаем

$$\|z^{j+1}\| = O(h + \tau^{m\sigma}).$$

Для наилучшей схемы имеем

$$\overset{\circ}{\eta}_i = O(h^2 + \tau^{m\sigma}), \quad i \neq n+1, \quad \overset{\circ}{\eta}_{n+1} = O(h + \tau^{m\sigma}),$$

$$\overset{\circ}{\psi}_n = O(1), \quad \overset{\circ}{\psi}_{n+1} = O(1), \quad \overset{\circ}{\psi}_n + \overset{\circ}{\psi}_{n+1} = O(h + \tau^{m\sigma}),$$

так что

$$(1, |\overset{\circ}{\eta}|) = O(h^2 + \tau^{m\sigma}), \quad \overset{\circ}{\psi}^{**} = O(h^2 + \tau^2).$$

Отсюда и из (43), (44) заключаем, что наилучшая схема имеет точность  $O(\tau^{m\sigma} + h^2)$  в классе разрывных функций  $k, f \in Q^{(2)}[0, 1]$ .

Будем предполагать, что  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и функция  $u(x, t)$  в областях непрерывности  $k$  и  $f$  являются столь гладкими, что выполнены условия

$$\eta_i = O(h^2 + \tau^{m\sigma}), \quad i \neq n+1, \quad \psi_i^* = O(h^2 + \tau^2), \quad i \neq n, n+1. \quad (45)$$

Из предыдущего следует, что верна

**Теорема 2.** Пусть  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  имеют конечное число разрывов первого рода на прямых, параллельных оси координат  $Ot$ , и выполнены условия (45) и (9). Тогда любая схема (7) с

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau c_2}, \quad \varepsilon > 0$$

имеет в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$  точность  $O(h + \tau^{m_\sigma})$ , а наилучшая схема с коэффициентами  $\dot{a}$ ,  $\dot{\varphi}$  имеет точность  $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ , где  $m_\sigma = 1$  при  $\sigma \neq 0,5$ ,  $m_\sigma = 2$  при  $\sigma = 0,5$ . В классе гладких функций  $k$  и  $f$  любая схема (7) имеет в сеточной норме  $C$  точность  $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ .

Чтобы получить оценку точности в норме сеточного пространства  $C$  (равномерную оценку), следует воспользоваться априорными оценками (33') для  $v$  и (34') для  $w$ . Для  $v$  и  $w$  эти оценки принимают вид

$$\|v^{j+1}\|_C \leq M \max_{0 < j' \leq j} (\|\mu^{j'}\| + \|\mu_t^{j'}\|), \quad \mu = \eta + \bar{\eta}, \quad (46)$$

$$\|w^{j+1}\|_C \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \|\psi^{**j'}\|. \quad (47)$$

Так как  $\eta_{n+1} = O(1)$ , то  $\|\eta\| \leq |\eta_{n+1}| \sqrt{h} + O(h^2) = O(\sqrt{h})$  и  $\|v^{j+1}\|_C = O(\sqrt{h} + \tau^{m_\sigma})$ . Далее имеем  $\|\bar{\eta}\| \leq h^{3/2} |\psi_n| + h |\psi_n + \psi_{n+1}| \leq M(h + \tau^{m_\sigma})$  и, следовательно,

$$\|z^{j+1}\|_C = O(\sqrt{h} + \tau^{m_\sigma}). \quad (48)$$

Для наилучшей схемы получаем оценку

$$\|z^{j+1}\|_C = O(h^{3/2} + \tau^{m_\sigma}). \quad (48')$$

Потеря половины порядка по  $h$  ( $\sqrt{h}$  вместо  $h$ ), очевидно, связана с методом исследования.

Пользуясь принципом максимума, можно доказать равномерную сходимость со скоростью  $O(\tau^{m_\sigma} + h)$  при условии  $\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)c_2}$ .

Мы рассмотрим схему с опережением ( $\sigma = 1$ ). Для ее погрешности  $z = y - u$  имеем задачу

$$\left. \begin{aligned} z_t &= \Lambda \hat{z} + \psi, \quad \psi = \mu_x + \psi^{**}, \quad \mu = \eta + \bar{\eta}, \\ z(x, 0) &= 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Решение этой задачи оцениваем методом выделения «стационарных неоднородностей», полагая

$$z = v + w,$$



где  $w$  — решение стационарной задачи:

$$\Lambda \hat{w} + \mu_x = 0, \quad \hat{w}_0 = \hat{w}_N = 0, \quad (50)$$

а  $v$  определяется условиями

$$\left. \begin{aligned} v_t &= \Lambda \hat{v} + \bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi^{**} - w_t, \\ v(x, 0) &= -w(x, 0), \quad v_0 = v_N = 0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Для  $w$  и  $w_t$ , согласно п. 4, справедливы оценки

$$\|w\|_C \leq M(1, |\mu|), \quad \|w_t\|_C \leq M\{(1, |\mu|) + (1, |\mu_t|)\}. \quad (52)$$

Для сеточной функции  $v$ , в силу теоремы 1, при любых  $\tau$  и  $h$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|v^{j+1}\|_C &\leq \|w(x, 0)\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\bar{\psi}^{j'}\|_C \leq \\ &\leq \|w(x, 0)\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|w_t^{j'}\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{**j'}\|_C. \end{aligned} \quad (53)$$

Отсюда и из предыдущих неравенств следует:

$$\|v^{j+1}\|_C \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} [(1, |\mu^{j'}|) + (1, |\mu_t^{j'}|)] + \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{**j'}\|_C. \quad (54)$$

Так как  $(1, |\mu|) + (1, |\mu_t|) = h(|\mu_n| + |\mu_{n+1}| + |\mu_{t,n}| + |\mu_{t,n+1}|) + O(h^2 + \tau)$ ,  $\psi^{**} = O(\tau^2 + h^2)$ , то

$$(1, |\mu|) + (1, |\mu_t|) + \|\psi^{**}\|_C = O(\tau + h)$$

для любой схемы (7) и

$$(1, |\mu|) + (1, |\mu_t|) + \|\psi^{**}\|_C = O(\tau + h^2)$$

для наилучшей схемы.

Тем самым доказано, что в классе разрывных функций  $k$  и  $f$  любая схема (7) при  $\sigma = 1$  равномерно сходится со скоростью  $O(\tau + h)$ , а наилучшая схема (7) с  $\sigma = 1$  равномерно сходится со скоростью  $O(\tau + h^2)$ .

Для дифференциального уравнения

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t) u + f(x, t), \quad q \geq 0, \quad c > 0$$

схема с весами имеет вид

$$p(x, \bar{t}) y_t = (a(x, \bar{t}) (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y)_{\bar{x}} - d(x, \bar{t}) (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \varphi(x, \bar{t})),$$

где коэффициенты  $\rho$  и  $d$  вычисляются по тем же формулам, что и  $\Phi$ :

$$\rho_i = F[c(x_i + sh, \bar{t})], \quad d_i = F[q(x_i + sh, \bar{t})].$$

Если  $F[\bar{f}(s)] = \int_{-0,5}^{0,5} \bar{f}(s) ds$ ,  $A[\bar{k}(s)] = \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{\bar{k}(s)} \right)^{-1}$ , то мы полу-

чаем наилучшую схему с коэффициентами  $\overset{\circ}{a}$ ,  $\overset{\circ}{d}$ ,  $\overset{\circ}{\rho}$ ,  $\overset{\circ}{\Phi}$ , где

$$\overset{\circ}{a} = \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{k(x + sh, \bar{t})} \right)^{-1}, \quad \overset{\circ}{\Phi}_i = \int_{-0,5}^{0,5} f(x_i + sh, \bar{t}) ds$$

и т. д. Эта схема сходится при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$  со скоростью  $O(h^2 + \tau^{m\sigma})$  в классе разрывных функций  $k, q, f, c$ , имеющих конечное число неподвижных разрывов. В случае  $\sigma = 1$  наилучшая схема сходится со скоростью  $O(\tau + h^2)$  равномерно (в  $C$ ) при любых  $\tau, h$  в классе разрывных коэффициентов. Отметим, что при выводе априорных оценок требуется дифференцируемость  $k$  и  $q$  по  $t$ .

**6. Однородные схемы на неравномерных сетках.** На практике часто применяются неравномерные по  $x$  и  $t$  сетки. Неравномерность сетки по  $t$  для двухслойной схемы не вносит никаких изменений в написанные выше формулы и оценки. Следует лишь иметь в виду, что шаг  $\tau = \tau_j$  зависит от номера слоя  $j$ . Порядок аппроксимации по времени при этом не меняется. Случай, когда сетка неравномерна по  $x$ , требует специального исследования, которое проводится по аналогии с § 1.

Пусть  $\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$  — сетка на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с шагами  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Оператор  $L$ , согласно § 1, аппроксимируется разностным оператором

$$\Delta y = (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}}, \quad a = a(x, \bar{t}),$$

где  $a$  вычисляется по формуле (см. § 1, п. 13)

$$a(x_i, \bar{t}) = A[k(x_i + sh, \bar{t})],$$

правая часть, например, по формулам (общую формулу для  $\Phi$  см. в § 1, п. 13):

$$\overset{\circ}{\Phi}_i = \overset{\circ}{\Phi}_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_i - 1/2}^{x_i + 1/2} f(x, \bar{t}) dx, \quad \Phi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\bar{h}_i},$$

$$f_i^- = f(x_i - 0, \bar{t}), \quad f_i^+ = f(x_i + 0, \bar{t}).$$

Приведем простейшие формулы для  $a_i$ :

$$\overset{\circ}{a}_i = \left( \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad a_i = \frac{2k_i^- k_{i-1}^+}{k_i^- + k_{i-1}^+},$$

$$a_i = 0,5 (k_i^- + k_{i-1}^+), \quad a_i = 0,5 (k_{i-1/2}^+ + k_{i-1/2}^-)$$

и др.

Рассмотрим схему с весами

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda(\bar{t})(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad 0 \leq t = j\tau < T, \\ y(x, 0) &= y_0(x), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \\ \Lambda(\bar{t})y &= (a(x, \bar{t})y_{\bar{x}})_x, \quad 0 < c_1 \leq a \leq c_2. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Приведем схему к счетному виду. Известно значение  $y^j$  на слое  $t = t_j$ , требуется определить  $y^{j+1}$  на новом слое  $t = t_{j+1}$  из условий

$$A_i \hat{y}_{i-1} - C_i \hat{y}_i + B_i \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\hat{y}_0 = u_1(t_{j+1}), \quad \hat{y}_N = u_2(t_{j+1}),$$

$$A_i = \frac{\sigma a_i \tau}{h_i \bar{h}_i}, \quad B_i = \frac{\sigma a_{i+1} \tau}{h_{i+1} \bar{h}_i}, \quad C_i = A_i + B_i + 1,$$

$$F_i = \left[ 1 - \frac{(1-\sigma)\tau}{\bar{h}_i} \left( \frac{a_i}{h_i} + \frac{a_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \right] y_i +$$

$$+ \frac{(1-\sigma)\tau}{\bar{h}_i} \left( \frac{a_i y_{i-1}}{h_i} + \frac{a_{i+1} y_{i+1}}{h_{i+1}} \right) + \varphi_i.$$

Эта задача решается методом прогонки.

Пусть  $y_i^j$  — решение этой задачи,  $u(x, t)$  — решение исходной задачи (1)–(3),  $z_i^j = y_i^j - u_i^j$  — погрешность схемы (55). Подставляя в (55)  $y = z + u$ , получаем для  $z$  задачу

$$\left. \begin{aligned} z_t &= \Lambda(\bar{t})(\sigma z + (1 - \sigma)z) + \psi(x, t), \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad 0 \leq t = j\tau < T, \\ z(x, 0) &= 0, \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где

$$\psi(x, t) = \Lambda(\bar{t})(\sigma u + (1 - \sigma)u) + \varphi - u_t \quad (57)$$

погрешность аппроксимации задачи (1)–(3) схемой (55).

Воспользуемся уравнением баланса (6) на отрезке

$$x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad \text{где} \quad x_{i-1/2} = x_i - 0,5h_i, \quad x_{i+1/2} = x_i + 0,5h_{i+}$$

Разделим обе части тождества (6) на  $\hbar_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$  и вычтем полученное тождество из (57). Тогда получим

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad (58)$$

$$\eta_i = a_i \left( \frac{\hat{u}_{\bar{x}} + u_{\bar{x}}}{2} \right)_i - \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_{i-1/2}}^{t=\bar{t}} + (\sigma - 0,5) \tau a_i u_{\bar{x}t, i}, \quad (59)$$

$$\psi_i^* = \varphi_i - \overset{\circ}{\varphi}_i + \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} dx - u_{t, i}, \quad \overset{\circ}{\varphi}_i = \frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, \bar{t}) dx. \quad (60)$$

Предположим, что в точке  $x = x_i$  функции  $k$  и  $f$  имеют разрывы первого рода, а в интервалах  $(x_{i-1}, x_i)$  и  $(x_i, x_{i+1})$  дифференцируемы достаточное число раз. При  $x = x_i$  выполняются условия сопряжения

$$[u] = 0, \quad \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{при} \quad x = x_i.$$

Согласно § 1, п. 13 имеем

$$\overset{\circ}{\varphi}_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\hbar_i} + \frac{1}{8} \left( h_i^2 (f')_i^- \right)_{x, i} + O(\hbar_i^2), \quad (61)$$

$$\frac{1}{\hbar_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u(x, \bar{t})}{\partial t} dx = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i + \frac{1}{8} \left( h_i^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_i^- \right)_{x, i} + O(\hbar_i^2), \quad (62)$$

где  $f_i^- = f(x_i - 0, \bar{t})$ ,  $f_i^+ = f(x_i + 0, \bar{t})$ . Мы учли, что  $\frac{\partial u}{\partial t}$  непрерывна на линии разрыва  $k(x, t)$ , параллельной оси  $Ot$ .

Подставляя (61) и (62) в (58) — (60), получим

$$\psi = \mu_x + \psi^{**}, \quad \mu = \eta + \eta^*, \quad (63)$$

$$\eta_i^* = \frac{h_i^2}{8} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^- + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_i^- \right], \quad (64)$$

$\eta_i$  дается формулой (59),

$$\psi_i^{**} = \varphi_i - \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\hbar_i} + \left( \frac{\partial u}{\partial t} - u_t \right)_i + O(\hbar_i^2).$$

Определяя  $\varphi_i$  по формуле (84) из § 1, п. 13 мы получим для  $\varphi_i$  разложение (87), § 1, п. 13:

$$\varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\hbar_i} + \alpha \left( h_i^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^- \right)_{x, i} + O(\hbar_i^2), \quad (65)$$

где  $\alpha$  — постоянная, зависящая от выбора шаблонного функционала  $F[\bar{f}(s)]$ . Возьмем простейшую формулу для  $\varphi_i$ :

$$\varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i}. \quad (66)$$

Тогда для  $\psi_i^{**}$  получим оценку

$$\psi_i^{**} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} - u_t \right)_i + O(h_i^2) = O(h_i^2 + \tau^2), \quad (67)$$

если вне разрыва  $u(x, t)$  имеет производные  $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ ,  $\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$ .

Перейдем к выяснению точности схемы. Для этого нам понадобятся априорные оценки (27), (28), (33), (34) решения задачи (56).

Рассмотрим пространство  $\hat{\Omega} = H$  сеточных функций, заданных на сетке  $\hat{\omega}_h$  и равных нулю на границе (при  $x = 0$ ,  $x = 1$ ). Введем в  $H$  скалярные произведения

$$(y, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \quad (y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h_i, \quad (y, v] = \sum_{i=1}^N y_i v_i h_i$$

и норму

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Рассмотрим оператор  $Ay = -\Delta y$  при  $y \in H$ . Из тождества

$$(Ay, v) = (-\Delta y, v)_* = (ay_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] = (y, Av) \quad (68)$$

следует, что  $A$  — самосопряженный оператор.

Первая формула Грина и замечание к лемме 1 из гл. I, § 2, п. 3 дают

$$(Ay, y) = (- (ay_{\bar{x}})_{\bar{x}}, y)_* = (a, y_{\bar{x}}^2] \geq c_1 (1, y_{\bar{x}}^2] \geq 2c_1 \|y\|^2, \quad (69)$$

т. е.  $A$  — положительно определенный оператор. Так как  $|a_t| \leq \leq c_3 a$ , то  $A = A(t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$  (32) с постоянной  $c_3$ . Для нормы  $\|A\|$  оператора  $A$  имеем оценку

$$\|A\| \leq 4c_2/h_{\min}^2, \quad h_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} h_i. \quad (70)$$

В самом деле  $\|A\| = \sup_{y \neq 0} \frac{(Ay, y)}{\|y\|^2}$ ,  $(Ay, y) = (a, y_{\bar{x}}^2] \leq c_2 (1, y_{\bar{x}}^2] \leq \leq \frac{4c_2}{h_{\min}^2} \|y\|^2$ , т. е.  $\|A\| \leq 4c_2/h_{\min}^2$ .

Для разностной задачи (56) с правой частью (63) справедлива оценка

$$\|z^{l+1}\|_C \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ \max_{0 < l' \leq l} (\|\mu^{l'}\| + \|\mu_{\bar{t}}^{l'}\|) + \max_{0 \leq l' \leq l} \|\psi^{**l'}\| \right\} \quad (71)$$

при условии

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{h_{\min}^2 (1 - \varepsilon)}{4\tau c_2}. \quad (72)$$

Положим  $z = v + w$ , где  $v$  — удовлетворяет (56) с правой частью  $\psi = \mu_x$ , а  $w$  — решение задачи (56) с  $\psi = \psi^{**}$ . Для оценки  $v$  воспользуемся (33) или (33'), для оценки  $w$  — неравенством (34'). Отсюда и из неравенства  $\|z\|_C \leq \|v\|_C + \|w\|_C$  получаем оценку (71).

Предположим, что коэффициенты  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  гладкие и выполнены условия, при которых

$$\mu_i = O(h_i^2 + \tau^{m_\sigma}), \quad \mu_{t,i} = O(h_i^2 + \tau^{m_\sigma}), \quad \psi^{**} = O(h_i^2 + \tau^2). \quad (73)$$

Тогда схема (55) на любой последовательности неравномерных сеток равномерно сходится со скоростью  $O(\tau^{m_\sigma} + h_0^2)$ ,  $h_0 = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ , при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ . Это следует из (71) и (73).

Рассмотрим вопрос о сходимости схемы (55) в классе разрывных коэффициентов.

В дальнейшем будем предполагать, что

I. Функции  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  могут иметь конечное число разрывов первого рода на прямых, параллельных оси координат  $Ot$ .

II. Сетка  $\hat{\omega}_h(K)$  выбрана так, что все линии разрыва функций  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  проходят через узлы этой сетки.

III. В областях между линиями разрыва функции  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и  $u(x, t)$  достаточное число раз дифференцируемы, так что во всех узлах сетки  $\hat{\omega}_h(K)$  имеют место формулы (63) — (65) и справедливы оценки

$$\mu_i = O(h_i^2 + \tau^{m_\sigma}), \quad \mu_{t,i} = O(h_i^2 + \tau^{m_\sigma}), \quad (74)$$

$$\psi_i^{**} = O(h_i^2 + \tau^2), \quad m_\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0,5, \\ 2, & \sigma = 0,5. \end{cases} \quad (75)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия I—III. Тогда при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  схема (55), (56) в классе разрывных коэффициентов  $k, f$  на специальных последовательностях сеток  $\hat{\omega}_h(K)$  равномерно сходится со скоростью  $O(\tau^{m_\sigma} + h_0^2)$ , где  $h_0 = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ .

Для доказательства теоремы достаточно использовать (71) и (75).

**Замечание 1.** Сходимость со скоростью  $O(\tau^{m_\sigma} + h_0^2)$  в сеточной норме  $L_2(\hat{\omega}_h)$  имеет место при более слабом условии III:

$$\mu_i = O(h_i^2 + \tau^{m_\sigma}), \quad \psi_i^{**} = O(h_i^2 + \tau^2). \quad (76)$$

Это следует из априорной оценки (29):

$$\|z^{j+1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\mu^{j'}\| + (1, |\Psi^{**j'}|)) \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_{\varepsilon}. \quad (77)$$

**Замечание 2.** Для схемы с опережением ( $\sigma = 1$ ) равномерную сходимость со скоростью  $O(\tau + h_0^2)$  можно доказать, по аналогии с п. 5, при помощи принципа максимума и метода стационарных неоднородностей. Верны оценки (39) и (30'), из которых, в силу (75), следует, что  $\|z\|_C = O(\tau + h_0^2)$ .

**7. Монотонные схемы для параболических уравнений общего вида.** Рассмотрим для параболического уравнения общего вида следующую задачу в  $\bar{D}_T = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ :

$$\left. \begin{aligned} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ Lu &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u, \\ 0 < c_1 &\leq k(x, t) \leq c_2, \quad c(x, t) \geq c_1 > 0, \quad q \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

В § 1, п. 15 были получены монотонные схемы второго порядка точности для стационарного уравнения  $Lu + f = 0$ , разрешимые при любых  $h$  и  $r(x)$ .

Чтобы получить для (78) монотонную схему, для которой справедлив принцип максимума при любых  $h$  и  $\tau$ , рассмотрим уравнение с возмущенным оператором  $\tilde{L}$ :

$$\left. \begin{aligned} c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= \tilde{L}u + f, \quad \tilde{L}u = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r \frac{\partial u}{\partial x} - qu, \\ \kappa &= (1 + R)^{-1}, \quad R = 0,5h|r|/k. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Оператор  $\tilde{L}$  при фиксированном  $t = \bar{t} = t_{j+1/2}$  аппроксимируем разностным оператором (см. § 1, п. 15)

$$\tilde{\Delta}y = \kappa (ay_{\bar{x}})_x + b^+ a^{(+1)} y_x + b^- ay_{\bar{x}} - dy,$$

где

$$\begin{aligned} a &= A[k(x + sh, \bar{t})], \quad d = F[q(x + sh, \bar{t})], \quad b^{\pm} = F[\tilde{r}^{\pm}(x + sh, \bar{t})], \\ \tilde{r}^{\pm} &= r^{\pm}/k, \quad r^+ = 0,5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0,5(r - |r|) \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  и  $F$  те же шаблонные функционалы, что и в § 1; они обеспечивают второй порядок аппроксимации.

Для уравнения (79) пишется чисто неявная (четырёхточечная) однородная схема

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, \bar{t}) y_t &= \tilde{\Delta}(\bar{t}) \hat{y} + \varphi, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Коэффициенты  $\rho$ ,  $\varphi$  вычисляются по тем же формулам, что и  $d$ ,  $b^\pm$ . Погрешность аппроксимации этой схемы, в силу построения оператора  $\tilde{\Lambda}$  (см. § 1, п. 15), есть  $\psi = O(\tau + h^2)$ .

Так же, как и в предыдущем пункте, можно показать, что для задачи (80) с  $u_1 = u_2 = 0$  при любых  $h$  и  $\tau$  справедлива оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \frac{1}{\rho_*} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C,$$

где  $\rho_* = \min_{\omega_{h\tau}} \rho(x, t)$ . При этом существенно используется монотонность оператора  $\tilde{\Lambda}(t)$ . Из этой оценки следует равномерная сходимость схемы (80) со скоростью  $O(\tau + h^2)$ .

**8. Цилиндрически- и сферически-симметричные задачи теплопроводности.** При изучении процессов теплопроводности или диффузии в телах, имеющих форму цилиндра, естественно пользоваться цилиндрической системой координат  $(r, \varphi, z)$ . Если температура не зависит от  $\varphi$  и  $z$ , то мы приходим к уравнению (обозначим  $x = r$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t). \quad (81)$$

В случае сферической симметрии уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t). \quad (81')$$

В § 1, п. 18 были изучены однородные схемы для стационарных уравнений в сферической и цилиндрической системах координат.

Рассмотрим уравнение более общего, чем (81) и (81') вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad k(x, t) \geq c_1 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

При  $n = 1$  получаем уравнение (81), при  $n = 2$  — уравнение (81'). При  $x = 0$  ставится естественное условие ограниченности решения, которое дает

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n k \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (82')$$

а при  $x = 1$  — обычное условие (первого или третьего рода), например,

$$u(1, t) = \mu_2(t). \quad (82'')$$



Разностную схему с весами для уравнения (82) можно, по аналогии с п. 1, получить интегро-интерполяционным методом. Оператор

$$Lu = \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n k \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

при этом аппроксимируется разностным оператором

$$\Lambda(\bar{t})y = \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n a(x, \bar{t}) y_{\bar{x}})_x, \quad \bar{x} = x - 0,5h, \quad \bar{t} = t + 0,5\tau,$$

$$a(x, \bar{t}) = A[k(x + sh, \bar{t})]$$

или

$$\Lambda y_i = \frac{1}{x_i^n} (x_i^{n-1/2} a_i y_{\bar{x}, i})_{x, i}.$$

В задаче (82) — (82'') ставим в соответствие схему с весами

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda(\bar{t})y^{(\sigma)} + \varphi, & 0 < x = ih < 1, & \quad t = j\tau > 0, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & y(1, t) &= \mu_2(t), \\ y^{(\sigma)} &= \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Формула для правой части  $\varphi$  дается ниже (см. (85)). Условие (82') аппроксимируется разностным условием

$$a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{h}{2(n+1)} (y_{t,0} - f_0), \quad f_0 = f(0, \bar{t}). \quad (84)$$

Погрешность аппроксимации условия (82') условием (84)

$$\begin{aligned} v &= a_1 u_{x,0}^{(\sigma)} - \frac{h}{2(n+1)} (u_{t,0} - f_0) = O(h^2 + \tau^m \sigma), \\ m_\sigma &= \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0,5, \\ 2, & \sigma = 0,5. \end{cases} \end{aligned}$$

В самом деле, по аналогии с § 1, п. 18, убеждаемся, что

$$u'_0 = 0, \quad (ku')'_0 = \frac{1}{n+1} (\dot{u}_0 - \dot{f}_0)$$

(точка обозначает дифференцирование по  $t$ , штрих — дифференцирование по  $x$ ).

Учитывая затем, что

$$a_1 = k_0 + 0,5hk'_0 + O(h^2),$$

$$u_{x,0} = u'_0 + 0,5hu''_0 + O(h^2),$$

$$u_x^{(\sigma)} = (\sigma - 0,5)\tau u_{xt} + 0,5(\dot{u}_x + u_x) = u_x(0, \bar{t}) + O(|\sigma - 0,5|\tau),$$

получаем

$$\begin{aligned} v &= a_1 u_x(0, \bar{t}) - \frac{h}{2(n+1)} (\dot{u}_0 - f_0) + O(\tau^m \sigma) = \\ &= (ku')_0 + 0,5h(ku')'_0 - \frac{h}{2(n+1)} (\dot{u}_0 - f_0) + O(h^2 + \tau^m \sigma) = \\ &= 0,5h \left( (ku')'_0 - \frac{\dot{u}_0 - f_0}{n+1} \right) + O(h^2 + \tau^m \sigma), \\ v &= O(h^2 + \tau^m \sigma). \end{aligned}$$

Для решения системы разностных уравнений (83), (84) можно применить обычный метод прогонки.

Напишем условия для погрешности  $z = y - u$ :

$$\begin{aligned} z_t &= \Lambda(\bar{t}) z^{(\sigma)} + \psi, \quad z(x, 0) = 0, \quad z(1, t) = 0, \\ a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} &= \frac{h}{2(n+1)} z_{t,0} - v, \end{aligned}$$

где  $\psi = \Lambda(\bar{t}) u^{(\sigma)} + \varphi - u_t$ ,  $v = a_1 u_{x,0}^{(\sigma)} - \frac{h}{2(n+1)} (u_{t,0} - f)$ .

Пользуясь уравнением баланса на промежутке  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  для уравнения (82) при фиксированном  $t = \bar{t}$  (ср. п. 1), преобразуем  $\psi$  к виду

$$\psi = \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n \eta)_x + \psi^*, \quad \eta = au_{\bar{x}}^{(\sigma)} - (ku')_{x=\bar{x}},$$

$$\psi^* = \left( \varphi - \frac{1}{hx^n} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} f(\xi, \bar{t}) \xi^n d\xi \right) - \left( u_t - \frac{1}{hx^n} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} \frac{\partial u(\xi, \bar{t})}{\partial t} \xi^n d\xi \right).$$

Правую часть  $\varphi$  будем определять по формуле

$$\varphi = \left( 1 + \frac{h^2(n-1)}{12x^2} \right) f(x, \bar{t}), \quad n = 1, 2, \quad (85)$$

т. е.  $\varphi = f$  при  $n = 1$ ,  $\varphi = \left( 1 + \frac{h^2}{12x^2} \right) f$  при  $n = 2$ .

Из формулы (159), § 1 следует

$$\begin{aligned} \psi^* &= \bar{\psi} + \psi^{**}, \quad \psi^{**} = O(h^2 + \tau^2), \\ \bar{\psi} &= \frac{nh^2}{12x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для  $\psi$  получаем представление

$$\psi = \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n \eta)_x + \bar{\psi} + \psi^{**}, \quad (86)$$

где

$$\eta = O(h^2 + \tau^m \sigma), \quad \bar{\psi} = O(h^2/x), \quad \psi^{**} = O(h^2 + \tau^2).$$

Рассмотрим схему с опережением ( $\sigma = 1$ ) и покажем, что при  $n = 1, 2$  она равномерно сходится со скоростью  $O(\tau + h^2)$ , если выполнены условия (86).

Представим  $z$  в виде  $z = v + w$ , где  $w = w(x, t_j)$  решение стационарной задачи

$$\begin{aligned} \Lambda \hat{w} &= \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n a \hat{w}_{\bar{x}})_x = - \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n \eta)_x - \bar{\psi}, \\ a_1 \hat{w}_{x,0} &= -v, \quad w_N = 0. \end{aligned}$$

Этими условиями  $w(x, t_j)$  определяется для всех  $t_j > 0$ . Доопределим  $w(x, t)$  при  $t = 0$ , полагая  $w(x, 0) = w(x, \tau)$  или  $w_t(x, 0) = 0$ .

Для  $v(x, t)$  получаем условия

$$\begin{aligned} v_t &= \Lambda \hat{v} + \bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi^{**} - w_t, \quad v_N = 0, \\ a_1 \hat{v}_{x,0} &= -\tilde{v}, \quad \tilde{v} = w_{t,0}, \quad v(x, 0) = -w(x, 0). \end{aligned}$$

В § 1, п. 18 для  $w$  получена оценка

$$\| \hat{w} \|_C \leq M_0 ((1, |\eta|] + \| \xi \bar{\psi} \|_C + |v - \eta_1|). \quad (87)$$

Напишем уравнение для  $w_t$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n a w_{t\bar{x}})_x &= - \frac{1}{x^n} (\bar{x}^n \tilde{\eta})_x - \bar{\psi}_t, \\ \tilde{\eta} &= \eta_t + a_i w_x, \\ a_1 w_{tx,0} &= -\tilde{v}, \quad \tilde{v} - \tilde{\eta}_1 = (v - \eta_1)_t. \end{aligned}$$

Нам понадобится оценка  $| \check{a} w_{\bar{x}} |$ , так как

$$(1, |\tilde{\eta}|] \leq (1, |\eta_t|] + c_3 (1, | \check{a} w_{\bar{x}} |].$$

Из уравнения для  $\hat{w}$  находим

$$\begin{aligned} |(aw_{\bar{x}})_i| &= \left| -\eta_i + \frac{\bar{x}_1^n}{\bar{x}_i^n} (\eta_1 - v) - \frac{1}{\bar{x}_i^n} \sum_{k=1}^i h x_k^n \bar{\psi}_k \right| \leq \\ &\leq |\eta_i| + |\eta_1 - v| + 2^n \| x \bar{\psi} \|_C, \end{aligned}$$

так что

$$(1, | \check{a} w_{\bar{x}} |] \leq | \check{\eta}_1 - \check{v} | + 2^n \| x \check{\bar{\psi}} \|_C + (1, | \check{\eta} |].$$

Для оценки  $w_t$  воспользуемся неравенством (87):

$$\| w_t \|_C \leq M_0 ((1, |\eta_t|] + c_3 (1, | \check{a} w_{\bar{x}} |] + \| x \bar{\psi}_t \|_C + |(v - \eta_1)_t|).$$

Предположим, что  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $u(x, t)$  имеют столько производных, сколько требуется для выполнения условий

$$\begin{aligned} |v| + |v_t| &= O(\tau^2 + h^2), \quad |\eta| + |\eta_t| = O(\tau^{m\sigma} + h^2), \\ x | \bar{\psi} | + x | \bar{\psi}_t | &= O(h^2). \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\|w_t\|_C \leq M(h^2 + \tau^m \sigma).$$

Для оценки  $v$  воспользуемся принципом максимума. Запишем уравнение (82) в виде

$$\hat{v}_i/\tau - \Lambda \hat{v}_i = F_i, \quad F_i = v_i/\tau + \tilde{\Psi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\hat{v}_N = 0, \quad \tilde{\Psi}_i = w_{t,i} + \Psi_i^{**},$$

$$\hat{v}_0/\tau - 2(n+1)a_1 \hat{v}_{x,0}/h = F_0, \quad F_0 = v_0/\tau + \tilde{\Psi}_0,$$

$$\tilde{\Psi}_0 = w_{t,0}.$$

В силу теоремы 3 из гл. I, § 2 имеем

$$\|v^{j+1}\|_C \leq \tau \|F\|_C \leq \|v^j\|_C + \tau \|w_t\|_C + \tau \|\Psi^{**}\|,$$

$$\|v^{j+1}\|_C \leq \|w(x, 0)\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau (\|w_{t'}'\|_C + \|\Psi^{**j'}\|_C),$$

где  $\|v\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|$ .

Подставляя сюда оценки для  $\|w\|_C$ ,  $\|w_t\|_C$ ,  $\|\Psi^{**}\|$ , находим

$$\|v^{j+1}\|_C = O(h^2 + \tau).$$

Тем самым доказано, что схема (83) – (85) при  $\sigma = 1$  равномерно сходится со скоростью  $O(\tau + h^2)$ :

$$\|z^j\|_C = \|y^j - u^j\|_C \leq M(\tau + h^2).$$

**9. Третья краевая задача.** Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1,$$

$$k(0, t) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1(t) u(0, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 \geq 0,$$

$$-k(1, t) \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_2(t) u(1, t) - \mu_2(t), \quad \beta_2 \geq 0.$$

В § 1, п. 16 было получено разностное условие третьего рода для стационарного уравнения  $Lu + f = 0$ . Формально переход от стационарного к нестационарному уравнению можно рассматривать как замену  $f$  на  $f - \frac{\partial u}{\partial t}$ . Применяя этот прием при выводе разностных условий, аппроксимирующих краевые условия третьего рода, приходим к следующей разностной краевой задаче:

$$y_t = \Lambda(\bar{t})(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad 0 < x_i = ih < 1, \quad t_j = j\tau > 0,$$

$$a_1(\bar{t})(\sigma \hat{y}_{\bar{x},1} + (1 - \sigma)y_{\bar{x},1}) = \beta_1(\bar{t})(\sigma \hat{y}_0 + (1 - \sigma)y_0) + \bar{\mu}_1(\bar{t}) + 0,5hy_{t,0},$$

$$-a_N(\bar{t})(\sigma \hat{y}_{\bar{x},N} + (1 - \sigma)y_{\bar{x},N}) =$$

$$= \beta_2(\bar{t})(\sigma \hat{y}_N + (1 - \sigma)y_N) + \bar{\mu}_2(\bar{t}) + 0,5hy_{t,N}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= \mu_1(\bar{t}) - 0,5hf(0, \bar{t}), \\ \bar{\mu}_2 &= \mu_2(\bar{t}) - 0,5hf(1, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_j + 0,5\tau.\end{aligned}$$

Приведенная выше схема имеет точность  $O(\tau^2 + h^2)$  при  $\sigma = 0,5$ ,  $O(\tau + h^2)$  при  $\sigma > 0,5$ .

Запишем эту разностную схему в виде, пригодном для применения метода прогонки:

$$\Lambda(\bar{t})\hat{y} - \frac{\hat{y}}{\sigma\tau} = -F, \quad \hat{y}_0 = \kappa_1\hat{y}_1 + \nu_1, \quad \hat{y}_N = \kappa_2\hat{y}_{N-1} + \nu_2,$$

где

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{a_1(\bar{t})}{a_1(\bar{t}) + h\beta_1(\bar{t}) + h^2/(2\sigma\tau)}, \quad \kappa_2 = \frac{a_N(\bar{t})}{a_N(\bar{t}) + h\beta_2(\bar{t}) + h^2/(2\sigma\tau)}, \\ \nu_1 &= \frac{(1-\sigma)(a_1(\bar{t})y_{\bar{x},1} - \beta_1(\bar{t})y_0) + 0,5hy_0/\tau - \bar{\mu}_1}{\sigma(a_1(\bar{t})/h + \beta_1(\bar{t}) + h/(2\sigma\tau))}, \\ \nu_2 &= \frac{(1-\sigma)(-a_N(\bar{t})y_{\bar{x},N} - \beta_2(\bar{t})y_N) + 0,5hy_N/\tau - \bar{\mu}_2}{\sigma(a_N(\bar{t})/h + \beta_2(\bar{t}) + h/(2\sigma\tau))}, \\ F &= ((1-\sigma)\Lambda(\bar{t})y + y/\tau + \varphi(\bar{t}))\sigma^{-1}.\end{aligned}$$

Прогонка устойчива, если  $\sigma > 0$ , так как  $0 < \kappa_1 < 1$ ,  $0 < \kappa_2 < 1$ .

**10. Периодическая задача.** Рассмотрим задачу о распространении тепла в однородном тонком круговом кольце  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  радиуса  $r_0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = \frac{a^2}{r_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t' > 0, \quad u(\varphi, 0) = u_0(\varphi).$$

Для однозначного определения  $u(\varphi, t')$  должно выполняться условие периодичности

$$u(\varphi + 2\pi, t') = u(\varphi, t') \quad \text{для любого } \varphi \in [0, 2\pi],$$

которое можно заменить условиями сопряжения в точке  $\varphi = 0$ :

$$u(0+0, t') = u(2\pi-0, t'), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0+0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=2\pi-0}.$$

Заменой переменных

$$x = \varphi/(2\pi), \quad t = a^2 t' / (2\pi r_0^2),$$

преобразуем отрезок  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в отрезок  $0 \leq x \leq 1$ , а уравнение — к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0+0, t) &= u(1-0, t), \quad \frac{\partial u(0+0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1-0, t)}{\partial x}.\end{aligned}$$

Введем сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$$

и напомним простейшую неявную схему

$$y_t = \hat{y}_{\bar{x}x}, \quad 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau > 0, \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

Первое из условий сопряжения  $u(0+0, t) = u(1-0, t)$  дает

$$y_0 = y_N.$$

Второе условие аппроксимируется, по аналогии с § 1, п. 19, уравнением  $y_{t,0} = \hat{y}_{\bar{x}x,0}$ . При этом точки  $x = 0$  и  $x = 1$  считаем совпадающими и ставим условие

$$y_{N+1} = y_1.$$

Таким образом, разностную схему пишем во всех узлах  $i = 1, 2, \dots, N$  сетки  $\bar{\omega}_h$ , учитывая условие периодичности  $y_{N+1} = y_1$  при написании схемы в узле  $i = N$ .

Аналогично ставится разностная задача и для уравнения с переменными периодическими коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и периодическими краевыми условиями (условиями сопряжения)

$$u(0+0, t) = u(1-0, t), \quad k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0+0} = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1-0}.$$

Все функции  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $u_0(x)$  периодичны с периодом 1, так что  $u_0(x+1) = u_0(x)$ ,  $f(x+1, t) = f(x, t)$ ,  $k(x+1, t) = k(x, t)$ .

Коэффициенты  $k(0+0, t)$  и  $k(1-0, t)$  могут быть различны:  $k(0+0, t) \neq k(1-0, t)$ . При этом производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  разрывны:

$$\frac{\partial u(0+0, t)}{\partial x} \neq \frac{\partial u(1-0, t)}{\partial x}.$$

Если отождествить концы  $x = 0$  и  $x = 1$ , то условия периодичности можно трактовать как условия сопряжения в точке разрыва коэффициента  $k(x, t)$ . После этого становится понятным, что схему надо писать во всех узлах  $i = 1, 2, \dots, N$  с учетом условия  $y_{N+1} = y_1$ . В результате получим однородную схему с весами:

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(\sigma)} + \Phi(x, \bar{t}), \quad x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \bar{t} = (j + 0,5)\tau,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_{N+1} = y_1, \quad y_0 = y_N,$$

где  $\Lambda y = (a(x, \bar{t}) y_{\bar{x}})_x$  и коэффициенты  $a$  и  $\Phi$  находятся по обычным формулам, например,

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad \Phi_i = 0,5 (f_{i-0} + f_{i+0}).$$

Написанные условия однозначно определяют решение. Эта схема имеет аппроксимацию  $O(\tau^2 + |\sigma - 0,5|\tau + h^2)$ .

Полученная относительно  $\hat{y}$  задача вида

$$A_i \hat{y}_{i-1} - B_i \hat{y}_i + A_{i+1} \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\hat{y}_{N+1} = \hat{y}_1, \quad \hat{y}_0 = \hat{y}_N, \quad A_i = \sigma \tau a_i / h^2, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + 1$$

решается методом циклической прогонки (см. Дополнение, § 3).

Для исследования вопроса об устойчивости и точности следует рассмотреть пространство  $H$  сеточных функций  $y(x_i)$ , заданных при  $i = 1, 2, \dots, N, N+1$  и удовлетворяющих условию периодичности  $y_{N+1} = y_1, y_N = y_0$ .

В  $H$  вводится скалярное произведение  $(v, w) = \sum_{i=1}^N v_i w_i h$  и норма  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ .

Пусть  $Ay = -\Delta y$  при  $y \in H$ . Для  $A$  справедливы формулы Грина и  $A = A^* \geq 0$ .

Так как  $A \geq 0$ , то для получения априорной оценки надо воспользоваться замечанием к теореме 11, гл. VI, § 1. Вводя оператор  $A' = A + \varepsilon E$ , где  $\varepsilon > 0$  — произвольное число, не зависящее от  $h$  и  $\tau$ , получаем

$$(A')^* = A' \geq \varepsilon E.$$

Так как  $A'$  липшиц-непрерывен по  $t$  (в силу условия  $|k_t| \leq c_3 k$ ), то для решения периодической задачи верна оценка

$$\|y^{j+1}\|_{A'(t_j)} \leq M_1 \|u_0\|_{A'(0)} + M_2 \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|,$$

если

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1 - \varepsilon}{\tau \|A'\|},$$

где  $\|A'\| \leq 4/h^2 + \varepsilon$ ,  $M_1 = \text{const} > 0$ ,  $M_2 = \text{const} > 0$  не зависят от  $h$  и  $\tau$ .

При этом же условии  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  имеет место неравенство

$$\|y^{j+1}\| \leq M_1 \|u_0\| + M_2 \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|.$$

При  $\sigma = 1$  для нашей разностной задачи справедлив принцип максимума при любых  $\tau$  и  $h$ , из которого следует равномерная устойчивость по начальным данным и по правой части, а также равномерная сходимость со скоростью  $O(\tau + h^2)$ .

**11. Квазилинейные уравнения.** При изучении высокотемпературных процессов необходимо учитывать зависимость коэффициентов теплоемкости и теплопроводности от температуры.

Рассмотрим уравнение

$$\left. \begin{aligned} c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t, u), \\ c(x, t, u) > 0, \quad k(x, t, u) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

В неоднородной среде  $k$ ,  $c$ ,  $f$  могут быть разрывными функциями  $x$  и  $u$  (для разных веществ зависимость  $k$ ,  $c$ ,  $f$  от  $u$  может быть различной). Уравнение (88) при  $k = k(u)$ ,  $c = c(u)$ ,  $f = f(u)$  может быть приведено с помощью замены искомой функции:

$$v = \int_0^u k(\xi) d\xi \quad \text{к виду:}$$

$$\frac{\partial \varphi(v)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tilde{f}(v). \quad (89)$$

Для решения квазилинейных уравнений метод конечных разностей практически является единственным методом, позволяющим эффективно найти решение. Для квазилинейных уравнений использование явных схем нецелесообразно, если  $k(u)$ ,  $c(u)$  являются быстроменяющимися (например, степенными) функциями температуры. Условие устойчивости

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\min c(u)}{\max k(u)}$$

требует мелкого шага по времени, определяемого часто значениями функций  $k$ ,  $c$  в небольшом числе узлов. Поэтому применяются безусловно устойчивые неявные схемы.

Рассмотрим сначала уравнение (89) с  $\tilde{f}(v) = 0$ . Для его решения используют нелинейную (относительно  $y^{j+1}$ ) разностную схему

$$\frac{\varphi(y^{j+1}) - \varphi(y^j)}{\tau} = y_{xx}^{j+1}.$$

Чтобы отыскать решение этого разностного уравнения, можно использовать итерационный метод

$$\varphi(y^{(s+1)}) - \varphi'(y^{(s+1)})(y^{(s+1)} - y^{(s)}) - \varphi(y^{(s)}) = \tau y_{xx}^{(s+1)},$$

где  $y^{(s+1)}$  — значение  $(s+1)$ -й итерации функции  $y^{j+1}$ . В качестве начальной итерации выбирают значение функции  $y$  на предыдущем временном слое. Значения  $y_i^{(s+1)}$  находятся методом прогонки.



Рассмотрим теперь два типа чисто неявных схем (схем с опережением,  $\sigma = 1$ ) для простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

где  $k(u) > 0$ .

Схема а):

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(y) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(y) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(y). \quad (91)$$

Схема б):

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(\hat{y}) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y}) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(\hat{y}), \quad (92)$$

где

$$a_i(v) = k \left( \frac{v_i + v_{i-1}}{2} \right), \quad \hat{y}_i = y_i^{i+1}, \quad y_i = y_i^i.$$

Сравним эти схемы. Погрешность аппроксимации этих схем  $O(\tau + h^2)$ . Обе они абсолютно устойчивы. Схема а) линейна относительно значения функции  $y^{j+1}$  на слое  $t_{j+1}$ , и значения функции  $y^{j+1}$  находятся по значению функции  $y^j$  на слое  $t_j$ , например, методом прогонки. Поскольку схема а) абсолютно устойчива, шаг  $\tau$  выбирается только из соображений точности. Схема б) нелинейна относительно функции  $y^{j+1}$  и для нахождения ее решения используется метод итераций. Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\frac{y^{(s+1)} - y^{(s)}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}^{(s)}(y) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i^{(s)}(y) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + f^{(s)}(y). \quad (93)$$

Относительно  $y^{(s+1)}$  разностная схема оказывается линейной. В качестве начальной итерации берется функция  $y$  предыдущего шага по времени:  $y = y^{(0)}$ . Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике коэффициентов  $k$  и  $f$  сходится. Практически оказывается достаточным сделать две-три итерации. Даже в том случае, если итерации не сходятся, для повышения точности схемы оказывается полезным сделать две итерации. При счете по итерационной схеме (92), (93) задают либо число итераций, либо точность сходимости итераций  $\varepsilon$  и требуют выполнения условия

$$\max_i |y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}| \leq \varepsilon.$$

Недостаток схемы (92), (93) в том, что счет итераций требует удвоения числа занимаемых в машине ячеек памяти по сравнению со схемой а), так как для вычисления  $y^{(s+1)}$  нужно «помнить»  $y$  и  $y^{(s)}$ .

Для нахождения значения функции  $y^{j+1}$  по функции  $y^j$  при счете по схеме (92), (93) нужно сделать несколько итераций, а при счете по схеме а) значение  $y^{j+1}$  находится сразу.

Поскольку обе схемы абсолютно устойчивы и имеют одинаковый порядок аппроксимации, то казалось бы, что и в этом отношении схема а) имеет преимущество перед итерационной схемой б). Однако это не так.

Практика показала, что для получения одинаковой точности счета по схемам а) и б), схема б) позволяет использовать настолько более крупный шаг по времени, что несмотря на необходимость итераций, это приводит к уменьшению объема вычислительной работы.

Можно использовать схемы, имеющие второй порядок аппроксимации по пространству и времени:

$$y_i = \frac{1}{2} [(a(\hat{y}) \hat{y}_{\bar{x}})_x + (a(y) y_{\bar{x}})_x] + f\left(\frac{\hat{y} + y}{2}\right).$$

Однако такие схемы имеют недостаток, они — немонотонны, что приводит часто к появлению «ряби». Для получения хороших результатов в этом случае нужно выбирать достаточно мелкий шаг по времени.

В случае уравнений (88) со слабой квазилинейностью, при  $k = k(x, t)$ ,  $f = f(u)$ ,  $c = c(x, t)$  иногда используются так называемые схемы *предиктор-корректор*, дающие точность  $O(\tau^2 + h^2)$ . Приведем пример такой схемы при  $c = k = 1$ ,  $f = f(u)$  (рис. 7):

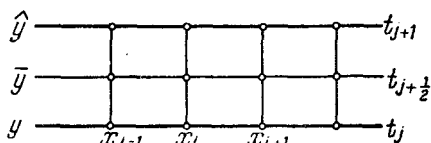


Рис. 7.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{y} - y}{0,5\tau} &= \bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + f(y), \quad \bar{y} = y(t_{j+1/2}), \\ \frac{\hat{y} - y}{\tau} &= \frac{1}{2} (\bar{y}_{\bar{x}\bar{x}} + y_{\bar{x}\bar{x}}) + f(\bar{y}). \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Мы не будем останавливаться здесь на теоретическом исследовании указанных выше схем (91) — (94) (см., например, А. А. Самарский [3], Дуглас и Джонс [1]).

Пример 1. Температурные волны. Встречаются задачи, в которых  $k(u) = 0$  при  $u = 0$ ,  $k(u) > 0$  при  $u > 0$ , например,  $k(u) = \kappa u^\alpha$ . В этом случае может существовать фронт

температуры  $u=0$ , на котором производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  терпят разрывы, а поток  $-k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$  непрерывен. Распространение фронта будет происходить с конечной скоростью  $\dot{\xi}(t)$  (так называемые температурные волны). Задача при  $k(u) = \kappa u^\alpha$ ,  $f=0$  имеет автомодельное решение. Для расчета температурных волн А. А. Самарским и И. М. Соболев [1] применялась схема б), которая является схемой «сквозного счета» и не предусматривает выделения точек слабого разрыва. В качестве начальных и граничных условий задавалось точное автомодельное решение. Всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов, отклонение сосчитанного решения от точного оказывалось малым (не превосходило 0,002 при  $N=50$ ,  $\tau=2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\kappa=0,5$ ,  $\alpha=2$ ,  $\dot{\xi}=5$ , число итераций не превосходило 3,  $t < 0,2$ ). Локально-одномерным методом (см. гл. VII) проводились расчеты многомерных температурных волн. Изучение сходимости разностных схем для расчета температурных волн проводилось В. Ф. Баклановской [1].

**Пример 2.** Задача о фазовом переходе (задача Стефана). Пусть имеется две фазы с коэффициентами теплопроводности и теплоемкости  $k_1(u)$ ,  $k_2(u)$  и  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$ . В каждой фазе температура удовлетворяет уравнению

$$c_s(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad s=1, 2. \quad (95)$$

На границе раздела фаз температура постоянна и равна температуре фазового перехода,  $u(x, t) = u^*$ . Скорость движения границы фазового перехода  $\dot{\xi}$  удовлетворяет уравнению

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - k_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} = -\lambda \frac{d\xi}{dt},$$

если в первой фазе  $u < u^*$ , во второй фазе  $u > u^*$ .

Вводя  $\delta$ -функцию, уравнение (95) (с учетом условий на границе фазового перехода) запишем в виде

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u^*)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$c(u) = \begin{cases} c_1(u), & u < u^*, \\ c_2(u), & u > u^*, \end{cases} \quad k(u) = \begin{cases} k_1(u), & u < u^*, \\ k_2(u), & u > u^*. \end{cases}$$

Для решения задачи Стефана применяется метод сглаживания:  $\delta$ -функция заменяется  $\delta$ -образной функцией  $\delta(u - u^*, \Delta)$ , отличной от нуля лишь на интервале  $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$  и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{u^* - \Delta}^{u^* + \Delta} \delta(u - u^*, \Delta) du = 1.$$

Сглаживая на интервале  $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$  функции  $k_1(u)$ ,  $k_2(u)$ ,  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$ , получаем квазилинейное уравнение

$$\tilde{c}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{k}(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

для решения которого можно использовать описанные выше схемы. Разностные методы решения задачи Стефана рассматривались, например, в работах А. А. Самарского, Б. Д. Моисеенко [1] и Б. М. Будака, Е. Н. Соловьевой, А. Б. Успенского [1].

### § 3. Однородные разностные схемы для уравнений гиперболического типа

1. Однородные разностные схемы. В прямоугольнике

$$\bar{D}_T = [0 \leq x \leq 1] \times [0 \leq t \leq T]$$

будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad (2)$$

$$0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad (3)$$

где  $D_T = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$ .

Как обычно предполагаем, что эта задача имеет единственное решение, непрерывное в замкнутой области  $\bar{D}_T$  и обладающее требуемыми по ходу изложения производными.

Допускается, что коэффициент  $k(x, t)$  (и  $f(x, t)$ ) может иметь разрывы первого рода на конечном числе прямых, параллельных оси координат  $Ot$  (неподвижные разрывы). Проведем изложение для случая одной линии разрыва  $x = \xi$ , на которой выполняется условие сопряжения (непрерывность функций  $u$  и  $k \frac{\partial u}{\partial x}$ ):

$$[u] = u(\xi + 0, t) - u(\xi - 0, t) = 0, \quad \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{при } x = \xi. \quad (4)$$

Пусть  $\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$  — произвольная неравномерная сетка на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$  — равномерная сетка на отрезке  $0 \leq t \leq T$ ,  $\bar{\omega}_{h\tau} = \hat{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$  — сетка в прямоугольнике  $D_T$ . Построение однородной схемы для задачи (1) — (3) начнем с аппроксимации  $Lu + f$  разностным оператором  $\Lambda u + \varphi = (a(x, t) u_{\bar{x}})_x + \varphi$  при фиксированном  $t \in \omega_\tau$ .

Заменяя  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=t_j} \sim u_{\bar{t}t}$ ,  $Lu + f \sim \Lambda(t_j) u^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi$ , где

$$u^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{u} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) u + \sigma_2 \check{u},$$

$$\Lambda(t_j) u = (a(x, t_j) u_{\bar{x}})_x, \quad u = u^l, \quad \check{u} = u^{l-1}, \quad \hat{u} = u^{l+1},$$

получаем однородную трехслойную схему с весами

$$y_{it} = \Lambda(t_j) y^{(\sigma_1, \sigma_2)} + \varphi. \quad (5)$$

Коэффициент  $a$  берем на среднем слое  $t = t_j$ .

Подставляя в (5)  $\hat{y} = y + \tau y_i^o + \frac{\tau^2}{2} y_{it}$ ,  $\check{y} = y - \tau y_i^o + 0,5\tau^2 y_{it}$ , где  $y_i^o = (\hat{y} - \check{y})/(2\tau)$ ,  $y_{it} = (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2$ , получим  $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = y + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau y_i^o + 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 y_{it}$ , после чего запишем схему (5) в виде:

$$\left(E - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau^2 \Lambda\right) y_{it} - (\sigma_1 - \sigma_2) \tau \Lambda y_i^o = \Lambda y + \varphi, \quad (6)$$

где  $E$  — единичный оператор. При  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  получаем симметричную схему

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda) y_{it} = \Lambda y + \varphi(x, t), \quad 0 < t = j\tau, \quad (7)$$

изучением которой и ограничимся.

Краевые условия и первое начальное условие удовлетворяются точно:

$$y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (8)$$

Второе начальное условие  $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$  можно аппроксимировать двумя способами. Один из способов указан в гл. II:

$$y_t(x, 0) = \check{u}_0(x), \quad \text{где } \check{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(Lu_0 + f)_{t=0}. \quad (9)$$

Он имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Второй способ состоит в том, что для определения  $y(\tau)$  пишется разностное уравнение

$$(E - \sigma \tau^2 \Lambda(0)) y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) + 0,5\tau(\Lambda u_0 + f(x, 0)). \quad (9')$$

В результате задаче (1) — (3) ставим в соответствие однородную разностную схему, определяемую условиями (7) — (9) (или (7), (8), (9')).

Эта схема является трехслойной. Для вычисления значения  $\hat{y} = y^{j+1}$  на новом слое надо знать значения  $y^j$  и  $y^{j-1}$  на двух предыдущих слоях. На каждом новом слое  $t = t_{j+1}$  решается (методом прогонки) краевая задача относительно  $\hat{y} = y^{j+1}$ :

$$\left. \begin{aligned} (E - \sigma \tau^2 \Lambda) \hat{y} &= F, \quad 0 < x = ih < 1, \quad \hat{y}_0 = \hat{a}_1, \quad \hat{y}_N = \hat{a}_2, \\ F(t) &= 2y - \check{y} - \tau^2 \Lambda((2\sigma - 1)y - \sigma \check{y}) + \tau^2 \varphi, \quad t \geq \tau, \\ F(0) &= u_0 + \tau^2(0,5 - \sigma) \Lambda(0) u_0 + \tau \bar{u}_0(x) + 0,5\tau^2 f(x, 0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**2. Погрешность аппроксимации.** Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1)–(3),  $y(x_i, t_j) = y_i^j$  — решение разностной задачи (7)–(9). Напишем, как обычно, уравнение для погрешности

$$z_i^j = y_i^j - u_i^j, \text{ где } u_i^j = u(x_i, t_j).$$

Подставляя  $y = z + u$  в (7)–(9), получаем

$$\left. \begin{aligned} (E - \sigma\tau^2\Lambda) z_{it} &= \Lambda z + \psi(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ z(x, 0) &= 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \\ z_t(x, 0) &= v(x), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, t) &= \Lambda(t)u - u_{it} + \sigma\tau^2\Lambda u_{it}, \\ v(x) &= 0,5\tau(Lu_0 + f)_{t=0} + \bar{u}_0(x) - u_t(x, 0), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

— погрешности аппроксимации (на решении задачи (1)–(3)) уравнения (1) и второго начального условия соответственно.

Если  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  имеют конечное число неподвижных разрывов, то сетку  $\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_h(K)$  выбираем так, чтобы линии разрыва проходили через узлы этой сетки (ср. § 1 и § 2, п. 6).

По аналогии с § 1 и § 2 преобразуем выражение для  $\psi$  к виду

$$\psi = \eta_x + \psi^*, \quad (13)$$

где

$$\eta_i = a_i u_{\bar{x}, i} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2} + \sigma\tau^2 a_i u_{it\bar{x}, i} + \frac{h_i^2}{8} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right)_i, \quad (14)$$

$$\psi^* = O(\tau^2 + h^2). \quad (15)$$

Для этого возьмем уравнение (1) в момент  $t = t_j$  и проинтегрируем его по  $x$  в пределах от  $x_{i-1/2}$  до  $x_{i+1/2}$ :

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_{i+1/2}} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_{i-1/2}} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t_j) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial^2 u(x, t_j)}{\partial t^2} dx = 0. \quad (16)$$

Разделим это тождество на  $h_i$  и вычтем его из правой части формулы (12) для  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi_i &= \left(a_i u_{\bar{x}, i} + \sigma\tau^2 a_i u_{it\bar{x}, i} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2}\right)_{\bar{x}, i} - \\ &- u_{it, i} + \varphi_i - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(f(x, t_j) - \frac{\partial^2 u(x, t_j)}{\partial t^2}\right) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты  $a_i$  и  $\varphi_i$  определяются при фиксированном  $t = t_j$  по формулам § 1, п. 13.

Пусть  $x_i$  — точка разрыва  $k$  и  $f$ . Возьмем простейшие формулы для  $a_i$  и  $\varphi_i$ :

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\bar{h}_i}, \quad f_i^\pm = f(x_i \pm 0). \quad (18)$$

Воспользуемся формулой (87) § 1, п. 13 при  $\alpha = 1/8$ .

Учитывая, что  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  непрерывна в точке разрыва  $k(x, t)$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( f(x, t_j) - \frac{\partial^2 u(x, t_j)}{\partial t^2} \right) dx &= \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\bar{h}_i} - \\ &- \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i + \frac{1}{8} \left( h_i^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right)_i \right)_{x_i} + O(h_i^2). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (17), получим (13) — (15). Из (14) видно, что

$$\eta_i = O(h_i^2 + \tau^2), \quad \eta_{t, i} = O(h_i^2 + \tau^2). \quad (19)$$

**3. Устойчивость и сходимость.** Чтобы не завышать требований гладкости коэффициентов и решения при оценке порядка точности схемы (7) — (9), используем различные априорные оценки для операторно-разностной трехслойной схемы

$$\left. \begin{aligned} Dz_{it} + Az &= \psi(t), \quad t = j\tau > 0, \\ z(0) &= 0, \quad z_t(0) = v. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь  $D, A$  — линейные операторы, заданные на гильбертовом пространстве  $H$  (см. гл. VI),  $z(t)$  и  $\psi(t)$  абстрактные функции  $t \in \omega_\tau$  со значениями в  $H$ ,  $v$  — элемент  $H$ . В нашем случае  $H = \hat{\Omega}$  — множество сеточных функций, заданных на  $\hat{\omega}_h$  и обращающихся в нуль на границе, при  $x = 0$  и  $x = 1$ . Скалярные произведения имеют вид

$$(z, v)_* = \sum_{i=1}^{N-1} z_i v_i \bar{h}_i, \quad (z, v) = \sum_{i=1}^{N-1} z_i v_i h_i, \quad (z, v] = \sum_{i=1}^N z_i v_i h_i.$$

Будем использовать следующие нормы:

$$\|z\|_C = \max_{x \in \hat{\omega}_h} |z(x)|, \quad \|z\| = \sqrt{(z, z)_*}, \quad \|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}.$$

В нашем случае операторы  $A$  и  $D$ , как показывает сравнение (7) и (20), равны

$$A = -\Lambda, \quad D = E - \sigma\tau^2\Lambda = E + \sigma\tau^2 A.$$

Оператор  $A$  — самосопряженный и положительно определенный,  $A \geq 2c_1E$ , для его нормы верна оценка (см. § 2, п. 6)

$$\|A\| \leq 4c_2/h_{\min}^2, \quad h_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

Схема (20) устойчива при условии (см. гл. VI, § 2)

$$D \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A \quad \text{или} \quad (Dy, y) \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 (Ay, y),$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольное число, не зависящее от  $h$ .

Это условие или

$$D - \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A = E + \left(\sigma - \frac{1+\varepsilon}{4}\right) \tau^2 A \geq \left(\frac{1}{\|A\|} + \left(\sigma - \frac{1+\varepsilon}{4}\right) \tau^2\right) A \geq 0$$

будет выполнено при

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{h_{\min}^2}{4\tau^2 c_2}.$$

В гл. VI, § 2 будут получены следующие оценки для задачи (20):

$$\|z^{j+1}\|_{A(t_j)} \leq M \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|z_t(0)\|_{D(\tau)} + \sum_{k=1}^j \tau \|\psi^k\|_{D^{-1}(t_k)} \right), \quad (21)$$

$$\|z^{j+1}\|_{A(t_j)} \leq$$

$$\leq M \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|z_t(0)\|_{D(\tau)} + \max_{0 < k \leq j} (\|\psi^k\|_{A^{-1}(t_k)} + \|\psi_t^k\|_{A^{-1}(t_k)}) \right). \quad (22)$$

Эти оценки имеют место для схемы с весами (20), если  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  и  $|a_t| \leq c_3 a$ .

В § 2, п. 4 для равномерной сетки были получены оценки, которые в случае неравномерной сетки принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \|z\|_A &\geq \sqrt{c_1} \|z_x\| > \sqrt{c_1} \|z\|_C, \\ \|\psi\|_{A^{-1}} = \|\eta_x\|_{A^{-1}} &\leq \frac{2}{\sqrt{c_1}} \|\eta\|, \quad \|\psi_t\|_{A^{-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{c_1}} \|\eta_t\| \quad \text{при} \quad \psi = \eta_x. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Так как  $D$  самосопряженный оператор и

$$\begin{aligned} D &= E + \sigma \tau^2 A = E + (\sigma - \sigma_\varepsilon) \tau^2 A + \sigma_\varepsilon \tau^2 A \geq \\ &\geq E + 0,5\tau^2 A - \frac{1-\varepsilon}{\|A\|} A \geq \varepsilon E, \end{aligned}$$

то

$$D^{-1} \leq \frac{1}{\varepsilon} E \quad \text{и} \quad \|\psi\|_{D^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\psi\|.$$



Представим решение  $z$  задачи (11)–(13) в виде  $z = v + w$ , где  $v$  и  $w$  удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} v_{tt} &= \Lambda v^{(0)} + \eta_x, \quad v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0, \quad v_0 = v_N = 0, \\ w_{tt} &= \Lambda w^{(0)} + \psi^*, \quad w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = v(x), \quad w_0 = w_N = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Из (21)–(23) следуют оценки для  $v$  и  $w$ :

$$\|v^{j+1}\|_C \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \max_{0 < k \leq j} (\|\eta^k\| + \|\eta_t^k\|), \quad (21')$$

$$\|w^{j+1}\|_C \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \|v(x)\|_D + \sum_{k=1}^j \tau \|\psi^{**k}\| \right), \quad (22')$$

где  $\|v\|_D^2 = ((E + \sigma\tau^2 A)v, v)_* = \|v\|^2 + \sigma\tau^2 (a, v_{\bar{x}}^2)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  имеют разрывы первого рода на конечном числе прямых  $x = \xi_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, s_0$ , параллельных оси координат  $Ot$ , а в областях

$$\Delta_s = (\xi_s < x < \xi_{s+1}, 0 \leq t \leq t_0), \quad s = 0, 1, \dots, s_0, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_{s_0+1} = 1$$

коэффициенты  $k(x, t)$ ,  $f(x, t)$  и решение  $u(x, t)$  являются столь гладкими функциями, что выполнены условия (19) и (15). Тогда, если выполнено условие (22), то схема (7)–(9) на специальных последовательностях неравномерных сеток  $\hat{\omega}_h(K)$  равномерно сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h_0^2)$ , так что для решения задачи (11) имеет место оценка

$$\|z^j\|_C = \|y^j - u^j\|_C \leq M(\tau^2 + h_0^2), \quad \text{где } h_0 = \max_{1 \leq i \leq N} h_i. \quad (25)$$

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться априорными оценками (21') и (22') для  $v$  и  $w$  и учесть соотношения (15) и (19).

**Замечание 1.** Теорема 1 сохраняет силу, если вместо (7) взять схему

$$(E - \sigma\tau^2 \overset{\circ}{\Lambda}) y_{tt} = \Lambda y + \varphi, \quad (26)$$

где  $\Lambda y = y_{\bar{x}\bar{x}}$  — постоянный оператор (регуляризатор, см. гл. VI, § 2). В этом случае  $A = -\Lambda$ ,  $R = -\sigma\overset{\circ}{\Lambda}$ ,  $D = E + \tau^2 R$ . Достаточное условие устойчивости (21) будет выполнено, если

$$\sigma = (1 + \varepsilon) c_2/4. \quad (27)$$

При оценке погрешности аппроксимации для этой схемы изменится лишь формула (14) для  $\eta$ ; вместо  $\sigma\tau^2 a u_{t\bar{t}\bar{x}}$  надо написать  $\sigma\tau^2 u_{t\bar{t}\bar{x}}$ , где  $\sigma$  есть (27).

В гл. VI, § 2 для схемы (20) при  $D = E + \sigma\tau^2 A$  получена априорная оценка

$$\|z^{j+1}\| \leq \frac{M_1}{V_\varepsilon} \|z_t(0)\|_{\tilde{D}} + \frac{M_2}{V_\varepsilon} \max_{0 < k \leq j} [\|(A^{-1}\psi)^k\| + \|(A^{-1}\psi)_t^k\|], \quad (28)$$

где  $\tilde{D} = A^{-1} + \sigma\tau^2 E$ . Она верна при условиях:

- 1)  $A(t) = A^*(t) > 0$ ,
- 2)  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\tau^2 \|A\|}$  и  $\sigma \geq 0$ ,
- 3)  $A(t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$  с постоянной  $c_3 > 0$ ,
- 4)  $\tau \leq 1/(2c_3)$ .

Априорная оценка (28) может быть использована при выяснении порядка точности схемы (7)–(9) на произвольной последовательности сеток, когда точки разрыва  $k$  и  $j$ , вообще говоря, не совпадают с узлами сетки  $\omega_h$ . Выражение  $A^{-1}\psi = w$  есть, очевидно, решение задачи

$$Aw = \psi \text{ или } (a(x, t)w_x)_x = -\psi(x, t), \quad w_0 = w_N = 0,$$

$$\text{а } (A^{-1}\psi)_t = w_t.$$

В § 2 получены оценки для  $w$  и  $w_t$  в случае  $\psi = \eta_x$ :

$$\|w\|_C \leq M(1, |\eta|), \quad \|w_t\|_C \leq M\{(1, |\eta|) + (1, |\eta_t|)\}, \quad (29)$$

где  $M$  — положительные постоянные, зависящие только от  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$ .

Оценки (28) и (29) используются для доказательства того факта, что схема с весами (7)–(9) сходится в классе разрывных функций  $k$  и  $f$  при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  в сеточной норме  $L_2(\omega_h)$  с той же скоростью по  $h$ , что и соответствующие стационарные задачи

$$\Lambda w = -\psi, \quad \Lambda v = -\psi_t.$$

Порядок точности по  $\tau$  есть  $O(\tau^2)$ .

## Г л а в а IV

### РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

---

В § 1 настоящей главы изучается разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона. Излагаются способы аппроксимации оператора Лапласа и постановка разностных граничных условий на регулярных и нерегулярных сетках. Установлен принцип максимума и на его основе доказана равномерная сходимость со скоростью  $O(h^2)$  построенных разностных схем в случае произвольной области.

В § 2 получены некоторые оценки для разностных операторов, аппроксимирующих оператор Лапласа и эллиптический оператор со смешанными производными.

Изучению разностных аппроксимаций для эллиптических уравнений, и особенно для уравнения Лапласа, посвящена обширная литература. Укажем лишь некоторые литературные источники: В. Б. Андреев [1], [2], [5], [7], В. В. Бадагадзе [1], Н. С. Бахвалов [1]—[3], И. С. Березин и Н. П. Жидков [2], В. Вазов и Д. Форсайт [1], Р. Варга [1], Е. А. Волков [1]—[3], Л. В. Канторович и В. И. Крылов [1], Коллатц [2], В. И. Лебедев [2], [3], Л. А. Люстерник [1], Г. И. Марчук [1], Ш. Е. Микеладзе [1], С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий [1], А. А. Самарский и И. В. Фрязинов [2], В. К. Саульев [1].

---

#### § 1. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона

Перейдем к изучению разностных схем для решения задачи Дирихле

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_\Gamma = \mu(x), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $G$  есть  $p$ -мерная конечная область с границей  $\Gamma$ .

**1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа.** Начнем с построения разностного аналога оператора Лапласа

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2)$$

на плоскости  $x = (x_1, x_2)$ .

В точке  $x = (x_1, x_2)$  каждый из операторов  $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$  или  $L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  аппроксимируем трехточечным оператором  $\Lambda_1$  или  $\Lambda_2$ :

$$L_1 v \sim \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{1}{h_1^2} (v(x_1 + h_1, x_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1 - h_1, x_2)), \quad (3)$$

$$L_2 v \sim \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{h_2^2} (v(x_1, x_2 + h_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2 - h_2)), \quad (4)$$

где  $\sim$  знак аппроксимации,  $h_1 > 0, h_2 > 0$  — заданные числа (шаги по осям  $x_1$  и  $x_2$ ).

Оператор  $\Lambda_1$  определен на регулярном трехточечном шаблоне

$$(x_1 - h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1 + h_1, x_2),$$

оператор  $\Lambda_2$  — на регулярном трехточечном шаблоне

$$(x_1, x_2 - h_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 + h_2).$$

Используя (3) и (4), заменим оператор Лапласа (2) разностным оператором

$$\Delta v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (5)$$

который определен на пятиточечном шаблоне «крест», состоящем из узлов

$$(x_1 \pm h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 \pm h_2).$$

Этот регулярный шаблон изображен на рис. 8. Здесь 0 — точка  $(x_1, x_2)$ , 1 — точка  $(x_1 + h_1, x_2)$  и т. д.

Из (3) — (5) и рис. 8 следует, что

$$\Delta v_0 = \frac{1}{h_1^2} (v_1 - 2v_0 + v_3) + \frac{1}{h_2^2} (v_2 - 2v_0 + v_4). \quad (6)$$

В частности, при  $h_1 = h_2 = h$  (на квадратном шаблоне) имеем

$$\Delta v_0 = \frac{1}{h^2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0). \quad (7)$$

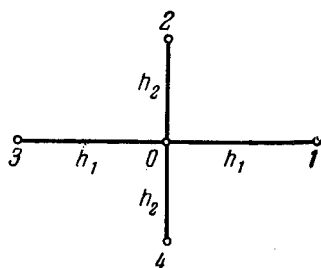


Рис. 8. Регулярный шаблон «крест».

Вычислим погрешность аппроксимации оператора Лапласа (2) разностным оператором (5). Так как (см. гл. I, § 1) при  $\alpha = 1, 2$

$$\Lambda_\alpha v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4) = L_\alpha v + \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^2 v + O(h_\alpha^4), \quad (8)$$

то

$$\Lambda v - \Delta v = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 v + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 v + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda v - \Delta v = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

если  $v(x)$  — любая функция, имеющая не менее четырех ограниченных (хотя бы в прямоугольнике  $x_\alpha - \bar{h}_\alpha \leq x'_\alpha \leq x_\alpha + \bar{h}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , при  $h_\alpha \leq \bar{h}_\alpha$ ) производных по  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Таким образом, разностный оператор (5) аппроксимирует оператор Лапласа (2) со вторым порядком на регулярном шаблоне «крест».

Аналогично строится разностная аппроксимация  $p$ -мерного ( $p > 2$ ) оператора Лапласа

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}. \quad (9)$$

Заменяя  $L_\alpha$  трехточечным разностным оператором  $\Lambda_\alpha$ , получаем

$$\Lambda v = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha v, \quad \Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad (10)$$

так что

$$\Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha^2} (v^{(+1)_\alpha} - 2v + v^{(-1)_\alpha}), \quad (11)$$

где  $v^{(\pm 1)_\alpha} = v(x^{(\pm 1)_\alpha})$ . Здесь  $x^{(+1)_\alpha}$  (или  $x^{(-1)_\alpha}$ ) — точка, в которую переходит точка  $x = (x_1, \dots, x_p)$  при сдвиге по направлению  $x_\alpha$  направо (или налево) на отрезок длины  $h_\alpha$  (рис. 9).

Шаблон для оператора (10) состоит, очевидно, из  $2p + 1$  точек  $x, x^{(\pm 1)_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$  (из 7 точек

при  $p = 3$ ), а погрешность аппроксимации имеет второй порядок.

Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию оператора Лапласа на нерегулярном шаблоне «крест». В случае двух измерений ( $p = 2$ ) этот шаблон состоит из пяти точек

$$(x_1 - h_{1-}, x_2), (x_1 + h_{1+}, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 - h_{2-}), (x_1, x_2 + h_{2+}),$$

где  $h_{1\pm} > 0$ ,  $h_{2\pm} > 0$ , причем  $h_{\alpha+} \neq h_{\alpha-}$ , по крайней мере, для одного  $\alpha$  (рис. 10).

Каждый из операторов  $L_1$  и  $L_2$  аппроксимируем по трем точкам

$$(x_1 - h_{1-}, x_2), (x_1 + h_{1+}, x_2), (x_1, x_2) \text{ (точки 3, 1, 0)}$$

и

$$(x_1, x_2 - h_{2-}), (x_1, x_2 + h_{2+}), (x_1, x_2) \text{ (точки 4, 2, 0)},$$

соответственно. Для этого воспользуемся выражениями (см. гл. I, § 1):

$$\left. \begin{aligned} L_1 v &\sim \Lambda_1^* v = \\ &= \frac{1}{\bar{h}_1} \left[ \frac{v(x_1 + h_{1+}, x_2) - v(x_1, x_2)}{h_{1+}} - \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1 - h_{1-}, x_2)}{h_{1-}} \right], \\ L_2 v &\sim \Lambda_2^* v = \\ &= \frac{1}{\bar{h}_2} \left[ \frac{v(x_1, x_2 + h_{2+}) - v(x_1, x_2)}{h_{2+}} - \frac{v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h_{2-})}{h_{2-}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $\bar{h}_\alpha = 0,5(h_{\alpha-} + h_{\alpha+})$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Разностный оператор Лапласа на нерегулярном шаблоне будет иметь вид

$$\Lambda^* v = \Lambda_1^* v + \Lambda_2^* v = v_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + v_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}. \quad (13)$$

Если, например,  $h_{1-} = h_{1+} = h_1$ , то  $\Lambda_1^* v = \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}$  и т. д. Чтобы не выписывать аргументов (это слишком громоздко при  $p > 2$ ), введем обозначения

$$x^{(+1)} = (x_1 + h_{1+}, x_2),$$

$$x^{(-1)} = (x_1 - h_{1-}, x_2),$$

$$x^{(\pm 1_2)} = (x_1, x_2 \pm h_{2\pm}),$$

$$v^{(+1_\alpha)} = v(x^{(+1_\alpha)}),$$

$$v = v(x), \quad v^{(-1_\alpha)} = v(x^{(-1_\alpha)}),$$

$$\alpha = 1, 2.$$

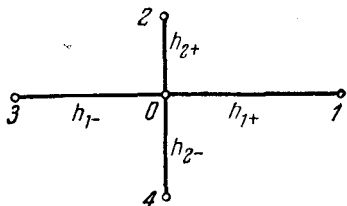


Рис. 10. Нерегулярный шаблон «крест».

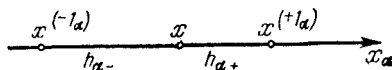


Рис. 11.

На рис. 11 показано расположение точек  $x$  и  $x^{(\pm 1_\alpha)}$ . Выражение для  $\Lambda_\alpha^* v$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_\alpha^* v &= v_{\bar{x}_\alpha \bar{x}_\alpha} = \frac{1}{\bar{h}_\alpha} \left[ \frac{v^{(+1_\alpha)} - v}{h_{\alpha+}} - \frac{v - v^{(-1_\alpha)}}{h_{\alpha-}} \right], \\ \bar{h}_\alpha &= 0,5(h_{\alpha-} + h_{\alpha+}), \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В гл. I, § 1 было получено выражение для  $v_{\bar{x}\bar{x}} - v''$ . Используя его, сразу напишем

$$\Lambda_{\alpha}^* v - L_{\alpha} v = \frac{1}{3} (h_{\alpha+} - h_{\alpha-}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O(h_{\alpha}^2). \quad (15)$$

Таким образом, на нерегулярном шаблоне разностный оператор  $\Lambda^*$ , определяемый по формуле (13), аппроксимирует оператор Лапласа с первым порядком.

**2. Разностная задача Дирихле в прямоугольнике.** Пусть

$$\bar{G}_0 = (0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2)$$

— прямоугольник со сторонами  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 12),  $\Gamma$  — его граница. Рассмотрим в  $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$  задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G_0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (16)$$

Построим в  $\bar{G}_0$  сетку  $\bar{\omega}_h$  с шагами  $h_1 = l_1/N_1$  и  $h_2 = l_2/N_2$ , где  $N_1 > 0$  и  $N_2 > 0$  — целые числа. Для этого построим два семейства прямых

$$x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, 1, \dots, N_1, \quad x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, 1, \dots, N_2.$$

Точки пересечения этих прямых  $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$  с координатами  $i_1 h_1$  и  $i_2 h_2$  назовем узлами. Если  $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$  лежит внутри прямоугольника (т. е.  $0 < i_1 < N_1$ ,  $0 < i_2 < N_2$ ), то такой узел назовем *внутренним*. Пусть  $\omega_h$  — множество всех внутренних узлов. Общее число внутренних узлов равно  $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ .

Узлы, лежащие на границе прямоугольника (при  $i_1 = 0, N_1$  или  $i_2 = 0, N_2$ ), кроме четырех узлов  $(0, 0), (0, l_2), (l_1, 0), (l_1, l_2)$ , назовем *граничными* (они обозначены на рис. 12 крестиками). Они образуют множество  $\gamma_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$ . Совокупность всех внутренних и граничных узлов на-

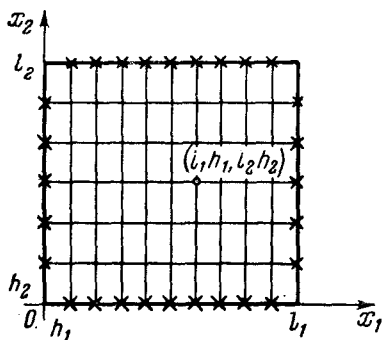


Рис. 12.

зовем сеткой  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  в прямоугольнике  $\bar{G}_0$ . В каждом внутреннем узле  $x \in \omega_h$  может быть построен пятиточечный регулярный шаблон «крест», все узлы которого  $x^{(\pm 1, \alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$  принадлежат  $\bar{\omega}_h$  (т. е. либо  $\omega_h$ , либо  $\gamma_h$ ). Поэтому во всех внутренних узлах можно заменить оператор Лапласа  $\Delta u$  разностным оператором

$$\Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}.$$

Правую часть  $-f(x)$  уравнения (16) можно аппроксимировать сеточной функцией  $-\varphi(x)$  так, чтобы  $\varphi(x) - f(x) = O(|h|^2)$ ,  $f(x) \in C^{(2)}$ . Считая  $f(x)$  непрерывной функцией, полагаем  $\varphi(x) = f(x)$ .

В результате задаче (16) ставим в соответствие разностную задачу Дирихле: найти сеточную функцию  $y(x)$ , определенную на  $\bar{\omega}_h$ , удовлетворяющую во внутренних узлах (на  $\omega_h$ ) уравнению

$$\Delta y = -f(x), \quad \Delta y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \omega_h \quad (17)$$

и принимающую на границе  $\gamma_h$  заданные значения

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (18)$$

Отметим, что сетка  $\bar{\omega}_h(\bar{G}_0)$  при  $h_1 \neq h_2$  называется *прямоугольной*, а при  $h_1 = h_2 = h$  — *квадратной* сеткой.

Напишем подробное выражение для  $\Delta y$  на квадратной сетке:

$$\Delta y = \frac{1}{h^2} (y^{(+1)} + y^{(-1)} + y^{(+2)} + y^{(-2)} - 4y).$$

Пусть  $\varphi = 0$ . Разрешим уравнение  $\Delta y = 0$  относительно  $y$ :

$$y = \frac{1}{4} (y^{(-1)} + y^{(+1)} + y^{(-2)} + y^{(+2)}).$$

Значение  $y$  в центре шаблона есть среднее арифметическое значений  $y$  в остальных четырех узлах шаблона. Эта формула является разностным аналогом формулы среднего значения для гармонической функции.

Из (17), (18) видно, что значения  $\mu(x)$  в вершинах прямоугольника не используются. Это и определило выбор  $\gamma_h$ . В случае третьей краевой задачи и схемы  $O(|h|^4)$  (см. п. 9) граница  $\gamma_h$  состоит из всех узлов, лежащих на границе прямоугольника, включая его вершины.

Методы численного решения системы  $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$  алгебраических уравнений (17) будут рассмотрены отдельно (см. гл. VIII).

Для оценки точности разностной схемы (17), (18), образуем разность  $z = y - u$ , где  $y$  — решение задачи (17), (18),  $u$  — решение задачи (16). Подставляя  $y = z + u$  в (16), получим для  $z$  задачу

$$\Delta z = -\psi \text{ на } \omega_h, \quad z = 0 \text{ на } \gamma_h, \quad (19)$$

где  $\psi = \Delta u + f$  — погрешность аппроксимации уравнения (16) схемой (17).

Так как  $\Delta u + f = 0$ , то

$$\psi = \Delta u + f - \Delta u + \Delta u = \Delta u - \Delta u,$$

т. е.  $\psi = \Delta u - \Delta u$ .



Из (8) следует, что

$$\psi = \frac{h_1^2}{12} \frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial x_1^4} + \frac{h_2^2}{12} \frac{\overline{\partial^4 u}}{\partial x_2^4} \text{ при } u \in C^{(4)}, \quad (20)$$

где черта сверху означает, что берутся значения в некоторых средних точках на интервалах  $(x_1 - h_1, x_2)$ ,  $(x_1 + h_1, x_2)$  и  $(x_1, x_2 - h_2)$ ,  $(x_1, x_2 + h_2)$  соответственно. Обозначая

$$M_4 = \max_{\bar{G}, a} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_a^4} \right|,$$

получаем

$$|\psi| \leq M_4 \frac{|h|^2}{12}. \quad (21)$$

Доказательство сходимости схемы (17) сводится к оценке решения задачи (19) через погрешность аппроксимации. Такая оценка будет получена в дальнейшем при помощи принципа максимума для произвольной области и любого числа измерений.

### 3. Разностная задача Дирихле в области сложной формы.

Если область  $\bar{G}$ , в которой ищется решение задачи Дирихле (1), имеет криволинейную границу, то сетка  $\bar{\omega}_h(\bar{G})$ , вообще говоря, неравномерна вблизи границы. Ниже дается описание такой сетки и классификация ее узлов.

Рассмотрим произвольную конечную область  $G$  с границей  $\Gamma$  в пространстве  $p$  измерений;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  — точка с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Построим сетку в области  $\bar{G} = G + \Gamma$ .

Для простоты изложение проведем для двумерной области ( $p = 2$ ). Конструктивно будем использовать следующее предположение о форме области  $\bar{G}$ : пересечение области  $G$  с любой прямой, проведенной через внутреннюю точку  $x \in G$  параллельно оси координат  $Ox_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ), состоит из конечного числа интервалов.

Пусть начало координат лежит внутри области  $G$ . Построим два семейства эквидистантных прямых

$$x_1^{(i)} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x_2^{(i)} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $h_1 > 0$  и  $h_2 > 0$  — фиксированные числа. Плоскость  $(x_1, x_2)$  разобьется этими прямыми на прямоугольники со сторонами  $h_1$  и  $h_2$ . Вершины этих прямоугольников с координатами  $x_1 = i_1 h_1$ ,  $x_2 = i_2 h_2$  назовем *узлами*, а множество всех узлов — решеткой на плоскости  $(x_1, x_2)$ . Узлы  $x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ , лежащие внутри области  $G$ , назовем *внутренними*; множество всех внутренних узлов обозначим  $\omega_h = \{x_i \in G\}$ . Точки пересечения прямых  $x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , с границей  $\Gamma$  области  $G$  суть *граничные по направлению  $x_\alpha$  узлы*. Множество всех граничных по направле-

нию  $x_\alpha$  узлов обозначим  $\gamma_{h, \alpha}$ . Пусть  $\gamma_h = \gamma_{h, 1} + \gamma_{h, 2}$  — множество всех *граничных* узлов, т. е. узлов, граничных хотя бы по одному направлению  $x_\alpha$ . Множество всех внутренних и граничных узлов называется *сеткой*  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  в области  $G$  (рис. 13).

Проведем детальную классификацию внутренних узлов. Возьмем какой-либо внутренний узел  $x \in \omega_h$  и проведем через

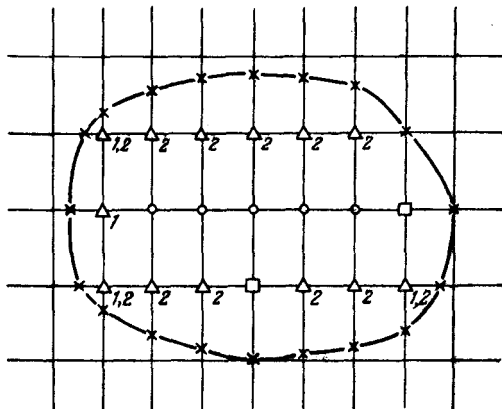


Рис. 13.

него прямую, параллельную оси  $Ox_\alpha$ . Её пересечением с областью  $G$  будет интервал (или несколько интервалов), концы которого являются граничными по направлению  $Ox_\alpha$  узлами. Рассмотрим узлы на этом интервале. Ближайший к концу интервала узел назовем *приграничным по направлению  $Ox_\alpha$*  (по  $x_\alpha$ ) узлом. Если его расстояние от границы  $\gamma_{h, \alpha}$  есть  $h_\alpha^* \neq h_\alpha$ , то такой узел является *нерегулярным по  $x_\alpha$* . Пусть  $\omega_{h, \alpha}^*$  — множество всех приграничных по  $x_\alpha$  узлов, а  $\omega_{h, \alpha}^{**}$  — множество тех приграничных узлов, которые являются нерегулярными по направлению  $x_\alpha$ . Очевидно, что  $\omega_{h, \alpha}^{**} \subseteq \omega_{h, \alpha}^*$ . Обозначим через  $\omega_h^*$  множество всех *приграничных* узлов (т. е. приграничных хотя бы по одному направлению), а через  $\omega_h^{**}$  совокупность всех *нерегулярных* узлов (т. е. нерегулярных хотя бы по одному направлению  $x_1$  или  $x_2$ ). Пусть  $\dot{\omega}_h$  — дополнение  $\omega_h^*$  до  $\omega_h$ , т. е.  $\omega_h = \omega_h^* + \dot{\omega}_h$ . Узлы, принадлежащие  $\dot{\omega}_h$ , будем называть *строго внутренними узлами*. Введем также обозначение  $\dot{\omega}_{h, \alpha}$  для строго внутренних по  $x_\alpha$  узлов (т. е. для узла  $x \in \dot{\omega}_{h, \alpha}$  соседние по направлению  $Ox_\alpha$  узлы являются внутренними).

На рис. 13 значками  $\circ$  отмечены узлы  $\bar{\omega}_h$ ,  $\Delta_\alpha$  — нерегулярные только по  $x_\alpha$  узлы ( $\alpha = 1, 2$ ),  $\Delta_{1,2}$  — нерегулярные как по  $x_1$ , так и по  $x_2$  узлы,  $\square$  — приграничные узлы, регулярные как по  $x_1$ , так и по  $x_2$ .

Будем предполагать, что сетка  $\bar{\omega}_h$  является *связной*, т. е. любые два внутренних узла можно соединить ломаной, звенья которой параллельны координатным осям, а вершинами являются узлы сетки. Тогда по крайней мере один из четырех узлов  $x^{(\pm 1\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$  пятиточечного шаблона

$$(x^{(\pm 1_1)}, x, x^{(\pm 1_2)})$$

(регулярного или нерегулярного) является внутренним.

Требование связности сетки накладывает ограничения как на выбор  $h_1$  и  $h_2$ , так и на форму области и на ее расположение относительно сетки  $\bar{\omega}_h$  при заданных  $h_1$  и  $h_2$ .

Примеры несвязной и связной сеточных областей показаны на рис. 14, а) и 14, б), соответственно. Если имеется область

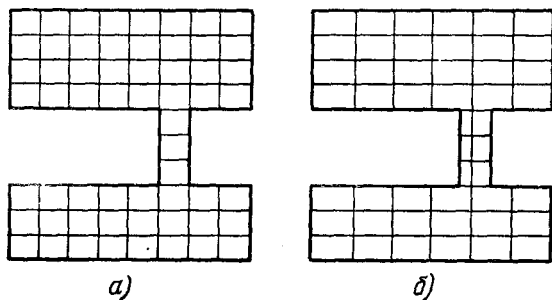


Рис. 14. а) Несвязная сетка. б) Связная сетка.

с узкой перемычкой, то требование связности области может быть выполнено при достаточно малом шаге  $h_\alpha$  (или при сгущении сетки в этой части области). На рис. 14, б) показан тот случай, когда связность сетки достигается не путем ее сгущения, а при соответствующем выборе шага  $h_1$ .

Мы провели детальное описание сетки для области на плоскости. Все проведенные выше построения легко переносятся на случай  $p$ -мерной области. Сетка образуется в результате пересечения гиперплоскостей (плоскостей при  $p = 3$ , прямых при  $p = 2$ )

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, \pm 1, \dots, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

где  $h_\alpha > 0$ . Указанная выше классификация узлов остается без изменений.

Аппроксимируем в каждом внутреннем узле  $x \in \omega_h$  дифференциальный оператор  $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$  трехточечным разностным оператором  $\Lambda_\alpha$ .

Если узел  $x \in \omega_h$  — регулярен по  $x_\alpha$ , то разностный оператор  $\Lambda_\alpha$  записывается на регулярном шаблоне  $(x^{(-1)_\alpha}, x, x^{(+1)_\alpha})$ :

$$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{y^{(+1)_\alpha} - 2y + y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^2}. \quad (22)$$

Если же узел  $x \in \omega_{h, \alpha}^{**}$ , т. е. нерегулярен по  $x_\alpha$ , то  $\Lambda_\alpha$  записывается на нерегулярном шаблоне:

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{\bar{h}_\alpha} \left( \frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_\alpha} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha^*} \right) \text{ при } x^{(-1)_\alpha} \in \gamma_{h, \alpha}, \quad (23a)$$

где  $h_\alpha^*$  — расстояние между узлами  $x$  и  $x^{(-1)_\alpha}$ ;  $\bar{h}_\alpha = 0,5(h_\alpha + h_\alpha^*)$ , или

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{\bar{h}_\alpha} \left( \frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_\alpha^*} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_\alpha} \right) \text{ при } x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_{h, \alpha}, \quad (23б)$$

где  $h_\alpha^*$  — расстояние между узлами  $x$  и  $x^{(+1)_\alpha}$ ,  $\bar{h}_\alpha = 0,5(h_\alpha + h_\alpha^*)$ .

Возможен случай, когда  $x^{(-1)_\alpha} \in \gamma_{h, \alpha}$  и  $x^{(+1)_\alpha} \in \gamma_{h, \alpha}$ ; тогда

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{\bar{h}_\alpha} \left( \frac{y^{(+1)_\alpha} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1)_\alpha}}{h_{\alpha-}^*} \right), \quad (23в)$$

где  $h_{\alpha\pm}^* \neq h_\alpha$  — расстояние между  $x$  и  $x^{(\pm 1)_\alpha}$ ,  $\bar{h}_\alpha = 0,5(h_{\alpha+}^* + h_{\alpha-}^*)$ .

На рис. 15 указаны типичные ситуации, соответствующие случаям (23a) — (23в).

Аппроксимируя  $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$  разностным оператором по одной из формул (22) — (23в), получим вместо (1) разностное уравнение  $\Lambda u + \varphi(x) = 0$  для всех  $x \in \omega_h$ , где  $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha$ . На сеточной границе  $\gamma_h$  будем задавать точное значение  $y|_{\gamma_h} = \mu(x)$ .

В результате приходим к следующей *разностной задаче Дирихле*: найти сеточную функцию  $y(x)$ , определенную для  $x \in \in \bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ , удовлетворяющую во внутренних узлах уравнению

$$\Lambda y + \varphi(x) = 0 \text{ в регулярных узлах,} \quad (24)$$

$$\Lambda^* y + \varphi(x) = 0 \text{ в нерегулярных узлах} \quad (25)$$

и принимающую в граничных узлах  $x \in \gamma_h$  заданные значения

$$y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \quad (26)$$

Укажем другие постановки разностной задачи Дирихле. Они отличаются от (24)–(26) уравнением для  $y$  в нерегулярных узлах.

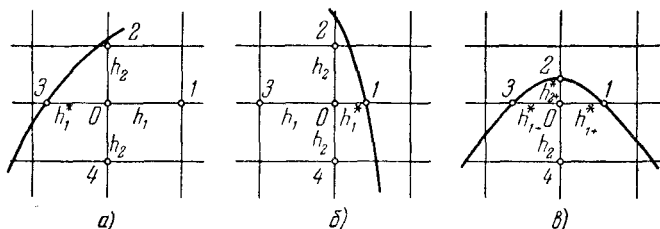


Рис. 15.

$$a) \Lambda_1^* y = \frac{1}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^*} \right),$$

$$\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad \Lambda^* = \Lambda_1^* + \Lambda_2.$$

$$b) \Lambda_1^* y = \frac{1}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1^*} - \frac{y_0 - y_3}{h_1} \right),$$

$$\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad \Lambda^* = \Lambda_1^* + \Lambda_2.$$

$$в) \Lambda_1^* y = \frac{1}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_{1+}^*} - \frac{y_0 - y_3}{h_{1-}^*} \right),$$

$$\Lambda_2^* y = \frac{1}{h_2} \left( \frac{y_2 - y_0}{h_2^*} - \frac{y_0 - y_1}{h_2} \right),$$

$$\Lambda^* = \Lambda_1^* + \Lambda_2^*.$$

1) Простой снос. Разностное уравнение (24) пишется только в регулярных узлах  $x \in \omega_h$ , а на  $\omega_h^{**}$  задается значение, равное значению  $u|_{\Gamma} = \mu(x)$  в ближайшей точке, например,

$$y(x) = \mu(x^{(-1)_\alpha}) \quad \text{при } x \in \omega_{h,\alpha}^{**}. \quad (27)$$

Это соответствует условиям

$$y_{\bar{x}_\alpha} = 0 \quad \text{при } x \in \omega_{h,\alpha}^{**}, \quad \text{и } y = \mu \quad \text{при } x^{(-1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}.$$

2) Линейная интерполяция по двум точкам. В регулярных узлах пишется по-прежнему схема (24). В нерегулярном узле  $x \in \omega_{h,\alpha}^{**}$  значение  $y$  определяется путем линейной интерполяции по точкам  $x^{(-1)_\alpha} \in \gamma_{h,\alpha}$  и  $x^{(+1)_\alpha} \in \omega_h$ . Это означает, что в узлах  $x \in \omega_{h,\alpha}^{**}$  пишется уравнение  $\Lambda_\alpha^* y = 0$ ,

а в граничных узлах  $x \in \gamma_h$  задается условие  $y = \mu$ . (Здесь  $\alpha$  одно из значений  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ .)

3) Интерполяция по  $2p$  (по четырем в случае  $p = 2$ ) узлам. В нерегулярном узле  $x \in \omega_h^{**}$  пишется фактически однородное уравнение

$$\Lambda^* y = 0$$

(на нерегулярном шаблоне).

Условие  $\Lambda^* y = -\varphi$  при  $x \in \omega_h^{**}$ , как будет следовать из полученных ниже оценок погрешности схемы, является наиболее точным.

По аналогии с п. 2 напомним условия для погрешности схемы; здесь  $y(x)$  — решение разностной задачи (24) — (26),  $u = u(x)$  — решение исходной задачи (1). После подстановки  $y = z + u$  в (24) — (26) получим

$$\left. \begin{aligned} \Lambda z &= -\psi \text{ в регулярных узлах,} \\ \Lambda^* z &= -\psi^* \text{ в нерегулярных узлах,} \\ z &= 0 \text{ на } \gamma_h, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где  $\psi$  — погрешность аппроксимации, равная (при  $\varphi(x) = f(x)$ )

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \Lambda u + \varphi = \Lambda u - Lu \text{ в регулярных узлах,} \\ \psi^* &= \Lambda^* u - Lu \text{ в нерегулярных узлах.} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Пусть  $u \in C^{(4)}(\bar{G})$ , где  $C^{(4)}$  — класс функций  $u(x)$ , имеющих четыре непрерывных в  $\bar{G}$  производных по  $x_1, \dots, x_p$ . Тогда, в соответствии с (21), в регулярных узлах имеем:

$$|\psi| \leq M_4 |h|^2 / 12, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2. \quad (30)$$

Представим  $\psi^*$  на  $\omega_h^{**}$  в виде суммы:  $\psi^* = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha}^*$ ,  $\psi_{\alpha}^* = \Lambda_{\alpha}^* u - L_{\alpha} u$ .

Учитывая (15), будем иметь

$$|\psi_{\alpha}^*| \leq \frac{M_3}{3} |h_{\alpha+}^* - h_{\alpha-}^*| + \frac{M_4}{12} h_{\alpha}^2 \text{ при } x \in \omega_{h,\alpha}^{**}. \quad (31)$$

#### 4. Запись разностного уравнения в канонической форме.

Рассмотрим  $(2p + 1)$ -точечную схему  $\Lambda y = -f$  в регулярном узле:

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}^2} (y^{(+1\alpha)} - 2y + y^{(-1\alpha)}) = -f.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2}{h_{\alpha}^2} y(x) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}^2} (y^{(+1\alpha)} + y^{(-1\alpha)}) + f(x). \quad (32)$$

Остановимся на случае двух измерений. Из рис. 8 видно, что в регулярном узле

$$2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y_0 = \frac{1}{h_1^2} (y_1 + y_3) + \frac{1}{h_2^2} (y_2 + y_4) + f_0.$$

Пусть узел  $x \in \omega_{h,1}^{**}$  нерегулярен. В случае, соответствующем рис. 15, а), имеем

$$\Lambda_1^* y_0 = \frac{1}{h_1} \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_1^*} \right) = \frac{1}{h_1} \left( \frac{y_1}{h_1} + \frac{y_3}{h_1^*} - \frac{2h_1}{h_1 h_1^*} y_0 \right),$$

$$\Lambda_2 y_0 = \frac{1}{h_2^2} (y_2 - 2y_0 + y_4).$$

Из уравнения

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2 y = -f$$

находим

$$\left( \frac{2}{h_1^* h_1} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_0 = \frac{1}{h_1 h_1} y_1 + \frac{1}{h_1 h_1^*} y_3 + \frac{1}{h_2^2} (y_2 + y_4) + f_0.$$

В случае, соответствующем рис. 15, в), будем иметь

$$\left( \frac{2}{h_{1-}^* h_{1+}^*} + \frac{2}{h_2 h_2^*} \right) y_0 = \frac{1}{h_{1-}^* h_{1+}^*} y_1 + \frac{1}{h_{1-}^* h_{1+}^*} y_3 + \frac{1}{h_2 h_2^*} y_2 + \frac{1}{h_2 h_2^*} y_4 + f_0.$$

где

$$h_{1-} = 0,5 (h_{1-}^* + h_{1+}^*), \quad h_2 = 0,5 (h_2 + h_2^*).$$

Пусть  $\bar{\omega}_h(\bar{G})$  — сетка в  $p$ -мерной области и  $x \in \omega_{h,\alpha}^{**}$  нерегулярный узел. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^* y &= \frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha-}^*} \right) = \\ &= \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}^*} y^{(+1\alpha)} + \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha-}^*} y^{(-1\alpha)} - \frac{2}{h_{\alpha-}^* h_{\alpha+}^*} y. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя это выражение в уравнение  $\Lambda^* y = -f$  и формально считая, что  $x$  нерегулярен по всем  $x_\alpha$ , получим

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2}{h_{\alpha-}^* h_{\alpha+}^*} y(x) = \sum_{\alpha=1}^p \left( \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}^*} y^{(+1\alpha)} + \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha-}^*} y^{(-1\alpha)} \right) + f(x). \quad (34)$$

Если  $x$  регулярен по некоторому направлению  $x_k$ , то в этой формуле следует положить  $h_{k-}^* = h_{k+}^* = h_k = h_k$ . Если же  $x$  — регуляренный по всем  $x_\alpha$  узел, то полагаем  $h_{\alpha-}^* = h_{\alpha+}^* = h_\alpha = h_\alpha$  для всех  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , что дает формулу (32). Сравнивая (32) и

(34), видим, что эти уравнения можно записать в канонической форме

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \quad (35)$$

где  $\mathcal{W}'(x)$  — множество  $2p$  узлов  $(2p + 1)$ -точечного шаблона «крест» с центром в точке  $x$ , исключая сам узел  $x$ , т. е.  $\xi \neq x$ ; множество  $\mathcal{W}'(x)$  будем называть *окрестностью* узла  $x$ .  $A(x)$  и  $B(x, \xi)$  — заданные коэффициенты уравнения. Из (32) и (34) видно, что

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) = A(x) \quad \text{для всех } x \in \omega_h. \quad (36)$$

К уравнению (35) следует присоединить граничное условие

$$y|_{\gamma_h} = \mu(x). \quad (37)$$

Разностная задача Дирихле является частным случаем более общей задачи: найти сеточную функцию  $y(x)$ , определенную на  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  и удовлетворяющую на  $\omega_h$  уравнению

$$\left. \begin{aligned} A(x)y(x) &= \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \\ y(x) &= \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi) \geq 0 \quad (39)$$

для всех  $x \in \omega_h$ .

**З а м е ч а н и е.** Третья разностная краевая задача для уравнения Пуассона приводится также к виду (38), причем уравнение (38) выполнено для всех  $x \in \bar{\omega}_h$  и имеют место условия (39); кроме того, требуется, чтобы  $D \geq \delta > 0$  на  $\gamma_h$ .

Для доказательства существования и единственности решения задачи (38), (39) достаточно убедиться в том, что однородное уравнение

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) = 0, \quad x \in \omega_h, \\ y(x) &= 0, \quad x \in \gamma_h \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

имеет только тривиальное решение  $y(x) \equiv 0$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ . Этот факт, как будет показано ниже, следует из принципа максимума, который имеет место для схем (38), (39).

**5. Принцип максимума.** Рассмотрим сейчас задачу (38), (39) независимо от разностных схем, аппроксимирующих уравнение Пуассона. Будем везде предполагать, что сетка  $\omega_h$  связна. В общем случае это означает, что для любых заданных точек



$\bar{x} \in \omega_h$  и  $\bar{\bar{x}} \in \omega_h$  существует система окрестностей  $\{W'(x)\}$ ,  $x \in \omega_h$ , такая, что можно осуществить переход от  $\bar{x}$  к  $\bar{\bar{x}}$ , используя узлы этих окрестностей (т. е. найдутся точки  $x_i \in \omega_h$ , такие, что  $\bar{x} \in W'(x_1)$ ,  $x_1 \in W'(x_2)$ , ...,  $x_n \in W'(\bar{\bar{x}})$ ). В случае рассмотренных ранее разностных схем, аппроксимирующих уравнение Пуассона, это определение связности совпадает с данным выше определением.

**Теорема 1 (принцип максимума).** Пусть  $y(x)$  — некоторая сеточная функция, заданная на  $\omega_h$  и не равная постоянной ( $y(x) \neq \text{const}$  на  $\omega_h$ ). Тогда, если  $\mathcal{L}[y] \leq 0$  ( $\mathcal{L}[y] \geq 0$ ), то  $y(x)$  не может принимать наибольшего (наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах  $x \in \omega_h$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\mathcal{L}[y] = F(x)$ . Пусть  $F(x) \leq 0$  для всех  $x \in \omega_h$ . Предположим, что  $y(x)$  принимает наибольшее положительное значение в некотором внутреннем узле. Так как  $y(x) \neq \text{const}$  и сетка  $\omega_h$  связна, то существует такая точка  $\bar{x} \in \omega_h$ , в которой  $y(\bar{x}) = \max_{x \in \bar{\omega}_h} y(x) = M_0 > 0$ , а в соседнем узле  $\tilde{x} \in W'(\bar{x})$  имеет место неравенство  $y(\tilde{x}) < M_0$ . Уравнение (38) в узле  $\bar{x}$  перепишем в виде

$$\left[ A(\bar{x}) - \sum_{\xi \in W'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi) \right] y(\bar{x}) + \sum_{\xi \in W'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi) (y(\bar{x}) - y(\xi)) = F(\bar{x}). \quad (41)$$

Так как

$$\sum_{\xi \in W'(\bar{x})} B(\bar{x}, \xi) (y(\bar{x}) - y(\xi)) \geq B(\bar{x}, \tilde{x}) (y(\bar{x}) - y(\tilde{x})) > 0,$$

то из (41) следует  $D(\bar{x}) y(\bar{x}) + B(\bar{x}, \tilde{x}) (y(\bar{x}) - y(\tilde{x})) \leq F(\bar{x})$ . Учитывая, что

$$D(\bar{x}) \geq 0, \quad B(\bar{x}, \tilde{x}) > 0, \quad y(\bar{x}) > y(\tilde{x}),$$

получаем  $0 < F(\bar{x})$ , что противоречит условию  $F(x) \leq 0$ .

Первая часть теоремы доказана. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

**Теорема 2.** Пусть функция  $y(x)$ , определенная на  $\bar{\omega}_h$ , неотрицательна на границе  $\gamma_h$  ( $y(x) \geq 0$ ,  $x \in \gamma_h$ ) и выполнено условие

$$\mathcal{L}[y] \geq 0 \text{ на } \omega_h.$$

Тогда  $y(x)$  неотрицательна для всех  $x \in \bar{\omega}_h$ :

$$y(x) \geq 0 \text{ на } \bar{\omega}_h. \quad (42)$$

Если же  $y(x) \leq 0$  на  $\gamma_h$ ,  $\mathcal{L}[y] \leq 0$  на  $\omega_h$ , то

$$y(x) \leq 0 \text{ на } \bar{\omega}_h. \quad (43)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{L}[y] = F(x) \geq 0$  на  $\omega_h$ ,  $y(x) \geq 0$  на  $\gamma_h$ . Предположим, что  $y(x) < 0$  хотя бы в одном внутреннем узле  $x_0 \in \omega_h$ . Тогда  $y(x)$  должна принимать наименьшее отрицательное значение внутри  $\omega_h$ , что невозможно в силу принципа максимума, так как  $y(x) \neq \text{const}$  на  $\omega_h$  ( $y(x_0) < 0$ ,  $y|_{\gamma_h} \geq 0$ ).

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

**Следствие.** *Однородное уравнение (40) имеет только тривиальное решение:  $y(x) \equiv 0$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ .*

Нетрудно заметить, что  $y(x) \equiv 0$  есть решение задачи (40). Пусть существует решение задачи (40)  $y(x) \neq 0$ . Если  $y(x) \neq 0$  хотя бы в одной точке, то, в силу теоремы 2, должны выполняться одновременно неравенства (42) и (43), что возможно только при  $y(x) \equiv 0$ .

Из следствия и вытекает существование и единственность решения задачи (38), (39).

**Теорема 3 (теорема сравнения).** *Пусть  $y(x)$  — решение задачи (38), (39), а  $\bar{y}(x)$  — решение задачи, которая получится при замене в (38), (39) функций  $F(x)$ ,  $\mu(x)$  соответственно на  $\bar{F}(x)$ ,  $\bar{\mu}(x)$ . Тогда, если выполнены условия*

$$|F(x)| \leq \bar{F}(x), \quad x \in \omega_h, \quad |\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x), \quad x \in \gamma_h,$$

то имеет место неравенство

$$|y(x)| \leq \bar{y}(x) \quad \text{на } \bar{\omega}_h. \quad (44)$$

**Доказательство.** В силу теоремы 2 справедливо неравенство  $\bar{y}(x) \geq 0$  на  $\omega_h$ . Функции  $u = \bar{y} + y$ ,  $v = \bar{y} - y$  удовлетворяют уравнению (38) с правыми частями  $F_u = \bar{F} + F$ ,  $F_v = \bar{F} - F$  и граничными значениями  $u|_{\gamma_h} = (\bar{y} + y)|_{\gamma_h}$ ,  $v|_{\gamma_h} = (\bar{y} - y)|_{\gamma_h}$ . Так как по условию  $F_u \geq 0$ ,  $u|_{\gamma_h} \geq 0$  и  $F_v \geq 0$ ,  $v|_{\gamma_h} \geq 0$ , то, в силу теоремы 2, имеем  $u \geq 0$  или  $y \geq -\bar{y}$ ,  $v \geq 0$  или  $y \leq \bar{y}$ . Отсюда следует, что  $-\bar{y} \leq y \leq \bar{y}$ , т. е.  $|y| \leq \bar{y}$  на  $\bar{\omega}_h$ .

**Следствие.** *Для решения однородного уравнения (40) справедлива оценка*

$$\|y\|_{\bar{\omega}} \leq \|y\|_{\gamma}, \quad (45)$$

где

$$\|y\|_{\bar{\omega}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|, \quad \|y\|_{\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |y(x)|.$$

Неравенство (45) следует из теоремы 3, если положить  $\bar{y}(x) = |y(x)|$  на  $\gamma_h$  и  $F = \bar{F} \equiv 0$  на  $\omega_h$ .

**6. Оценка решения неоднородного уравнения.** Решение задачи (38) можно представить в виде суммы  $y = \tilde{y} + \bar{y}$ , где  $\tilde{y}$  — решение уравнения (38) при  $F = 0$ , принимающее на границе  $\gamma_h$  заданные значения

$$\tilde{y}|_{\gamma_h} = \mu(x),$$

а  $\bar{y}(x)$  решение неоднородного уравнения (38), обращающееся в нуль на границе  $\gamma_h$ :

$$\bar{y}|_{\gamma_h} = 0.$$

Для  $\tilde{y}$ , в силу принципа максимума, следует оценка

$$\|\tilde{y}\|_{\omega} \leq \|\mu\|_{\gamma}.$$

Оценка  $\bar{y}$  представляет значительно большие трудности. Если известно частное решение  $Y$  задачи (38), (39) с правой частью  $\bar{F} \geq \|F\|_{\omega}$ , мажорирующей  $F(x)$ , то, пользуясь теоремой 3, получим искомую оценку

$$\|\bar{y}\|_{\omega} \leq \|Y\|_{\omega}.$$

Построение мажорантной функции  $Y(x)$  в явном виде удается лишь в некоторых специальных случаях. В п. 7 будет построена мажорантная функция  $Y(x)$  (мажоранта Гершгорина) для разностной задачи Дирихле. Однако для правильной оценки порядка точности разностной задачи Дирихле этого недостаточно, так как нужно отдельно оценить вклад погрешности аппроксимации в приграничных узлах в погрешность решения разностной задачи.

**Теорема 4.** Если  $D(x) > 0$  всюду на  $\omega_h$ , то для решения уравнения (38) с  $\mu(x) = 0$  верна оценка

$$\|y\|_{\omega} \leq \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_{\omega}. \quad (46)$$

**Доказательство.** В силу теоремы сравнения  $\|y\|_{\omega} \leq \|Y\|_{\omega}$ , где  $Y$  — решение задачи (38), (39) с правой частью  $\bar{F} = |F|$ ,  $Y|_{\gamma_h} = 0$ . Пусть  $Y(x)$  принимает наибольшее значение в точке  $x_0 \in \omega_h$ . Так как  $Y(x_0) > 0$ , то

$$\begin{aligned} A(x_0)Y(x_0) &= \sum_{\xi \in \Pi'(x_0)} B(x_0, \xi)Y(\xi) + |F(x_0)| \leq \\ &\leq (A(x_0) - D(x_0))Y(x_0) + |F(x_0)|, \end{aligned}$$

т. е.  $D(x_0)Y(x_0) \leq |F(x_0)|$  и, следовательно,

$$\|y\|_{\omega} \leq Y(x_0) \leq \frac{|F(x_0)|}{D(x_0)} \leq \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_{\omega}.$$

**З а м е ч а н и е.** Если  $D(x)$  равномерно ограничен снизу константой  $\delta > 0$ ,  $D(x) \geq \delta > 0$ , то

$$\|y\|_{\omega} \leq \frac{1}{\delta} \|F\|_{\omega}. \quad (47)$$

В самом деле,  $\|F/D\|_{\omega} \leq \|F\|_{\omega}/\delta$  и из (46) следует (47).

Рассмотрим теперь уравнение (38) при однородном граничном условии  $y|_{\gamma_h} = 0$ . Напомним, что через  $\overset{\circ}{\omega}_h$  мы обозначаем множество узлов  $x \in \omega_h$ , для которых  $\bar{W}'(x)$  принадлежит  $\omega_h$ , а через  $\omega_h^*$  — множество тех узлов  $x \in \omega_h$ , для которых хотя бы один из узлов  $\xi$ , входящих в  $\bar{W}'(x)$ , является граничным,  $\xi \in \gamma_h$ . В приграничных узлах  $x \in \omega_h^*$  некоторые узлы  $\xi \in \bar{W}'(x)$  оказываются граничными и поэтому соответствующие слагаемые  $B(x, \xi)y(\xi)$  обращаются в нуль. Это означает, что фактически для приграничных узлов  $x \in \omega_h^*$  суммирование ведется по множеству  $\bar{\bar{W}}'(x) = \bar{W}'(x) \cap \omega_h$  и что

$$\bar{D}(x) \equiv A(x) - \sum_{\xi \in \bar{\bar{W}}'(x)} B(x, \xi) > 0, \quad x \in \omega_h^*. \quad (48)$$

Заметим, что если  $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$ , то

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{W}}'(x) &= \bar{W}'(x) \cap \omega_h = \bar{W}'(x), \\ \bar{D}(x) &= D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \bar{\bar{W}}'(x)} B(x, \xi). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия

$$\bar{D}(x) = 0, \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \quad \bar{D}(x) > 0, \quad x \in \omega_h^*, \quad (50)$$

$$F(x) = 0, \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_h. \quad (51)$$

Тогда для решения задачи

$$\left. \begin{aligned} A(x)y(x) &= \sum_{\xi \in \bar{\bar{W}}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \\ A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad x \in \omega_h \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

с однородным граничным условием  $y|_{\gamma_h} = 0$  имеет место оценка

$$\|y\|_{\omega} \leq \left\| \frac{F(x)}{\bar{D}(x)} \right\|_{\omega^*}, \quad (53)$$

где

$$\|f\|_{\omega^*} = \max_{x \in \omega_h^*} |f(x)|.$$

**Доказательство.** Возьмем мажорантную функцию  $Y(x)$  — решение уравнения (52) с правой частью  $\bar{F}(x) = 0$  при  $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$ ,  $\bar{F}(x) = |F(x)|$  при  $x \in \omega_h^*$  и  $Y|_{V_h} = 0$ . В силу теоремы 2  $Y(x) \geq 0$  на  $\omega_h$ . Так как  $\overset{\circ}{\omega}_h$  связная область, то  $Y(x) \neq \text{const}$  не может принимать наибольшего значения на  $\overset{\circ}{\omega}_h$ , где  $\bar{F} = 0$ . Пусть  $x^* \in \omega_h^*$  — узел, в котором  $Y(x)$  имеет максимум. По условию  $\bar{D}(x^*) > 0$ ; поэтому, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4, получаем (53).

Правую часть  $F(x)$  всегда можно представить в виде суммы  $F = \overset{\circ}{F} + F^*$ , где

$$\overset{\circ}{F} = \begin{cases} F, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ 0, & x \in \omega_h^*, \end{cases} \quad F^* = \begin{cases} 0, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ F, & x \in \omega_h^*. \end{cases} \quad (54)$$

Оценка решения задачи (52) при  $F = \overset{\circ}{F}$  в случае  $D(x) = 0$  на  $\overset{\circ}{\omega}_h$  может быть получена методом мажорантной функции  $Y(x)$ .

**7. Оценка решения разностной задачи Дирихле.** Пользуясь результатами п. 6, дадим равномерную оценку решения разностной задачи Дирихле (24) — (26). С этой целью представим решение этой задачи в виде

$$y = \bar{y} + \tilde{y}, \quad (55)$$

где  $\bar{y}$  — решение задачи (24) — (26) с однородным граничным условием  $\bar{y}|_{V_h} = 0$ , а  $\tilde{y}$  — решение однородных разностных уравнений (24), (25) при  $\varphi \equiv 0$  с неоднородным граничным условием  $\tilde{y}|_{V_h} = \mu(x)$ . Так как, согласно п. 4, условия теорем 1—3 выполнены, то для  $\tilde{y}$  сразу получим оценку

$$\|\tilde{y}\|_{\omega} \leq \|\mu\|_{V}. \quad (56)$$

Правую часть  $\varphi(x)$  представим в виде суммы

$$\varphi = \overset{\circ}{\varphi} + \varphi^*, \quad (57)$$

где  $\varphi^* = 0$  в регулярных узлах. В соответствии с этим положим

$$\bar{y} = v + w, \quad (58)$$

где  $w$  — решение задачи

$$\bar{\Delta}w = -\overset{\circ}{\varphi}, \quad w|_{V_h} = 0, \quad (59)$$

а  $v$  — решение задачи

$$\bar{\Delta}v = -\varphi^*, \quad v|_{V_h} = 0. \quad (60)$$

Здесь

$$\bar{\Lambda} = \begin{cases} \Lambda & \text{в регулярных узлах,} \\ \Lambda^* & \text{в нерегулярных узлах.} \end{cases} \quad (61)$$

Каждую из функций  $\omega(x)$  и  $\nu(x)$  оценим отдельно. Для оценки  $\omega(x)$  используем теорему сравнения. Предполагая, что начало координат лежит внутри области  $G$ , возьмем мажорантную функцию

$$Y(x) = K(R^2 - r^2), \quad r^2 = \sum_{\alpha=1}^p x_\alpha^2, \quad (62)$$

где  $K = \text{const} > 0$ ,  $R$  — радиус  $p$ -мерного шара (окружности при  $p = 2$ ) с центром в начале координат, целиком содержащего область  $G$ .

Учитывая, что  $\Lambda_\alpha x_\beta^2 = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,

$$\Lambda_\alpha x_\alpha^2 = \frac{(x_\alpha + h_\alpha)^2 - 2x_\alpha^2 + (x_\alpha - h_\alpha)^2}{h_\alpha^2} = 2, \quad \Lambda_\alpha^* x_\alpha^2 = 2,$$

получаем  $\Lambda Y = -2pK$ ,  $\Lambda^* Y = -2pK$ . Очевидно, что  $R \leq D_G$ , где  $D_G$  — диаметр области  $G$ . Выберем теперь постоянную

$$K = \frac{1}{2p} \|\overset{\circ}{\Phi}\|_\omega \quad (63)$$

так, чтобы уравнение для  $Y$  имело вид

$$\bar{\Lambda} Y = -\|\overset{\circ}{\Phi}\|_\omega = -\bar{F} \text{ на } \omega_h. \quad (64)$$

Из (62) видно, что  $Y|_{V_h} \geq 0$ , так как  $r^2 \leq R^2$ . Сравнение (64) с (59) показывает, что  $|\overset{\circ}{\Phi}| \leq \bar{F}$ ,  $0 = \omega|_{V_h} \leq Y|_{V_h}$ . Поэтому, в силу теоремы 3, будем иметь

$$\|\omega\|_\omega \leq \|Y\|_\omega.$$

Учитывая, наконец, что

$$Y \leq KR^2 = \frac{R^2}{2p} \|\overset{\circ}{\Phi}\|_\omega, \quad (65)$$

получим

$$\|\omega\|_\omega \leq \frac{1}{2p} R^2 \|\overset{\circ}{\Phi}\|_\omega. \quad (66)$$

Перейдем к оценке функции  $\nu(x)$ , используя ограниченность снизу сеточной функции  $\bar{D}(x)$ .

Покажем, что

$$\bar{D}(x) \geq 1/\delta_\alpha^* \text{ в приграничных узлах } x \in \omega_{h, \alpha}^*, \quad (67)$$

где

$$\delta_\alpha^* = 0,5h_{\alpha+}^* h_{\alpha-}^* \text{ либо } \delta_\alpha^* = h_\alpha h_\alpha^* \quad (68)$$

в нерегулярных узлах,  $\delta_\alpha^* = h_\alpha^2$  в регулярных приграничных узлах.

В самом деле, пусть  $x \in \omega_{h, \alpha}^*$  нерегулярный лишь по  $x_\alpha$  узел, так что  $x^{(+1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}$ ,  $x^{(-1\alpha)} \in \omega_h$ . Из уравнения

$$\Lambda_\alpha^* y + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \Lambda_\beta y = -\varphi,$$

где

$$\Lambda_\alpha^* y = \frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha} \right) = -\frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{y}{h_{\alpha+}^*} + \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_\alpha} \right)$$

(так как на границе  $y^{(+1\alpha)} = 0$ ), следует

$$\sum_{\xi \in \bar{\omega}'(x)} B(x, \xi) = \frac{1}{h_\alpha h_\alpha^*} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \frac{2}{h_\beta^2},$$

$$A(x) = \frac{2}{h_\alpha h_{\alpha+}^*} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \frac{2}{h_\beta^2}, \quad \bar{D}(x) = \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}^*}.$$

Если окажется, что  $x^{(+1\alpha)}$  и  $x^{(-1\alpha)}$  являются граничными узлами, то

$$\bar{D}(x) = \frac{2}{h_{\alpha+}^* h_{\alpha-}^*}.$$

В общем случае узел  $x \in \omega_{h, \alpha}^*$  может оказаться приграничным не только по направлению  $x_\alpha$ , но и по другим направлениям. Тогда в сумме (52) будут отсутствовать и другие слагаемые. Поэтому справедлива оценка (67). Например, при  $p = 2$ , если  $x$  нерегулярен по  $x_1$  и  $x_2$  в соответствии с рис. 15, в), то

$$\bar{D}(x) = \frac{2}{h_{1+}^* h_{1-}^*} + \frac{1}{h_2 h_{2+}^*} = \frac{1}{\delta_1^*} + \frac{1}{\delta_2^*},$$

т. е.  $\bar{D}(x) > 1/\delta_\alpha^*$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Обратимся теперь к задаче для функции  $v(x)$ .

Представим  $\varphi^*$  в виде суммы

$$\varphi^* = \sum_{\alpha=1}^p \varphi_\alpha^*, \quad \varphi_\alpha^* = 0 \text{ в регулярных по } x_\alpha \text{ узлах,} \quad (69)$$

и положим  $v = \sum_{\alpha=1}^p v_\alpha$ , где  $v_\alpha$  — решение задачи

$$\left. \begin{aligned} \Lambda v_\alpha &= 0 && \text{в регулярных по } x_\alpha \text{ узлах,} \\ \Lambda^* v_\alpha &= -\varphi_\alpha^* && \text{в нерегулярных по } x_\alpha \text{ узлах, } v_\alpha|_{\gamma_h} = 0. \end{aligned} \right\} (70)$$

В силу теоремы 5

$$\|v_\alpha\|_\omega \leq \|\delta_\alpha^* \Phi_\alpha^*\|_{\omega_\alpha^*}, \quad (71)$$

где

$$\|f\|_{\omega_\alpha^*} = \max_{x \in \omega_{h,\alpha}^*} |f(x)|$$

(фактически берется максимум по  $\omega_{h,\alpha}^{**}$ , так как  $\Phi_\alpha^* = 0$  в регулярных приграничных узлах).

Из (71) следует, что

$$\|v\|_\omega \leq \sum_{\alpha=1}^p \|\delta_\alpha^* \Phi_\alpha^*\|_{\omega_\alpha^*}. \quad (72)$$

Объединим оценки (56), (66) и (72) и сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**Теорема 6.** Для решения разностной задачи Дирихле (24) — (26) с правой частью  $\varphi$ , представленной в виде  $\varphi = \overset{\circ}{\varphi} + \varphi^*$ ,  $\varphi^* = \sum_{\alpha=1}^p \Phi_\alpha^*$ ,  $\Phi_\alpha^* = 0$  в регулярных по  $x_\alpha$  узлах, на произвольной связанной сетке  $\bar{\omega}_h$  верна равномерная оценка

$$\|y\|_\omega \leq \|\mu\|_V + \frac{R^2}{2\rho} \|\overset{\circ}{\varphi}\|_\omega + \sum_{\alpha=1}^p \|\delta_\alpha^* \Phi_\alpha^*\|_{\omega_\alpha^*}, \quad (73)$$

где  $\delta_\alpha^*$  определено формулой (68).

**8. Равномерная сходимость и порядок точности разностной задачи Дирихле.** Применим теорему 6 для оценки решения задачи (28). Следуя п. 7, представим погрешность аппроксимации  $\psi$  схемы (24) — (26) в виде

$$\psi = \overset{\circ}{\psi} + \psi^*, \quad \overset{\circ}{\psi} = \sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\psi}_\alpha, \quad \psi^* = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^*,$$

где  $\psi_\alpha^* = 0$  в регулярных узлах (по  $x_\alpha$ ),  $\overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0$  в нерегулярных узлах (по  $x_\alpha$ ).

Из оценок п. 3 следует, что для  $u \in C^{(4)}$

$$|\overset{\circ}{\psi}_\alpha| \leq M_4 h_\alpha^2 / 12 \text{ для всех } x \in \omega_h, \quad (74)$$

$$|\psi_\alpha^*| \leq \frac{M_3}{3} |h_{\alpha+}^* - h_{\alpha-}^*| \text{ или } |\psi_\alpha^*| \leq \frac{M_3}{3} (h_\alpha - h_\alpha^*) \quad (75)$$

в нерегулярных узлах  $x \in \omega_{h,\alpha}^{**}$ , где

$$M_s = \max_{\substack{x \in \bar{\omega}, \\ 1 \leq \alpha \leq p}} \left| \frac{\partial^s u}{\partial x_\alpha^s} \right|, \quad s = 3, 4.$$



Из (74) находим

$$\|\dot{\psi}\|_{\omega} \leq \sum_{\alpha=1}^p \|\dot{\psi}_{\alpha}\|_{\omega} \leq M_4 |h|^2 / 12, \quad |h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^2. \quad (76)$$

Для решения задачи (28), в силу теоремы 6, имеем оценку

$$\|z\|_{\omega} \leq \frac{R^2}{2p} \|\dot{\psi}\|_{\omega} + \sum_{\alpha=1}^p \|\delta_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*\|_{\omega_{\alpha}^*}. \quad (77)$$

Перейдем к оценке  $\|\delta_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*\|_{\omega_{\alpha}^*}$ . В силу (75), (68) имеем

$$|\delta_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*| \leq \frac{1}{6} M_3 h_{\alpha+}^* h_{\alpha-}^* (h_{\alpha} - h_{\alpha}^*),$$

либо

$$|\delta_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*| \leq \frac{1}{3} M_3 h_{\alpha} h_{\alpha}^* (h_{\alpha} - h_{\alpha}^*),$$

где  $h_{\alpha}^*$  одно из чисел  $h_{\alpha+}^*$  или  $h_{\alpha-}^*$ .

Учитывая, что

$$h_{\alpha} h_{\alpha}^* (h_{\alpha} - h_{\alpha}^*) \leq h_{\alpha} h_{\alpha}^* (h_{\alpha} - h_{\alpha}^*) \leq h_{\alpha}^3 / 4,$$

$$0,5 h_{\alpha+}^* h_{\alpha-}^* (h_{\alpha} - h_{\alpha}^*) \leq 0,5 h_{\alpha} h_{\alpha}^* (h_{\alpha} - h_{\alpha}^*) \leq h_{\alpha}^3 / 8,$$

закключаем

$$\|\delta_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*\|_{\omega_{\alpha}^*} \leq \frac{M_3}{12} h_{\alpha}^3, \quad \sum_{\alpha=1}^p \|\delta_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*\|_{\omega_{\alpha}^*} \leq \frac{M_3}{12} \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^3. \quad (78)$$

Подставляя оценки (76) и (78) в (77), убеждаемся в том, что верна

**Теорема 7.** Если решение задачи (1)  $u(x) \in C^{(4)}(\bar{G})$ , то разностная схема (24) — (26) равномерно сходится со скоростью  $O(|h|^2)$  (имеет второй порядок точности). При этом верна оценка

$$\|y - u\|_{\omega} \leq \frac{M_3 p}{12} h^3 + \frac{M_4 R^2}{24p} h^2, \quad (79)$$

где  $y$  — решение задачи (24) — (26),  $h = \max_{\alpha} h_{\alpha}$ .

Сделаем в заключение следующее

**Замечание.** Рассмотренный выше способ аппроксимации задачи Дирихле (схема (24) — (26)) является довольно распространенным. Однако построенный таким образом разностный оператор в некоторых случаях теряет ряд важных свойств, присущих исходному дифференциальному оператору: самосопряженность и отрицательную определенность.

Представляет интерес построить такую аппроксимацию задачи Дирихле для уравнения Пуассона, для которой соответ-

ствующий разностный оператор был бы самосопряженным и отрицательно определенным.

Оказывается, что для этого достаточно изменить запись разностного уравнения в нерегулярных узлах. Именно, оператор  $\Lambda^*$  будем определять теперь так:

$$\Lambda^* = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}^*$$

где

$$\Lambda_{\alpha}^* y = \begin{cases} \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha}} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha}^*} \right), & x^{(-1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}, \\ \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha}} \right), & x^{(+1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}, \\ \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha-}^*} \right), & x^{(\pm 1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}. \end{cases}$$

Можно показать, что при этом оператор

$$\bar{\Lambda} = \begin{cases} \Lambda & \text{в регулярных узлах,} \\ \Lambda^* & \text{в нерегулярных узлах,} \end{cases}$$

является самосопряженным и отрицательно определенным (на множестве функций, обращающихся в нуль на  $\gamma_h$ ) в смысле скалярного произведения

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 h_2 \dots h_p.$$

Так же как и в теореме 7, доказывается, что соответствующая разностная схема имеет второй порядок точности.

**9. Схема повышенного порядка точности для уравнения Пуассона.** Исходя из схемы «крест», можно построить схему с погрешностью аппроксимации на решении  $O(|h|^4)$  (или  $O(h^6)$  в случае квадратной (кубической) сетки). Для повышения порядка аппроксимации используется тот факт, что  $u = u(x)$  есть решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x). \quad (80)$$

Проведем рассуждения для двумерного случая ( $p = 2$ ), когда

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}.$$

Рассмотрим разностный оператор

$$\Lambda u = (\Lambda_1 + \Lambda_2) u, \quad \Lambda_{\alpha} u = u_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}.$$

Пусть  $u = u(x)$  имеет нужное по ходу изложения число производных. Тогда

$$\Lambda u - Lu = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(|h|^4). \quad (81)$$

Из уравнения  $L_1 u + L_2 u = -f(x)$  находим

$$L_1^2 u = -L_1 f - L_1 L_2 u, \quad L_2^2 u = -L_2 f - L_1 L_2 u,$$

так что

$$\Lambda u = Lu - \frac{h_1^2}{12} L_1 f - \frac{h_2^2}{12} L_2 f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(|h|^4). \quad (82)$$

Подставим сюда  $Lu = -f$  и заменим  $L_1 L_2 u$  разностным оператором

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} \sim L_1 L_2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

Этот оператор определен на девятиточечном шаблоне, изображенном на рис. 16.

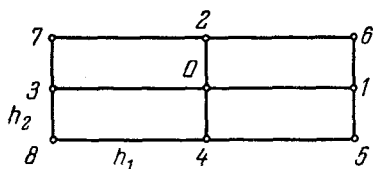


Рис. 16.

Напишем выражение для  $\Lambda_1 \Lambda_2 u$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \Lambda_2 u &= \Lambda_1 \left[ \frac{u(x_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h_2))}{h_2^2} \right] = \\ &= \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \{ u(x_1 - h_1, x_2 - h_2) - 2u(x_1, x_2 - h_2) + u(x_1 + h_1, x_2 - h_2) + \\ &\quad + 4u(x_1, x_2) - 2u(x_1 - h_1, x_2) + u(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - \\ &\quad - 2u(x_1, x_2 + h_2) - 2u(x_1 + h_1, x_2) + u(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \}. \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u - L_1 L_2 u = O(|h|^2).$$

В самом деле,  $\Lambda_2 u = L_2 u + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^4}$ , где  $\bar{x}_2 \in (x_2 - h_2, x_2 + h_2)$  — некоторая средняя точка. Поэтому

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = \Lambda_1 (L_2 u) + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_1 \left( \frac{\partial^4 u(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^4} \right).$$

Отсюда видно, что

$$\Lambda_1(L_2u) = L_1L_2u + O(h_1^2),$$

$$\Lambda_1\left(\frac{\partial^4 u(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2^4}\right) = L_1L_2^2u(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x}_1 \in (x_1 - h_1, x_1 + h_1).$$

Таким образом,  $\Lambda_1\Lambda_2u = L_1L_2u + O(|h|^2)$ , что и требовалось доказать.

Заменяя в (82)  $L_1L_2u$  на  $\Lambda_1\Lambda_2u$ , получим

$$\Lambda u = -\varphi - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1\Lambda_2u + O(|h|^4), \quad \varphi = f + \frac{h_1^2}{12} L_1f + \frac{h_2^2}{12} L_2f. \quad (83)$$

Из предыдущего следует, что уравнение

$$\left. \begin{aligned} \Lambda'y = -\varphi, \quad \Lambda'y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1\Lambda_2y, \\ \varphi = f + \frac{h_1^2}{12} L_1f + \frac{h_2^2}{12} L_2f \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

имеет четвертый порядок аппроксимации на решении  $u = u(x)$  уравнения Пуассона (80). В самом деле, формула (83) дает

$$\Lambda'u + \varphi = (\Lambda'u + \varphi) - (Lu + f) = O(|h|^4), \quad L = L_1 + L_2.$$

Оператор  $\Lambda'$  определен на девятиточечном шаблоне (рис. 16) «ящик», состоящем из узлов  $(x_1 + m_1h_1, x_2 + m_2h_2)$ ,  $m_1, m_2 = -1, 0, 1$ . Запишем схему (84) в виде

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y &= \frac{1}{6} \left( \frac{5}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) (y^{(+1_1)} + y^{(-1_1)}) + \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{5}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) (y^{(+1_2)} + y^{(-1_2)}) + \\ &+ \frac{1}{12} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (y^{(+1_1, +1_2)} + y^{(+1_1, -1_2)} + y^{(-1_1, -1_2)} + y^{(-1_1, +1_2)}) + \varphi, \end{aligned} \quad (85)$$

где  $y^{(\pm 1_1)} = y(x_1 \pm h_1, x_2)$ ,  $y^{(+1_1, -1_2)} = y(x_1 + h_1, x_2 - h_2)$  и т. д. На квадратной сетке ( $h_1 = h_2 = h$ ) это уравнение принимает вид

$$y_0 = \frac{4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5 + y_6 + y_7 + y_8}{20} + \frac{3}{10} h^2 \varphi$$

(см. рис. 16).

Рассмотрим теперь разностную задачу Дирихле для схемы  $O(|h|^4)$  в прямоугольнике  $\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$ :

$$\Lambda'y = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_n} = \mu(x); \quad \varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2f, \quad (86)$$

где  $\Lambda'y$  дается формулой (84).

Каждый из узлов сетки является регулярным, так как девятиточечный шаблон (рис. 16) принадлежит  $\bar{G}$ . Граница  $\gamma_h$  сетки содержит все узлы на  $\Gamma$ , в том числе и вершины прямоугольника. Для  $z = y - u$  получаем задачу

$$\Delta' z = -\psi, \quad x \in \omega_h, \quad z = 0 \text{ на } \gamma_h, \quad (87)$$

где  $\psi = \Delta' u + \varphi = O(|h|^4)$  при  $x \in \omega_h$ , если  $u \in C^{(6)}$ . Проверим условия принципа максимума. Сравнивая (41) с (85), видим, что

$$B(x, \xi) \geq 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}. \quad (88)$$

Для оценки решения задачи (87) строим мажорантную функцию

$$Y(x) = K [l_1^2 - x_1^2 + l_2^2 - x_2^2].$$

Учитывая, что  $\Delta Y = -4K$ ,  $\Lambda_1 \Lambda_2 Y = 0$ ,  $\|Y\| \leq K(l_1^2 + l_2^2)$ , выбирая  $4K = \|\psi\|_{\omega}$  и пользуясь теоремой 3, получаем для решения задачи (87) оценку

$$\|z\|_{\omega} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_{\omega} \quad \text{при условии} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}.$$

Отсюда следует, что схема (86) имеет четвертый порядок точности, если  $u \in C^{(6)}$ ,  $f \in C^{(4)}$  и выполнено условие (88).

На квадратной сетке ( $h_1 = h_2 = h$ ) это условие автоматически выполнено. Выбирая соответствующим образом  $\varphi$ , можно добиться того, что на квадратной сетке схема (86) будет иметь шестой порядок точности.

## § 2. Некоторые оценки для разностных операторов, аппроксимирующих дифференциальные операторы эллиптического типа

Этот параграф посвящен получению некоторых неравенств для разностных операторов, аппроксимирующих дифференциальные операторы эллиптического типа. Эти неравенства в дальнейшем будут использованы при получении априорных оценок для разностных задач, которые в свою очередь послужат основой для доказательства устойчивости и сходимости разностных схем.

### 1. Разностный оператор Лапласа в прямоугольной области.

Пусть на плоскости  $(x_1, x_2)$  задана прямоугольная область

$$\bar{G}_0 = \{x = (x_1, x_2), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

с границей  $\Gamma$  (рис. 17) и оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Введем в области  $\bar{G}_0$  разностную сетку таким образом, чтобы прямые, образующие границу  $\Gamma$ , принадлежали классу прямых, образующих сетку:

$$\bar{\omega}_h = \{x = (x_1, x_2) \in G_0, x_1 = i_1 h_1, x_2 = i_2 h_2, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Сетка  $\bar{\omega}_h$  равномерна по каждому направлению  $x_\alpha$ . По направлению  $x_1$  шаг равен  $h_1$ , по направлению  $x_2$  — равен  $h_2$ .

Рассмотрим простейшую аппроксимацию оператора Лапласа. Пусть

$$\Delta y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}. \quad (1)$$

Справедлива

Лемма 1. Для всякой функции  $v(x)$ , заданной на сетке  $\bar{\omega}_h$  и обращающейся в нуль на границе  $\gamma_h$ :

$$v|_{\gamma_h} = 0,$$

имеют место неравенства

$$\delta_0 \|v\|^2 \leq (\Delta v, v) \leq \Delta_0 \|v\|^2. \quad (2)$$

Здесь  $0 < \delta_0 < \Delta_0$  — постоянные, значения которых определим позже, оператор  $\dot{\Delta} = -\Delta$  и, как обычно, приняты обозначения

$$(v, w) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} v_{i_1 i_2} w_{i_1 i_2} h_1 h_2, \quad \|v\|^2 = (v, v).$$

Прежде чем переходить к доказательству леммы, рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\dot{\Delta} v + \lambda v = 0, \quad x \in \omega_h, \quad v(x) = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (3)$$

Решение задачи (3) будем искать методом разделения переменных. Пусть

$$v(x_1, x_2) = \mu(x_1) \eta(x_2).$$

Подставляя выражение  $v(x)$  в (3), найдем:

$$\mu(x_1) \eta_{\bar{x}_2 x_2} + \eta(x_2) \mu_{\bar{x}_1 x_1}(x_1) + \lambda \mu(x_1) \eta(x_2) = 0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения задачи (3), то можно разделить обе части этого уравнения на  $\mu(x_1) \eta(x_2)$ . В результате получим

$$\frac{\eta_{\bar{x}_2 x_2}}{\eta} + \frac{\mu_{\bar{x}_1 x_1}}{\mu} + \lambda = 0,$$

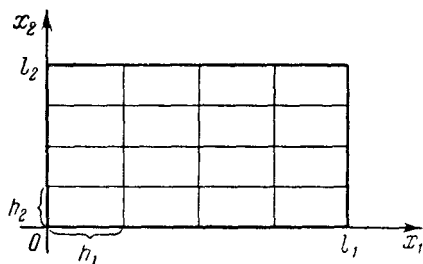


Рис. 17.

или

$$\frac{\eta_{\bar{x}_2 x_2}}{\eta} = - \frac{\mu_{\bar{x}_1 x_1}}{\mu} - \lambda = - \lambda^{(2)},$$

причем  $\lambda^{(2)}$  не зависит ни от  $x_1$ , ни от  $x_2$ . Тем самым для  $\eta$  получаем задачу:

$$\eta_{\bar{x}_2 x_2} + \lambda^{(2)} \eta = 0, \quad x_2 = h_2, \dots, l_2 - h_2; \quad \eta_0 = \eta_{N_2} = 0. \quad (4)$$

Это есть именно та задача на собственные значения, которую мы уже рассматривали в гл. I, § 2. Решением этой задачи является

$$\eta_{k_2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2}$$

и

$$\lambda_{k_2}^{(2)} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2}, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (5)$$

Аналогичную задачу получаем для  $\mu(x_1)$ :

$$\mu_{\bar{x}_1 x_1} + \lambda^{(1)} \mu = 0, \quad x_1 = h_1, \dots, l_1 - h_1; \quad \mu_0 = \mu_{N_1} = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda^{(1)} = \lambda - \lambda^{(2)}$ , и ее решением является

$$\mu_{k_1}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1},$$

$$\lambda_{k_1}^{(1)} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1}, \quad k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1. \quad (7)$$

Теперь можно найти функцию  $v(x)$ , являющуюся решением задачи (3)

$$v_{k_1 k_2}(x) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{k_1 \pi x_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi x_2}{l_2}. \quad (8)$$

Мы обозначили

$$\lambda^{(1)} = \lambda - \lambda^{(2)},$$

поэтому

$$\lambda = \lambda_{k_1 k_2} = \lambda_{k_1}^{(1)} + \lambda_{k_2}^{(2)}$$

или

$$\lambda_{k_1 k_2} = 4 \left( \frac{1}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2l_1} + \frac{1}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2l_2} \right), \quad (9)$$

где

$$k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Собственные функции  $v_{k_1 k_2}$  ортонормированы в смысле определенного выше скалярного произведения ( ), так как они ортонормированы на каждом отрезке по направлениям  $x_1$  и  $x_2$ . Следовательно, по системе функций  $\{v_{k_1 k_2}(x)\}$  можно разлагать лю-

бые функции, заданные на  $\omega_h$  и обращающиеся в нуль на границе  $\gamma_h$ .

Приступим теперь к доказательству леммы 1. Для одномерных сеток были введены формулы суммирования по частям и формулы Грина. Они полностью переносятся на двумерный случай. Первая формула Грина для двумерной сетки в прямоугольнике принимает вид

$$(v_{\bar{x}_1, x_1}, w) = - (v_{\bar{x}_1}, w_{\bar{x}_1}]_1 = - \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} (v_{\bar{x}_1} w_{\bar{x}_1})_{i_1 i_2} h_1 h_2. \quad (10)$$

Преобразуем с помощью первой разностной формулы Грина скалярное произведение  $(\mathring{A}v, v)$ . Получим

$$\begin{aligned} (\mathring{A}v, v) &= - (\mathring{\Delta}v, v) = - \sum_{\alpha=1}^2 (v_{\bar{x}_\alpha} x_\alpha, v) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 (v_{\bar{x}_\alpha}, x_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2, \end{aligned} \quad (11)$$

так как по определению  $(v_{\bar{x}_\alpha}, v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha = \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2$ . Разложим теперь функцию  $v(x)$  по системе функций  $\{v_{k_1 k_2}(x)\}$ :

$$v(x) = \sum_{k_1 k_2} c_{k_1 k_2} v_{k_1 k_2}(x)$$

и, взяв от нее левую разность по  $x_1$ , получим

$$v_{\bar{x}_1}(x) = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2} \sqrt{\lambda_{k_1}} \bar{v}_{k_1 k_2}(x), \quad (12)$$

где

$$\bar{v}_{k_1 k_2}(x) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \eta(x_2) \cos \frac{k_1 \pi (x_1 - 0,5h_1)}{l_1}$$

и функции  $\bar{v}_{k_1 k_2}$  ортонормированы в смысле скалярного произведения  $(, ]$ . На основании этого из (12) находим

$$\|v_{\bar{x}_1}\|_1^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_1 k_2}^2 \lambda_{k_1}. \quad (13)$$

Аналогичное выражение нормы получаем для  $v_{\bar{x}_2}(x)$ :

$$\|v_{\bar{x}_2}\|_2^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} c_{k_1 k_2}^2 \lambda_{k_2}. \quad (13')$$

После подстановки выражений норм для  $v_{\bar{x}_1}$  и  $v_{\bar{x}_2}$  в формулу (11) получаем

$$(\mathring{A}v, v) = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2}^2 \lambda_{k_1 k_2}.$$



Нам осталось оценить сумму, стоящую в правой части. Для этой цели из-под знака суммы вынесем максимальное и минимальное собственные значения

$$\min_{k_1, k_2} \lambda_{k_1 k_2} \|v\|^2 \leq \sum_{k_1, k_2} c_{k_1 k_2}^2 \lambda_{k_1 k_2} \leq \max_{k_1, k_2} \lambda_{k_1 k_2} \|v\|^2.$$

Значения наименьшего и наибольшего собственных чисел известны:

$$\lambda_{1,1} = 4 \left( \frac{\sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1}}{h_1^2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2}}{h_2^2} \right),$$

$$\lambda_{N_1-1, N_2-1} = 4 \left( \frac{\cos^2 \frac{\pi h_1}{2l_1}}{h_1^2} + \frac{\cos^2 \frac{\pi h_2}{2l_2}}{h_2^2} \right).$$

Таким образом, получение неравенств (2) закончено, причем

$$\delta_0 = \lambda_{1,1}, \quad \Delta_0 = \lambda_{N_1-1, N_2-1}. \quad (14)$$

Эти постоянные точны в том смысле, что в соотношении (2) левое неравенство переходит в равенство при  $v = v_{1,1}(x)$ , где  $v_{1,1}(x)$  есть собственная функция задачи (3), отвечающая первому собственному значению. Аналогично правое неравенство в (2) переходит в равенство при  $v = v_{N_1-1, N_2-1}(x)$ . Из неравенств (14) видно, что формулы для  $\delta_0$  и  $\Delta_0$  не очень удобны, поэтому мы оценим  $\lambda_{1,1}$  снизу, а  $\lambda_{N_1-1, N_2-1}$  сверху. Мы не очень сильно загрубим оценку для максимального собственного значения  $\lambda_{N_1-1, N_2-1}$ , если в его выражении заменим  $\cos \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}$  на 1, так как  $\cos \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} = 1 + O(|h|^2)$ . Поэтому будем писать

$$\Delta_0 = 4 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right). \quad (15)$$

Для наименьшего собственного числа ранее (см. гл. I, § 2) была доказана следующая оценка снизу:

$$\frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \geq \frac{8}{l_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Будем считать поэтому что

$$\delta_0 = 8 \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right). \quad (16)$$

Из равенства (16) видно, что  $\delta_0$  есть абсолютная постоянная, не зависящая от сетки  $\omega_h$ . Величина  $\Delta_0$  от сетки  $\omega_h$  зависит и стремится к бесконечности, когда шаги сетки стремятся к нулю,

Лемма 2. Для всякой функции  $v(x)$ , заданной на сетке  $\omega_h$  и обращающейся в нуль на границе  $\gamma_h$ , имеет место разностный аналог теоремы вложения:

$$\|v\|_C \leq \frac{l_0^2}{\sqrt{l_1 l_2}} \|\hat{A}v\|, \quad (17)$$

где  $\|v\|_C = \max_{x \in \omega_h} |v(x)|$ ,  $l_0 = \max\{l_1, l_2\}$ .

Доказательство. Разложим функцию  $v(x)$  по системе собственных функций  $\{v_{k_1, k_2}(x)\}$ :

$$v(x) = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1, k_2} v_{k_1, k_2}(x).$$

Отсюда получаем

$$\hat{A}v(x) = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1, k_2} \lambda_{k_1, k_2} v_{k_1, k_2}(x),$$

и, следовательно,

$$\|\hat{A}v(x)\|^2 = \sum_{k_1, k_2} c_{k_1, k_2}^2 \lambda_{k_1, k_2}^2.$$

Оценим теперь функцию  $v(x)$  следующим образом:

$$|v(x)| \leq \left( \sum_{k_1, k_2} |c_{k_1, k_2}| \right) \max_{k_1, k_2} |v_{k_1, k_2}(x)|.$$

Из (8) получаем

$$|v_{k_1, k_2}(x)| \leq 2/\sqrt{l_1 l_2},$$

так что

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\leq \frac{4}{l_1 l_2} \left( \sum_{k_1, k_2} |c_{k_1, k_2}| \right)^2 \leq \frac{4}{l_1 l_2} \left( \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1, k_2}^2 c_{k_1, k_2}^2 \right) \left( \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1, k_2}^{-2} \right) = \\ &= \frac{4}{l_1 l_2} \|\hat{A}v\|^2 \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1, k_2}^{-2}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам осталось получить оценку

$$\sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1, k_2}^{-2} \leq l_0^4/4. \quad (18)$$

Обращаясь к формуле (9) и учитывая, что  $\sin x \geq 2x/\pi$  при  $0 \leq x \leq \pi/2$ , имеем

$$\lambda_{k_1, k_2} \geq 4 \left( \frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{k_2^2}{l_2^2} \right) \geq \frac{4}{l_0^2} (k_1^2 + k_2^2).$$

Следовательно,

$$\sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \lambda_{k_1, k_2}^{-2} \leq \frac{l_0^4}{16} \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} (k_1^2 + k_2^2)^{-2} \leq \frac{l_0^4}{16} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (k_1^2 + k_2^2)^{-2}.$$

Воспользовавшись, далее, оценкой

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (k_1^2 + k_2^2)^{-2} \leq \frac{1}{4} + \left( \int_1^{\infty} \frac{1}{r^4} r dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \frac{1}{4} + \pi < 4,$$

получаем (18).

**2. Оператор Лапласа в области, составленной из прямоугольников.** Рассмотрим теперь область, состоящую из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, как показано на рис. 18. Предположим, что стороны

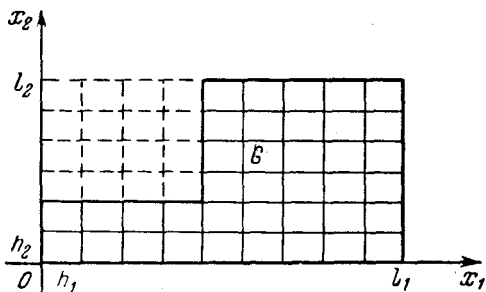


Рис. 18.

прямоугольников, составляющих область  $G$ , соизмеримы. Тогда можно построить сетку (с шагами  $h_1$  и  $h_2$ ) так, что граница сеточной области лежит на границе области  $G$ . Дополним область  $G$  до прямоугольника, который обозначим через  $\tilde{G}$ , как это показано на рис. 18. Построим в области  $G$  разностную сетку  $\omega_h$  и продолжим ее в  $\tilde{G}$ . Сетку в области  $\tilde{G}$  будем обозначать  $\tilde{\omega}_h$ .

Пусть  $v$  — сеточная функция, заданная на  $\omega_h$ , такая, что  $v|_{\gamma_h} = 0$ . Определим функцию

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \omega_h, \\ 0, & x \in \tilde{\omega}_h \setminus \omega_h. \end{cases}$$

Тогда из определения функции  $\tilde{v}$  следует, что

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{\omega}_h} = \|v\|_{\omega_h} = \|v\|,$$

где

$$\|v\|^2 = (v, v), \quad (v, y) = \sum_{x \in \omega_h} v(x) y(x) h_1 h_2,$$

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{\omega}_h}^2 = \sum_{x \in \tilde{\omega}_h} \tilde{v}^2(x) h_1 h_2;$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \|\tilde{v}_{\tilde{x}_\alpha}\|_{\tilde{\omega}_h}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\tilde{x}_\alpha}\|^2.$$

Учитывая эти равенства, убеждаемся, что для функции  $v(x)$ , определенной на сетке  $\omega_h$  в области  $G$ , справедливо утверждение

леммы 1. При этом

$$\delta_0 = 8 \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right), \quad \Delta_0 = 4 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — длины сторон прямоугольника  $G$ .

**3. Операторы с переменными коэффициентами.** Перейдем к получению оценок для разностных операторов с переменными коэффициентами. Везде в п.п. 3 и 4 предполагается, что область  $G$  — прямоугольник

$$\{x = (x_1, x_2), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Пусть

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha(x) \leq c_2. \quad (19)$$

В гл. III было показано, что оператор

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$$

можно аппроксимировать с точностью  $O(h_\alpha^2)$  выражением

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha},$$

где

$$a_\alpha(x) = \left( \int_{-1}^0 \frac{ds}{k_\alpha(x_\alpha + sh_\alpha, x_\beta)} \right)^{-1}, \quad \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2. \quad (20)$$

Но из-за сложности вычисления интеграла такую аппроксимацию использовать не всегда целесообразно. В качестве  $a_\alpha(x)$  обычно можно брать те выражения, которые получаются из (20), если заменить там интеграл той или иной квадратурной формулой. Часто используют выражения

$$a_\alpha(x) = k_\alpha(x_\alpha - 0,5h_\alpha, x_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (21)$$

$$a_\alpha(x) = 0,5 [k_\alpha(x) + k_\alpha(x_\alpha - h_\alpha, x_\beta)], \quad \alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta. \quad (22)$$

Из соотношений (20) — (22) и условий (19) следует, что

$$0 < c_1 \leq a_\alpha(x) \leq c_2. \quad (23)$$

Оператору (19) поставим в соответствие разностный оператор

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}. \quad (24)$$

Аппроксимации такого вида являются естественным обобщением на многомерный случай однородных разностных схем, введенных в гл. III для одномерных уравнений.

Лемма 3. Для всякой функции  $v(x)$ , заданной на сетке  $\omega_h$  и обращающейся в нуль на границе  $\gamma_h$ , справедливы неравенства

$$\delta_0 c_1 \|v\|^2 \leq (Av, v) \leq \Delta_0 c_2 \|v\|^2, \quad (25)$$

где  $\delta_0$  и  $\Delta_0$  даются выражениями (15), (16);  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные из условий (19) и  $A = -\Lambda$ .

Доказательство. Так как на границе сеточной области  $v(x)$  равна нулю, то из формулы Грина для оператора  $\Lambda_\alpha v = (a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$  следует, что

$$((a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, v) = - (a_\alpha, v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha.$$

Поэтому

$$(Av, v) = \sum_{\alpha=1}^2 (a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}, v_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha.$$

Используя условие (19), отсюда находим

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 \leq (Av, v) \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2.$$

Оценивая теперь  $\sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2$  с помощью формул (13) и (13'), получаем (25).

**4. Оператор со смешанной производной.** Рассмотрим эллиптический оператор со смешанной производной

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right). \quad (26)$$

Предположим, что выполнено условие эллиптичности

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, \quad (27)$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  — постоянные, а  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  — любой вектор. Для аппроксимации оператора  $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)$  воспользуемся выражением

$$\Lambda_{\alpha\alpha} u = (a_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad a_{\alpha\alpha} = 0,5 [k_{\alpha\alpha}(x) + k_{\alpha\alpha}(x_\alpha - h_\alpha, x_\beta)]. \quad (28)$$

Тогда

$$\Lambda_{\alpha\alpha} u = 0,5 \left[ (k_{\alpha\alpha}(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\alpha}^{(-1\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} \right].$$

Заметим теперь, что  $k_{\alpha\alpha}(x_\alpha - h_\alpha, x_\beta) = k_{\alpha\alpha}^{(-1)\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} (k_{\alpha\alpha}^{(-1)\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} &= \frac{1}{h_\alpha} (k_{\alpha\alpha}(x) y_{x_\alpha} - k_{\alpha\alpha}^{(-1)\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}) = \\ &= \frac{1}{h_\alpha} (k_{\alpha\alpha}(x) y_{x_\alpha} - (k_{\alpha\alpha}(x) y_{x_\alpha})^{(-1)\alpha}) = (k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Lambda_{\alpha\alpha} y = 0,5 [(k_{\alpha\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}]. \quad (29)$$

Оператор со смешанной производной

$$L_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

можно аппроксимировать по четырем точкам, как показано на рис. 19, а), выражением

$$\Lambda_{12}^+ y = (k_{12} y_{x_2})_{\bar{x}_1}$$

или по таким четырем точкам, как показано на рис. 19, б), выражением

$$\Lambda_{12}^- y = (k_{12} y_{\bar{x}_1})_{x_2}.$$

Нетрудно показать, что операторы  $\Lambda_{12}^\pm$  аппроксимируют

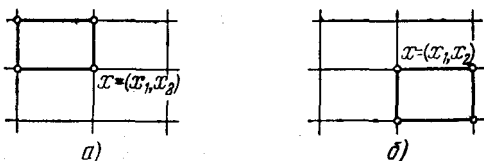


Рис. 19.

оператор  $L_{12}$  с погрешностью  $O(h_1 + h_2)$ , а оператор

$$\Lambda_{12} y = \frac{1}{2} (\Lambda_{12}^+ y + \Lambda_{12}^- y) = \frac{1}{2} [(k_{12} y_{\bar{x}_1})_{x_2} + (k_{12} y_{x_2})_{\bar{x}_1}] \quad (30)$$

с погрешностью  $O(|h|^2)$ .

Сравнивая выражения (29) и (30), видим, что оператор

$$-Ay = \Lambda y = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 [(k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}] \quad (31)$$

аппроксимирует выражение (26) с погрешностью  $O(|h|^2)$ .

**Лемма 4.** Для всякой сеточной функции  $v(x)$ , заданной на  $\omega_h$  и обращающейся в нуль на границе  $\gamma_h$ , справедливы неравенства

$$\delta_0 c_1 \|v\|^2 \leq (Av, v) \leq \Delta_0 c_2 \|v\|^2, \quad (32)$$

где оператор  $A$  определен формулой (31), постоянные  $c_1$  и  $c_2$  — формулой (27), а  $\delta_0$  и  $\Delta_0$  — формулами (15) и (16).

**Доказательство.** Представим оператор  $A$  в виде суммы

$$A = 0,5(A^+ + A^-),$$

где

$$A^- y = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}, \quad A^+ y = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha}.$$

Очевидно, что (32) достаточно доказать, например, для  $A^-$ . Используя вновь формулу Грина, получим

$$(A^- v, v) = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 ((k_{\alpha\beta} v_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha}, v) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (k_{\alpha\beta} v_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha})_{\alpha}. \quad (33)$$

Обозначим

$$(u, w) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} v(i_1 h_1, i_2 h_2) w(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2.$$

Тогда, внося в (33) знак суммы под знак скалярного произведения, получим

$$(A^- v, v) = \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta} v_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha} \right).$$

Используя условие эллиптичности (27), получим отсюда

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{\alpha}^2 \leq \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta} v_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha} \right) \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{\alpha}^2. \quad (34)$$

Далее, повторяя доказательство леммы 1, получим (32).

**Замечание 1.** В силу (11) и (33) неравенства (34) можно записать в виде

$$c_1 (\mathring{A}v, v) \leq (Av, v) \leq c_2 (\mathring{A}v, v), \quad (35)$$

где  $\mathring{A}y = - \mathring{\Delta}y = - \sum_{\alpha=1}^2 y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$  для  $y(x)$ , заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе ( $y|_{\gamma_h} = 0$ ), или в виде операторных неравенств (см. гл. I, § 3):

$$c_1 \mathring{A} \leq A \leq c_2 \mathring{A}.$$

Операторы  $A$  и  $\dot{A}$ , удовлетворяющие неравенствам (35), будем называть *энергетически эквивалентными* с постоянными  $c_1$  и  $c_2$  операторами (употребляются и другие термины — эквивалентные по спектру (Е. Г. Дьяконов [7]), сходные (С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий [1]) и др.).

**З а м е ч а н и е 2.** Пусть дан оператор

$$Lu(x) = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta}u, \quad L_{\alpha\beta}u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right)$$

и выполнено условие эллиптичности

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2.$$

В  $p$ -мерном параллелепипеде

$$\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

вводится сетка

$$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_\alpha h_\alpha, \dots, i_p h_p) \in \bar{G}\},$$

где  $\omega_h = \{x_i \in G\}$ , и строится разностный оператор

$$\Lambda y = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \Lambda_{\alpha\beta} y, \quad \Lambda_{\alpha\beta} y = 0,5 \left[ (k_{\alpha\beta} y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right].$$

Он аппроксимирует  $L$  с погрешностью  $O(|h|^2)$ ,  $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2$ .

Вводя скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) v(x) h_1 \dots h_p$$

и рассматривая множество сеточных функций, заданных на  $\omega_h$  и равных нулю на границе  $\gamma_h$ , по аналогии со случаем  $p = 2$  убеждаемся, что оператор

$$\dot{A}y = -\Lambda y, \quad y|_{\gamma_h} = 0$$

является положительно определенным и для него выполнены

неравенства (35), где  $\dot{A}y = -\Lambda y$ ,  $\dot{\Lambda}y = \sum_{\alpha=1}^p y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $y|_{\gamma_h} = 0$ .

**5. Схема повышенного порядка точности для эллиптического уравнения со смешанными производными.** В прямоугольнике  $G = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$  рассмотрим задачу Дирихле для



уравнения

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad (36)$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x_1, x_2), \quad (37)$$

где  $\Gamma$  — граница области  $G$ .

Если  $|a_{12}| < 1$ , то выполнено условие эллиптичности оператора  $L$ :

$$\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 \geq c_0(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

где  $c_0 = 1 - |a_{12}|$ .

Будем предполагать, что  $a_{12} = \text{const}$ . Нетрудно заметить, что уравнение общего вида

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_1^2} + 2\bar{a}_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} + \bar{a}_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_2^2} = -\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

где  $\bar{a}_{\alpha\beta}$  — постоянные,  $\bar{a}_{11} > 0$ ,  $\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} > \bar{a}_{12}^2$ , преобразуется к виду (36) путем замены переменных

$$\bar{x}_1 = \sqrt{\bar{a}_{11}} x_1, \quad \bar{x}_2 = \sqrt{\bar{a}_{22}} x_2,$$

так что  $|a_{12}| = |\bar{a}_{12}| / \sqrt{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}} < 1$ .

Предположим, что в прямоугольнике  $G$  можно ввести квадратную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, hN_\alpha = l_\alpha\}$$

с шагом  $h$ .

Построим разностную схему четвертого порядка точности для задачи (36), (37).

Зададим разностные операторы

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (38)$$

$$\Lambda_{12}^- u = 0,5(u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + u_{x_1 \bar{x}_2}), \quad \Lambda_{12}^+ u = 0,5(u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + u_{x_1 x_2}). \quad (39)$$

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{12}^- u &= L_{12} u - \frac{h^2}{4} L_{12}^2 u + \frac{h^2}{6} L_{12} (L_1 + L_2) u + O(h^4), \\ \Lambda_{12}^+ u &= L_{12} u + \frac{h^2}{4} L_{12}^2 u + \frac{h^2}{6} L_{12} (L_1 + L_2) u + O(h^4), \\ \Lambda_\alpha u &= L_\alpha u + \frac{h^2}{12} L_\alpha^2 u + O(h^4), \\ u &= u(x_1, x_2), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad L_{12} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Рассмотрим разностный оператор

$$\Lambda y = (\Lambda_1 + 2a_{12}\Lambda_{12} + \Lambda_2)y,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{12} &= \Lambda_{12}^- \text{ при } a_{12} < 0, \\ \Lambda_{12} &= \Lambda_{12}^+ \text{ при } a_{12} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Найдем погрешность аппроксимации оператором  $\Lambda$  оператора  $L$  на решении уравнения  $Lu = -f$ . Пользуясь формулами (40), будем иметь

$$\Lambda u = Lu + \frac{h^2}{12} (L_1^2 + L_2^2 + 4a_{12}L_{12}(L_1 + L_2) + 6|a_{12}|L_{12}^2)u + O(h^4). \quad (42)$$

Из уравнения (36) определим  $L_1u = -f - L_2u - 2a_{12}L_{12}u$ ,  $L_2u = -f - L_1u - 2a_{12}L_{12}u$ ,  $L_1u + L_2u = -f - 2a_{12}L_{12}u$  и преобразуем выражение в скобках

$$\begin{aligned} (L_1^2 + L_2^2)u + 4a_{12}L_{12}(L_1 + L_2)u + 6|a_{12}|L_{12}^2u &= \\ = L_1(-f - L_2u - 2a_{12}L_{12}u) + L_2(-f - L_1u - 2a_{12}L_{12}u) + \\ + 4a_{12}L_{12}(L_1 + L_2)u + 6|a_{12}|L_{12}^2u &= \\ = -L_1f - L_2f - 2L_1L_2u + 2a_{12}L_{12}(L_1 + L_2)u + 6|a_{12}|L_{12}^2u &= \\ = -Lf - 2(1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|)L_1L_2u, \end{aligned}$$

так как  $L_{12}^2u = L_1L_2u$ .

Отсюда и из (42) следует, что схема

$$\left. \begin{aligned} \Lambda'y &= -\varphi, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12}\Lambda f, \quad x \in \omega_h, \\ y|_{\gamma} &= \mu, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где  $\gamma$  — граница сетки  $\bar{\omega}_h$  и

$$\Lambda'y = \Lambda y + \frac{h^2 b}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 y, \quad b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|, \quad (44)$$

имеет четвертый порядок аппроксимации на решении  $u = u(x)$  задачи (36), (37). При этом вид оператора  $\Lambda$  зависит, согласно (41), от знака коэффициента  $a_{12}$ .

Для погрешности  $z = y - u$  получаем условия

$$\left. \begin{aligned} \Lambda'z &= -\psi, \quad \psi = \Lambda'u + \varphi = O(h^4), \\ z|_{\gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Введем скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль в граничных узлах  $x \in \gamma$ :

$$(y, z) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h^2 y_{i_1 i_2} z_{i_1 i_2}, \quad \|z\| = \sqrt{(z, z)}.$$

Пользуясь формулой суммирования по частям (см. гл. I, § 2, п. 1), найдем

$$(\Lambda_{12}^- z, z) = -(z_{\bar{x}_1}, z_{\bar{x}_2}), \quad (\Lambda_{12}^+ z, z) = -(z_{x_1}, z_{x_2}).$$

Поэтому справедливы оценки

$$|(\Lambda_{12}^- z, z)| \leq \|z_{\bar{x}_1}\| \|z_{\bar{x}_2}\| \leq \frac{1}{2} (\|z_{\bar{x}_1}\|^2 + \|z_{\bar{x}_2}\|^2) \leq \frac{1}{2} (-\dot{\Lambda} z, z),$$

$$|(\Lambda_{12}^+ z, z)| \leq \|z_{x_1}\| \|z_{x_2}\| \leq \frac{1}{2} (\|z_{x_1}\|^2 + \|z_{x_2}\|^2) \leq \frac{1}{2} (-\dot{\Lambda} z, z),$$

где  $\dot{\Lambda} z = (\Lambda_1 + \Lambda_2) z = z_{\bar{x}_1 x_1} + z_{\bar{x}_2 x_2}$ .

Введем операторы

$$A' = -\Lambda', \quad A = -\Lambda, \quad \dot{A} = -\dot{\Lambda}, \quad A_1 = -\Lambda_1, \quad A_2 = -\Lambda_2$$

и найдем постоянные эквивалентности  $A$ ,  $A'$  и  $\dot{A}$ .

Учитывая оценки для  $(\Lambda_{12}^\pm z, z)$ , имеем

$$(Az, z) = (\dot{A}z, z) - 2a_{12}(A_{12}z, z) \geq (1 - |a_{12}|)(\dot{A}z, z),$$

$$(Az, z) \leq (1 + |a_{12}|)(\dot{A}z, z).$$

Воспользуемся, далее, оценкой

$$(A_1 A_2 z, z) \leq \frac{2}{h^2} (\dot{A}z, z), \quad (46)$$

которая следует из соотношений

$$\begin{aligned} (z_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, z) &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} h^2 (z_{\bar{x}_1 x_2}(i_1 h, i_2 h))^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{h^2} \left( \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h^2 (z_{\bar{x}_1}(i_1 h, i_2 h))^2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h^2 (z_{\bar{x}_2}(i_1 h, i_2 h))^2 \right). \end{aligned}$$

Учитывая (46), получим

$$\begin{aligned} (A'z, z) &= \left( Az - \frac{h^2 b}{6} A_1 A_2 z, z \right) \geq (Az, z) - \frac{|b|}{3} (\dot{A}z, z) \geq \\ &\geq \left( 1 - |a_{12}| - \frac{|b|}{3} \right) (\dot{A}z, z), \end{aligned}$$

$$(A'z, z) \leq (Az, z) + \frac{|b|}{3} (\dot{A}z, z) \leq \left( 1 + |a_{12}| + \frac{|b|}{3} \right) (\dot{A}z, z).$$

Покажем теперь, что

$$c_1 = 1 - |a_{12}| - \frac{|b|}{3} > 0.$$

В самом деле, если  $|a_{12}| \leq 0,5$ , то  $b \geq 0$  и

$$c_1 = 1 - |a_{12}| - \frac{1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|}{3} = \frac{2}{3}(1 - a_{12}^2) > 0.$$

Если  $|a_{12}| > 0,5$ , то  $b < 0$  и

$$c_1 = 1 - |a_{12}| + \frac{1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|}{3} = \frac{2}{3}(2 + a_{12}^2 - 3|a_{12}|) > 0$$

при  $|a_{12}| < 1$ .

Тем самым доказано, что

$$c_1 \mathring{A} \leq A' \leq c_2 \mathring{A}, \quad (47)$$

где  $c_1 = 1 - |a_{12}| - |b|/3 > 0$ ,  $c_2 = 1 + |a_{12}| + |b|/3 > 0$ .

Покажем, что для погрешности  $z = y - u$  имеет место оценка

$$\|z\|_{\mathring{A}} \leq \frac{1}{c_1 \sqrt{\delta_0}} \|\psi\|, \quad \delta_0 = 8 \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right),$$

где  $\|z\|_{\mathring{A}}^2 = \|z\|_{A_1}^2 + \|z\|_{A_2}^2$ ,

$$\|z\|_{A_1}^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h^2 (z_{\bar{x}_1}(i_1 h, i_2 h))^2, \quad \|z\|_{A_2}^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} h^2 (z_{\bar{x}_2}(i_1 h, i_2 h))^2.$$

В самом деле, запишем схему (45) в операторной форме

$$A'z = \psi$$

и умножим обе части этого уравнения скалярно на  $z$ :

$$c_1 (\mathring{A}z, z) \leq (A'z, z) = (\psi, z).$$

Так как  $(\mathring{A}z, z) > \delta_0 \|z\|^2$  (см. п. 1), то

$$|(\psi, z)| \leq \|\psi\| \|z\| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta_0}} \|\psi\| \|z\|_{\mathring{A}},$$

и, следовательно,

$$\|z\|_{\mathring{A}} \leq \frac{1}{c_1 \sqrt{\delta_0}} \|\psi\|,$$

что и требовалось доказать.

Из полученной априорной оценки и условия  $\|\psi\| = O(h^4)$  следует сходимость схемы (43) со скоростью  $O(h^4)$  в норме пространства  $H_{\mathring{A}}$  (в сеточной норме  $\mathring{W}_2^{(1)}$ ).

## Глава V

### ОБЩИЕ ФОРМУЛИРОВКИ. ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

---

Ранее были рассмотрены разностные схемы для простейших дифференциальных уравнений, введены для них основные понятия теории разностных схем и продемонстрированы некоторые приемы исследования устойчивости и сходимости схем. При этом обнаружилась возможность формулировать общие определения и методы на языке функционального анализа, отвлекаясь от конкретного вида разностных схем.

В этой главе проводится систематическая трактовка разностных уравнений как операторных уравнений в абстрактном пространстве и даются соответствующие определения аппроксимации, устойчивости и сходимости.

---

#### § 1. Разностные схемы как операторные уравнения в абстрактных пространствах

**1. Разностные схемы как операторные уравнения.** После замены дифференциальных уравнений разностными уравнениями на некоторой сетке  $\omega_h$  мы получаем систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричной форме

$$\mathfrak{A}Y = \Phi, \quad (1)$$

где  $\mathfrak{A}$  — квадратная матрица,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  — искомый вектор,  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  — известная правая часть, включающая и правые части краевых условий.

Каждой матрице  $\mathfrak{A}$  можно поставить в соответствие некоторый линейный оператор  $A$ , отображающий пространство  $R_N$  в  $R_N$ . Тогда уравнение (1) примет вид

$$Ay = \varphi, \quad (2)$$

где  $y$  — искомый, а  $\varphi$  — известный векторы пространства  $R_N$ . Оператор  $A$  отображает в себя пространство сеточных функций,

заданных на  $\omega_h$  и удовлетворяющих однородным граничным условиям.

**Пример 1.** Первая краевая задача. Пусть на отрезке  $[0, 1]$  введена равномерная сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}.$$

Ищется решение первой краевой задачи

$$\Delta y = y_{\bar{x}x} = -f(x), \quad 0 < x = ih < 1, \quad y_0 = u_1, \quad y_N = u_2. \quad (3)$$

Вводя вектор  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ , перепишем уравнение (3) в виде (1), где

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матрица размера  $(N-1) \times (N-1)$ . Вектор правой части  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$  учитывает правые части краевых условий (3):

$$\varphi_i = f_i, \quad i = 2, \dots, N-2, \quad \varphi_1 = f_1 + \frac{u_1}{h^2}, \quad \varphi_{N-1} = f_{N-1} + \frac{u_2}{h^2},$$

так что  $\varphi_i$  отличается от  $f_i$  только в приграничных узлах  $i = 1$  и  $i = N-1$ .

Матрица  $\mathfrak{A}$  определяет оператор  $A = -\Lambda$ , который преобразует сеточную функцию  $y(x_i)$ , т. е. вектор  $(N-1)$ -мерного пространства в вектор того же пространства (в сеточную функцию  $(-\tilde{\Lambda}y)_i$ ). Оператор  $\tilde{\Lambda}$  совпадает с оператором  $\Lambda$  на сеточных функциях, обращающихся в нуль на границе (при  $i = 0$  и  $i = N$ ), так что  $(\tilde{\Lambda}y)_i = (\Lambda y)_i$  при  $i = 2, 3, \dots, N-2$ ,

$$(\tilde{\Lambda}y)_1 = \frac{-2y_1 + y_2}{h^2}, \quad (\tilde{\Lambda}y)_{N-1} = \frac{y_{N-2} - 2y_{N-1}}{h^2}. \quad (4)$$

Пусть  $\Omega_h$  — множество сеточных функций, заданных во внутренних узлах сетки  $\omega_h$ ; это множество линейно. Вводя на  $\Omega_h$  скалярное произведение  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$  и норму  $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ , получим линейное нормированное пространство  $\Omega_h$ .

Определенный выше оператор  $A$  линеен и отображает  $\Omega_h$  на  $\Omega_h$  (его область определения и область значений совпадают со всем пространством  $\Omega_h$ ).

Оператор  $A$  самосопряжен, т. е.

$$(Ay, v) = (y, Av) \quad \text{для любых } y, v \in \Omega_h.$$

В самом деле,  $(Ay, v) = (-\tilde{\Lambda}y, v)$ . Пользуясь второй формулой Грина (гл. I, § 2) и учитывая, что  $\tilde{\Lambda}$  совпадает с  $\Lambda$  на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе сетки, получаем  $(\tilde{\Lambda}y, v) = (y, \tilde{\Lambda}v)$ , т. е.  $A = A^*$ .

Оператор  $A$  положительно определен, т. е.

$$(Ay, y) \geq 8 \|y\|^2.$$

Это следует из леммы 3 (гл. I, § 2, п. 3).

Норма оператора  $A$  равна

$$\|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}. \quad (5)$$

В самом деле, норма самосопряженного положительного оператора в конечномерном пространстве  $\Omega_h$  равна его наибольшему собственному значению,  $\|A\| = \lambda_{N-1}$ . Так как в данном случае, согласно гл. I, § 2, п. 2,  $\lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}$ , то имеет место формула (5). При этом справедливо неравенство

$$(Ay, y) \leq \|A\| \|y\|^2.$$

Рассмотрим оператор

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x + dy, \quad 0 < c_1 \leq a \leq c_2, \quad 0 \leq d \leq \bar{c}_3. \quad (6)$$

Он самосопряжен в силу второй формулы Грина. Первая формула Грина дает

$$(Ay, y) = (a, y_{\bar{x}}^2) + (dy, y), \quad (7)$$

где  $y_{\bar{x}}^2 = (y_{\bar{x}})^2$ . Отсюда следует, что

$$(Ay, y) \geq c_1 (1, y_{\bar{x}}^2) = c_1 \|y_{\bar{x}}\|^2 \geq 8c_1 \|y\|^2, \quad (8)$$

т. е.  $A$  положительно определен. Его норма, как видно из формул (7) и (5), оценивается так:

$$\|A\| < 4c_2/h^2 + \bar{c}_3.$$

Пример 2. Третья краевая задача. Пусть дана та же сетка  $\bar{\omega}_h$ , что и в примере 1. Рассмотрим разностную краевую задачу третьего рода

$$\left. \begin{aligned} \Delta y = y_{\bar{x}x} &= -f(x), \quad 0 < x = ih < 1, \\ y_{x,0} &= \sigma_1 y_0 - \mu_1, \quad -y_{\bar{x},N} = \sigma_2 y_N - \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Пусть  $\bar{\Omega}_h$  — множество функций, заданных на сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}.$$

Определим оператор  $\tilde{\Lambda}$  так:

$$(\tilde{\Lambda}y)_i = \begin{cases} \frac{1}{0,5h} (y_{x,0} - \sigma_1 y_0) = \Lambda^- y, & i = 0, \\ \Lambda y = y_{\bar{x}x}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ -\frac{1}{0,5h} (y_{\bar{x},N} + \sigma_2 y_N) = \Lambda^+ y, & i = N. \end{cases}$$

Полагая  $A = -\tilde{\Lambda}$ , перепишем задачу (9) в виде

$$Ay = \varphi, \quad (10)$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{0,5h} \mu_1, & i = 0, \\ f_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{0,5h} \mu_2, & i = N. \end{cases}$$

Линейный оператор  $A$  отображает  $\bar{\Omega}_h$  на  $\bar{\Omega}_h$ . Введем скалярное произведение

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h (y_0 v_0 + y_N v_N)$$

и норму  $\|y\| = \sqrt{[y, y]}$ .

Оператор  $A$  самосопряжен, т. е.  $[y, Av] = [v, Ay]$ , где

$$[y, Av] = -(y, \Lambda v) - 0,5h (y_0 \Lambda^- v + y_N \Lambda^+ v), \quad (y, w) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i w_i h.$$

Пользуясь формулой Грина (гл. I, § 2) и подставляя выражения для  $\Lambda^- v$  и  $\Lambda^+ v$ , получим

$$\begin{aligned} -(y, \Lambda v) &= (-\Lambda y, v) - (y_{x,0} v_0 - y_{\bar{x},N} v_N) + (y_0 v_{x,0} - y_N v_{\bar{x},N}), \\ -0,5h (y_0 \Lambda^- v + y_N \Lambda^+ v) &= -y_0 (v_{x,0} - \sigma_1 v_0) + y_N (v_{\bar{x},N} + \sigma_2 v_N). \end{aligned}$$

Так как

$$y_{x,0} = \sigma_1 y_0 + 0,5h \Lambda^- y, \quad y_{\bar{x},N} = -\sigma_2 y_N - 0,5h \Lambda^+ y,$$

то

$$[y, Av] = -(\Lambda y, v) - 0,5h (v_0 \Lambda^- y + v_N \Lambda^+ y) = [Ay, v],$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что если  $\sigma_1 \geq c_1 > 0$ ,  $\sigma_2 \geq c_1 > 0$ , то оператор  $A$  положительно определен:

$$[Ay, y] \geq \frac{2c_1}{1+c_1} \|y\|^2. \quad (11)$$



Для этого воспользуемся тем же приемом, что и при доказательстве леммы 1 из гл. I, § 2. Именно, представив функцию  $y^2(x)$  в виде

$$y^2(x) = \left( y_0 + \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h \right)^2 = y_0^2 + 2y_0 \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h + \left( \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h \right)^2$$

и воспользовавшись  $\varepsilon$ -неравенством, получим

$$y^2(x) \leq (1 + \varepsilon) y_0^2 + (1 + 1/\varepsilon) \left( \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h \right)^2.$$

Так как, согласно неравенству Коши — Буняковского,

$$\left( \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}(x') h \right)^2 \leq x \left( \sum_{x'=h}^x y_{\bar{x}}^2(x') h \right) \leq x(1, y_{\bar{x}}^2],$$

то из предыдущего неравенства получаем

$$y^2(x) \leq (1 + \varepsilon) y_0^2 + (1 + 1/\varepsilon) x(1, y_{\bar{x}}^2].$$

Аналогично доказывается неравенство

$$y^2(x) \leq (1 + \varepsilon) y_N^2 + (1 + 1/\varepsilon)(1 - x)(1, y_{\bar{x}}^2].$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$y^2(x_i) \leq 0,5(1 + \varepsilon)(y_0^2 + y_N^2) + 0,5(1 + 1/\varepsilon)(1, y_{\bar{x}}^2],$$

$$\|y\|^2 \leq 0,5(1 + \varepsilon)(y_0^2 + y_N^2) + 0,5(1 + 1/\varepsilon)(1, y_{\bar{x}}^2].$$

Отсюда и из тождества

$$[Ay, y] = (1, y_{\bar{x}}^2] + \sigma_1 y_0^2 + \sigma_2 y_N^2, \quad (12)$$

положив  $\varepsilon = c_1$ , получаем (11).

Для нормы оператора  $A$  справедлива оценка

$$\|A\| \leq \frac{4}{h^2} (1 + 0,5c_2h), \quad \text{где } c_2 = \max(\sigma_1, \sigma_2). \quad (13)$$

В самом деле, так как  $(y_{\bar{x}, i})^2 \leq \frac{2}{h^2}(y_i^2 + y_{i-1}^2)$ , то

$$(1, y_{\bar{x}}^2] \leq \frac{4}{h^2} \|y\|^2,$$

где  $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h + 0,5h(y_0^2 + y_N^2)$ .

Учитывая затем, что  $[Ay, y] \leq \|A\| \|y\|^2$ , и

$$\sigma_1 y_0^2 + \sigma_2 y_N^2 = \frac{2}{h} (0,5h\sigma_1 y_0^2 + 0,5h\sigma_2 y_N^2) \leq \frac{2c_2}{h} \|y\|^2$$

из формулы (12) получим искомую оценку (13).

Пример 3. Несамосопряженные операторы. Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$$

сетка на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Рассмотрим разностные операторы

$$\Lambda^- y = y_{\bar{x}}, \quad \Lambda^+ y = -y_x, \tag{14}$$

отображающие множество  $\overset{\circ}{\Omega}_h$  сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю при  $i = 0, i = N$ , на  $\Omega_h$ , так что

$$(\Lambda^- y)_i = \begin{cases} y_1/h, & i = 1, \\ (y_i - y_{i-1})/h, & i = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases}$$

$$(\Lambda^+ y)_i = \begin{cases} -(y_{i+1} - y_i)/h, & i = 1, 2, \dots, N-2, \\ y_{N-1}/h, & i = N-1. \end{cases}$$

Из этих формул видно, что  $\Lambda^-$  и  $\Lambda^+$  можно рассматривать как операторы из  $\Omega_h$  на  $\Omega_h$ .

Пусть  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$  — скалярное произведение на  $\overset{\circ}{\Omega}_h$  и  $\Omega_h$ . Покажем, что операторы  $\Lambda^-$  и  $\Lambda^+$  сопряжены друг другу:

$$(\Lambda^- y, v) = (y, \Lambda^+ v) \text{ для любых } y, v \in \Omega_h. \tag{15}$$

В силу формулы суммирования по частям  $-(y, v_x) = (y_{\bar{x}}, v)$ , если  $y = v = 0$  при  $i = 0, i = N$ . Отсюда и следует сопряженность  $\Lambda^-$  и  $\Lambda^+$ .

Нетрудно заметить, что  $\Lambda^- y + \Lambda^+ y = -(y_x - y_{\bar{x}}) = -h\Lambda y$ , где  $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$ , т. е.  $\Lambda^- + \Lambda^+ = -h\Lambda$ . Поэтому операторы  $\Lambda^-$  и  $\Lambda^+$  положительно определенные:

$$(\Lambda^- y, y) = (\Lambda^+ y, y) = \frac{h}{2} (-\Lambda y, y) = \frac{h}{2} \|y_x\|^2 \geq 4h \|y\|^2.$$

Последнее неравенство справедливо в силу леммы 3 из гл. I, § 2, п. 3.

Обычно рассматриваются операторы из  $\Omega_h$  на  $\Omega_h$  вида

$$R_1 y = \frac{1}{h} y_{\bar{x}}, \quad R_2 y = \frac{1}{h} (-y_x). \tag{16}$$

Они сопряжены друг другу

$$(R_1 y, v) = (y, R_2 v)$$

и

$$(R_1 y, y) = (R_2 y, y) = 0,5 \|y_x\|^2 \geq 4 \|y\|^2.$$

Из формулы

$$\|R_1 y\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x}}^2 h \leq \frac{4}{h^4} \|y\|^2$$

следует, что

$$\|R_1\| \leq 2/h^2, \quad \|R_2\| \leq 2/h^2. \quad (17)$$

Так как  $R_1 = R_2^*$ , то

$$(R_1 R_2 y, y) = \|R_2 y\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{N-1} y_{x,i}^2 h \leq \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^N y_{\bar{x},i}^2 h = \frac{1}{h^2} \|y_{\bar{x}}\|^2,$$

т. е.

$$\|R_2 y\|^2 \leq \frac{1}{h^2} (Ry, y), \quad R = R_1 + R_2. \quad (18)$$

Несамосопряженные разностные операторы появляются, например, при аппроксимации эллиптических операторов второго порядка, содержащих первые производные. Так, оператор

$$Lu = u''(x) + bu'(x), \quad x \in [0, 1], \quad b = \text{const}$$

аппроксимируем разностными операторами  $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}x} + by_x$  при  $b > 0$  или  $\Lambda_2 y = y_{\bar{x}x} + by_{\bar{x}}$  при  $b < 0$ , где  $y \in \dot{\Omega}_h$ .

Пусть  $\tilde{\Lambda}y$  — оператор из  $\Omega_h$  на  $\Omega_h$ , совпадающий с  $\Lambda y$  при  $y \in \dot{\Omega}_h$ . Операторы  $A_1 = -\tilde{\Lambda}_1$ ,  $A_2 = -\tilde{\Lambda}_2$ , действующие из  $\Omega_h$  на  $\Omega_h$ , положительно определены при любом  $h$ . В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} (A_1 y, y) &= (-y_{\bar{x}x}, y) - b(y_x, y) = (1 + 0,5hb) \|y_{\bar{x}}\|^2, \\ (A_2 y, y) &= (1 - 0,5hb) \|y_{\bar{x}}\|^2 = (1 + 0,5h|b|) \|y_{\bar{x}}\|^2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Отсюда находим

$$(A_i y, y) \geq 8(1 + 0,5h|b|) \|y\|^2, \quad i = 1, 2.$$

Так как  $A_1 = A + b\Lambda^+$ ,  $A_2 = A + |b|\Lambda^-$ , где  $A = -\Lambda$ ,  $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$  и  $\|\Lambda^\pm\| \leq 2/h$ ,  $\|A\| \leq 4/h^2$ , то, в силу неравенства треугольника для норм, получаем

$$\left. \begin{aligned} \|A_1\| &\leq \|A\| + b\|\Lambda^+\| < \frac{4}{h^2}(1 + 0,5hb), \quad b > 0, \\ \|A_2\| &\leq \|A\| + |b|\|\Lambda^-\| < \frac{4}{h^2}(1 + 0,5h|b|), \quad b < 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Заметим, что если оператор  $Lu = u'' + bu'$  аппроксимировать выражением  $\Lambda y = y_{\bar{x}x} + by_{\bar{x}}$  при  $b > 0$ , то вместо  $1 + 0,5hb$  в (19) получим  $1 - 0,5hb$  и оператор  $(-\Lambda)$  будет положительно определенным только при  $h < 2/b$ .

Мы ограничились здесь простейшими примерами,

В гл. IV аналогичными методами изучались разностные операторы, аппроксимирующие эллиптические операторы (в частности, оператор Лапласа) в прямоугольных областях.

Если исходный дифференциальный оператор самосопряжен и положительно определен, то и разностный оператор надо строить так, чтобы он обладал указанными свойствами в сеточном пространстве. Этого можно добиться, используя, например, метод баланса (интегро-интерполяционный метод, см. гл. III) или вариационный метод для построения разностных схем (см., например, Ю. А. Гусман, А. А. Оганесян [1]).

Из предыдущих примеров видно, что разностные уравнения можно трактовать как операторные уравнения с операторами в линейном нормированном конечномерном пространстве. Для этих операторов характерно то, что они отображают все пространство в себя.

Перейдем к изложению теории разностных схем как операторных уравнений.

**2. Устойчивость разностной схемы.** Пусть даны два линейных нормированных пространства  $\mathcal{B}_h^{(1)}$  и  $\mathcal{B}_h^{(2)}$ , зависящих от параметра  $h$ , являющегося вектором некоторого нормированного пространства,  $|h| > 0$  — норма вектора  $h$ . Рассмотрим линейный оператор  $A_h$  с областью определения  $\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{B}_h^{(1)}$  и множеством значений  $\mathcal{R}(A_h) \subseteq \mathcal{B}_h^{(2)}$ . Пусть  $\|\cdot\|_{(1_h)}$  и  $\|\cdot\|_{(2_h)}$  — нормы в  $\mathcal{B}_h^{(1)}$  и  $\mathcal{B}_h^{(2)}$ .

Рассмотрим уравнение

$$A_h y_h = \varphi_h, \quad y_h \in \mathcal{B}_h^{(1)}, \quad \varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}, \quad (21)$$

где  $\varphi_h$  — заданный вектор.

Меняя параметр  $h$ , мы получим множество решений  $\{y_h\}$  уравнения (21). Операторное уравнение (21), зависящее от параметра  $h$ , будем называть *разностной схемой*.

Будем говорить, что схема (21) *корректна* (задача (21) *корректно поставлена*), если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$

1) решение  $y_h$  уравнения (21) существует и единственно при любых  $\varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}$  (схема (21) *однозначно разрешима*),

2) решение  $y_h$  уравнения (21) непрерывно зависит от  $\varphi_h$ , причем эта зависимость равномерна по  $h$  (схема (21) *устойчива*), иными словами, существует такая положительная постоянная  $M$ , не зависящая от  $h$ ,  $\varphi_h$ , что для решения уравнения (21) имеет место оценка (при любых  $\varphi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}$ ):

$$\|y_h\|_{(1_h)} \leq M \|\varphi_h\|_{(2_h)}. \quad (22)$$

Разрешимость схемы (21) означает, что существует обратный оператор  $A_h^{-1}$ , т. е.

$$y_h = A_h^{-1} \varphi_h. \quad (23)$$

Устойчивость схемы означает, что обратный оператор  $A_h^{-1}$  из  $\mathcal{B}_h^{(2)}$  в  $\mathcal{B}_h^{(1)}$  равномерно по  $h$  ограничен:

$$\|A_h^{-1}\| \leq M, \text{ где } M > 0 \text{ не зависит от } h. \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует оценка (22):

$$\|y_h\|_{(1h)} \leq \|A_h^{-1}\| \|\varphi_h\|_{(2h)} \leq M \|\varphi_h\|_{(2h)}.$$

В случае, когда  $\mathcal{B}_h^{(1)} = \mathcal{B}_h^{(2)} = H_h$  — гильбертово пространство и  $A_h$  — ограниченный оператор с областью определения  $\mathcal{D}(A_h) = H_h$ , для корректности схемы достаточно требовать, чтобы оператор  $A_h$  был положительно определен:

$$(A_h x, x) \geq \delta \|x\|^2 \text{ для всех } x \in H_h, \quad (25)$$

где  $\|x\|^2 = (x, x)$  и  $\delta > 0$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

В самом деле, из теоремы 4 гл. I, § 3 следует существование оператора  $A_h^{-1}$ , определенного на всем пространстве  $H_h$  и ограниченного:

$$\|A_h^{-1}\| \leq 1/\delta. \quad (26)$$

Поэтому для решения уравнения (21) верна априорная оценка

$$\|y_h\|_{(h)} \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi_h\|_{(h)}.$$

Заметим, что самосопряженность оператора  $A_h$  в случае вещественного пространства  $H_h$  не предполагается.

Если  $H_h$  — комплексное гильбертово пространство, то самосопряженность  $A_h$  является следствием его положительности.

Для доказательства устойчивости схемы (21) требуется получить априорную оценку вида (22). Вывод некоторых априорных оценок для операторного уравнения (21) будет дан в п. 4.

**3. Сходимость и аппроксимация.** Пусть  $\mathcal{B}^{(1)}$  и  $\mathcal{B}^{(2)}$  — линейные нормированные пространства с нормами  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$ . Предположим, что

1) существуют линейные операторы  $\mathcal{P}_h^{(1)}$  из  $\mathcal{B}^{(1)}$  в  $\mathcal{B}_h^{(1)}$  и  $\mathcal{P}_h^{(2)}$  из  $\mathcal{B}^{(2)}$  в  $\mathcal{B}_h^{(2)}$ , так что

$$\mathcal{P}_h^{(1)} u = u_h \in \mathcal{B}_h^{(1)}, \text{ если } u \in \mathcal{B}^{(1)},$$

$$\mathcal{P}_h^{(2)} f = f_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}, \text{ если } f \in \mathcal{B}^{(2)},$$

2) выполнены условия согласования норм

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_h^{(1)} u\|_{(1h)} = \|u\|_{(1)}, \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_h^{(2)} f\|_{(2h)} = \|f\|_{(2)}. \quad (27)$$

Пусть  $y_h$  — вектор из  $\mathcal{B}_h^{(1)}$ . Нас будет интересовать сходимость  $\{y_h\}$  при  $|h| \rightarrow 0$  к некоторому фиксированному элементу  $u$  из  $\mathcal{B}^{(1)}$ .

Будем говорить, что

1)  $\{y_h\}$ , где  $y_h \in \mathcal{B}_h^{(1)}$ , сходится к элементу  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ , если

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|y_h - \mathcal{P}_h^{(1)}u\|_{(1_h)} = 0, \quad (28)$$

2)  $\{y_h\}$  сходится к  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$  со скоростью  $O(|h|^n)$ ,  $n > 0$  (или аппроксимирует  $u$  с точностью  $O(|h|^n)$ ), если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$  имеет место оценка

$$\|y_h - u_h\|_{(1_h)} \leq M|h|^n, \quad u_h = \mathcal{P}_h^{(1)}u, \quad (29)$$

где  $M > 0$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

Пусть  $y_h$  — решение задачи (21). Будем говорить, что

1) схема (21) сходится, если существует элемент  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ , такой, что выполнено (28),

2) схема имеет точность  $O(|h|^n)$ , если выполнено (29).

Введем понятие погрешности аппроксимации на элементе  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ . Для этого напишем уравнение для разности  $z_h = y_h - u_h$ . Подставляя  $y_h = z_h + u_h$  в (21), получим

$$A_h z_h = \psi_h, \quad \psi_h = \varphi_h - A_h u_h, \quad \psi_h \in \mathcal{B}_h^{(2)}. \quad (30)$$

Правую часть  $\psi_h = \psi_h(u)$ , зависящую от выбора элемента  $u$  из  $\mathcal{B}^{(1)}$ , назовем погрешностью аппроксимации на элементе  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$  для схемы (21). Очевидно, что  $\psi_h$  есть невязка, возникающая при замене в уравнении (21)  $y_h$  элементом  $u_h = \mathcal{P}_h^{(1)}u$ .

Будем говорить, что

1) схема (21) обладает аппроксимацией на элементе  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ , если

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\psi_h(u)\|_{(2_h)} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \|\varphi_h - A_h u_h\|_{(2_h)} = 0, \quad (31)$$

2) схема (21) имеет  $n$ -й порядок аппроксимации на элементе  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ , если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$

$$\|\psi_h(u)\|_{(2_h)} \leq M|h|^n \quad \text{или} \quad \|\psi_h(u)\|_{(2_h)} = O(|h|^n), \quad (32)$$

где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$ ,  $n > 0$ .

Установим теперь связь между устойчивостью, аппроксимацией на элементе  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$  и сходимостью к этому элементу для схемы (21).

Если схема (21) корректна, то и задача (30) для  $z_h$  также корректна. Поэтому для ее решения верна оценка

$$\|z_h\|_{(1_h)} \leq M\|\psi_h\|_{(2_h)}. \quad (33)$$

Отсюда следует

**Теорема 1.** Если схема (21) корректна и обладает аппроксимацией на некотором элементе  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ , то она сходится, точнее, решение  $u_h$  задачи (21) при  $|h| \rightarrow 0$  сходится к этому элементу  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ , причем порядок точности схемы (21) совпадает с порядком аппроксимации.

До сих пор мы говорили о сходимости схемы и погрешности аппроксимации на некотором фиксированном элементе  $u$  из  $\mathcal{B}^{(1)}$ . Однако, если  $u$  принадлежит области определения некоторого линейного оператора  $\mathcal{A}$ , действующего из  $\mathcal{B}^{(1)}$  в  $\mathcal{B}^{(2)}$ , то  $\mathcal{A}u = f$ ,  $f \in \mathcal{B}^{(2)}$ . Поэтому можно считать, что  $u$  есть решение уравнения

$$\mathcal{A}u = f, \quad u \in \mathcal{B}^{(1)}, \quad f \in \mathcal{B}^{(2)} \quad (34)$$

и, следовательно, говорить об аппроксимации этого уравнения разностной схемой. Мы не вводили уравнение (34) лишь потому, что нигде в определениях не используются никакие предположения относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Всюду мы имели дело лишь с элементом  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$ .

Однако, если  $u$  есть решение некоторого уравнения (34), то можно говорить, как это обычно делается, об аппроксимации уравнения (34) схемой (21) на решении уравнения (34), о сходимости к решению уравнения (34) и т. д.

Поскольку имеется понятие аппроксимации элемента  $f$  из  $\mathcal{B}^{(2)}$  множеством  $\{\varphi_h\}$  из  $\{\mathcal{B}_h^{(2)}\}$ , то можно говорить об аппроксимации  $f$  элементами  $\varphi_h$ , оператора  $\mathcal{A}$  оператором  $A_h$ :

1)  $\varphi_h$  аппроксимирует  $f$  с порядком  $n$ , если

$$\|\varphi_h - \mathcal{P}_h^{(2)}f\|_{(2_h)} = O(|h|^n), \quad (35)$$

2) оператор  $A_h$  аппроксимирует оператор  $\mathcal{A}$  с порядком  $n$ , если для любого  $u \in \mathcal{B}^{(1)}$  справедлива оценка

$$\|A_h u_h - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u)\|_{(2_h)} = \|A_h(\mathcal{P}_h^{(1)}u) - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u)\|_{(2_h)} = O(|h|^n). \quad (36)$$

Очевидно, что если выполнены условия (35) и (36), то схема (21) имеет  $n$ -й порядок аппроксимации на решении  $u$  уравнения (34).

В самом деле, так как  $\mathcal{P}_h^{(2)}(f - \mathcal{A}u) = 0$ , то

$$\psi_h(u) = \varphi_h - A_h u_h = (\varphi_h - \mathcal{P}_h^{(2)}f) - (A_h(\mathcal{P}_h^{(1)}u) - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u))$$

и

$$\|\psi_h(u)\|_{(2_h)} \leq \|\varphi_h - \mathcal{P}_h^{(2)}f\|_{(2_h)} + \|A_h(\mathcal{P}_h^{(1)}u) - \mathcal{P}_h^{(2)}(\mathcal{A}u)\|_{(2_h)} \leq M|h|^n,$$

если выполнены условия (35) и (36).

Еще раз подчеркнем, что для оценки порядка точности схемы надо оценить ее порядок аппроксимации лишь на решении исходной задачи.

**4. Некоторые априорные оценки.** Рассмотрим ряд простейших априорных оценок решения уравнения (21), вид которых зависит от информации об операторе схемы. Эти оценки типичны для разностных эллиптических задач.

Для упрощения записи будем в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, опускать индекс  $h$ . Итак, пусть дано уравнение

$$Ay = \varphi, \quad (37)$$

где  $A$  — линейный ограниченный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве  $H$ ,  $\varphi$  — известный,  $y$  — искомый элемент из  $H$ .

Будем предполагать, что задача (37) разрешима при любых правых частях  $\varphi \in H$  (т. е., что существует оператор  $A^{-1}$  с областью определения  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ ).

Все постоянные, встречающиеся ниже, предполагаются не зависящими от  $h$ .

Пусть  $(, )$  — скалярное произведение,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  — норма в  $H$ . Запись  $A = A^* > 0$  будет означать, что  $A$  — самосопряженный и положительный оператор. Введем обозначения

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} = \sqrt{(A^{-1}\varphi, \varphi)}, \quad \|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}, \quad A = A^* > 0.$$

*Лемма 1.* Пусть оператор  $A$  имеет ограниченный обратный оператор  $A^{-1}$  с областью определения  $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$ . Тогда, если  $A^* = A > 0$ , то верны оценки (для любых  $y$  и  $\varphi$  из  $H$ ):

$$|( \varphi, y )| \leq \|y\|_A \|\varphi\|_{A^{-1}}, \quad (38)$$

$$|( \varphi, y )| \leq \varepsilon \|y\|_A^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{A^{-1}}^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (39)$$

*Доказательство.* Так как  $A^{-1} = (A^{-1})^* > 0$ ,  $A^{-1}A = E$ , где  $E$  — единичный оператор, то  $(\varphi, y) = (A^{-1}Ay, \varphi)$ . Применяя затем обобщенное неравенство Коши — Буняковского, получим

$$(A^{-1}(Ay), \varphi)^2 \leq (A^{-1}(Ay), Ay)(A^{-1}\varphi, \varphi) = \|y\|_A^2 \|\varphi\|_{A^{-1}}^2.$$

Неравенство (39) следует из (38) и  $\varepsilon$ -неравенства.

Приведем ряд априорных оценок для решения уравнения (37).

1) Имеют место точные оценки

$$\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}} \quad \text{при} \quad A = A^* \geq \delta E, \quad \delta > 0, \quad (40)$$

$$\|Ay\| = \|\varphi\|. \quad (41)$$

Действительно, из уравнения (37) имеем

$$(Ay, y) = (\varphi, y) = (\varphi, A^{-1}\varphi),$$

так как  $y = A^{-1}\varphi$ . Формула (41) очевидна,



2) Если  $A = A^* \geq \delta E$ , то

$$\|y\|_A \leq \|\varphi\|/\sqrt{\delta}. \quad (42)$$

Это следует из (40), так как  $A \geq \delta E$  дает  $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$  и

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = (A^{-1}\varphi, \varphi) \leq \|A^{-1}\varphi\| \|\varphi\| \leq \|A^{-1}\| \|\varphi\|^2 \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\|^2.$$

3) Пусть в уравнении (37)  $A \geq \gamma A_0$ ,  $\gamma > 0$ , где  $A_0$  — самосопряженный положительный оператор, имеющий обратный оператор  $A_0^{-1}$ . Тогда

$$\|y\|_{A_0} \leq \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|_{A_0^{-1}}. \quad (43)$$

Умножая (37) скалярно на  $y$ , получим энергетическое тождество

$$(Ay, y) = (\varphi, y). \quad (44)$$

Так как

$$(Ay, y) \geq \gamma (A_0 y, y) = \gamma \|y\|_{A_0}^2$$

и, согласно лемме 1,

$$|(\varphi, y)| \leq \|\varphi\|_{A_0^{-1}} \|y\|_{A_0},$$

то из (44) получаем  $\gamma \|y\|_{A_0}^2 \leq \|\varphi\|_{A_0^{-1}} \|y\|_{A_0}$ , т. е.  $\|y\|_{A_0} \leq \|\varphi\|_{A_0^{-1}}$ .

4) Пусть в уравнении (37)  $A = A^* > 0$ ,  $A \geq \gamma A_0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $A_0 = A_0^* > 0$ ,  $A$  и  $A_0$  перестановочны. Тогда справедлива оценка

$$\|A_0 y\| \leq \|\varphi\|/\gamma. \quad (45)$$

Достаточно показать, что  $\|Ay\| \geq \gamma \|A_0 y\|$  и воспользоваться (41). Из условия  $A \geq \gamma A_0$  получаем

$$\|Ay\|^2 = (A^2 y, y) = (AA^{1/2} y, A^{1/2} y) \geq \gamma (A_0 A^{1/2} y, A^{1/2} y).$$

Учитывая перестановочность операторов  $A_0$  и  $A$ , имеем отсюда

$$\|Ay\|^2 \geq \gamma (AA_0 y, y) = \gamma (AA_0^{1/2} y, A_0^{1/2} y) \geq \gamma (A_0^2 y, y),$$

что и требовалось.

5) Пусть  $A \geq \gamma A_0$ , где

$$A_0 = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha,$$

$A_\alpha = A_\alpha^* > 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ,  $\{A_\alpha\}$  попарно перестановочны. Тогда для решения уравнения (37) справедлива оценка

$$\sum_{\alpha=1}^p \|A_\alpha y\|^2 \leq \|\varphi\|^2/\gamma^2. \quad (46)$$

Для простоты ограничимся случаем  $p = 2$ :

$$\|(A_1 + A_2)y\|^2 = \|A_1y\|^2 + \|A_2y\|^2 + 2(A_1y, A_2y) \geq \|A_1y\|^2 + \|A_2y\|^2.$$

Отсюда и из (45) следует (46).

Пример 1. Схема повышенного порядка точности в прямоугольнике

$$\bar{G} = (0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2).$$

Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{(i_1h_1, i_2h_2), 0 \leq i_\alpha \leq N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

— сетка в  $\bar{G}$ . Схема  $O(|h|^4)$  для задачи Дирихле имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Lambda'y &= (\Lambda_1 + \Lambda_2)y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1\Lambda_2y = -\varphi, \quad x = (i_1h_1, i_2h_2) \in G, \\ \varphi &= f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2f, \quad y|_{\gamma_h} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где  $\gamma_h$  — граница сетки  $\omega_h$ ,  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$  (см. гл. IV, § 1).

Пусть  $\Omega_h$  — пространство сеточных функций, заданных во внутренних узлах  $x \in \omega_h$  сетки,  $\mathring{\Omega}_h$  — пространство сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на  $\gamma_h$ . Введем на  $\Omega_h$  скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} h_1h_2y(i_1h_1, i_2h_2)v(i_1h_1, i_2h_2) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)v(x)h_1h_2,$$

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

где  $y \in \Omega_h$ . Определим аналогично примеру 1 п. 1 операторы  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_1y = -\tilde{\Lambda}_1y, \quad A_2y = -\tilde{\Lambda}_2y, \quad \text{где } \tilde{\Lambda}_\alpha y = \Lambda_\alpha y \text{ при } y \in \mathring{\Omega}_h,$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha \text{ действует из } \Omega_h \text{ в } \Omega_h. \text{ Задача (47) сводится к уравнению} \\ Ay = (A_1 + A_2 - (\kappa_1 + \kappa_2)A_1A_2)y = \varphi, \quad y \in \Omega_h = H, \quad \varphi \in \Omega_h = H, \quad (48)$$

где  $\kappa_1 = h_1^2/12$ ,  $\kappa_2 = h_2^2/12$ . Операторы  $A_1$  и  $A_2$  самосопряженные,  $(A_\alpha y, v) = (y, A_\alpha v)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , положительно определенные,  $A_\alpha \geq \frac{8}{l_\alpha^2} E$ , и перестановочные. Поэтому  $A_1A_2 = (A_1A_2)^* > 0$ . Учитывая, что

$$A_1A_2 \leq \|A_1\|A_2, \quad A_1A_2 = A_2A_1 \leq \|A_2\|A_1,$$

где  $\|A_\alpha\| < 4/h_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, 2$ , получаем

$$(\kappa_1 + \kappa_2)A_1A_2 \leq \kappa_1\|A_1\|A_2 + \kappa_2\|A_2\|A_1 < \frac{1}{3}(A_1 + A_2).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{2}{3} A_0 < A \leq A_0, \quad \text{где } A_0 = A_1 + A_2.$$

Операторы  $A_0$  и  $A$  перестановочны,  $A_0 = A_0^* > 0$ ,  $A = A^* > 0$ . Поэтому для уравнения (48) справедливы оценки (45) и (46):

$$\|A_0 y\|^2 = \|A_1 y\|^2 + 2(A_1 A_2 y, y) + \|A_2 y\|^2 \leq \frac{9}{4} \|\varphi\|^2, \quad (49)$$

где

$$\|A_\alpha y\| = \|y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}\|, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$(A_1 A_2 y, y) = \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{1,2}^2,$$

$$\|v\|_{1,2}^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} v_{i_1 i_2}^2 h_1 h_2.$$

Пользуясь теоремой вложения (гл. IV, § 2), получаем

$$\|y\|_C \leq M \|\varphi\|. \quad (50)$$

Из этой оценки следует равномерная сходимость со скоростью  $O(|h|^4)$  схемы (47) к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Аналогично убеждаемся в справедливости оценки (50) для схемы  $O(|h|^4)$  в параллелепипеде. В этом случае

$$A = A_1 + A_2 + A_3 - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 - (\kappa_1 + \kappa_3) A_1 A_3 - (\kappa_2 + \kappa_3) A_2 A_3,$$

имеют место оценки  $\frac{1}{3} A_0 \leq A \leq A_0$ , где  $A_0 = A_1 + A_2 + A_3$ , так что  $\gamma = 1/3$ . Оценка (50) получена В. Б. Андреевым [2].

Покажем как вычисляются негативные нормы вида  $\|\varphi\|_{A^{-1}} = (A^{-1} \varphi, \varphi)^{1/2}$  для некоторых разностных операторов. При вычислении таких норм будем использовать тождество

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = (y, \varphi), \quad (51)$$

где  $y$  есть решение операторного уравнения (37).

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} (ay_{\bar{x}})_{x_i} &= -\varphi(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad hN = 1, \\ y_0 &= y_N = 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Введем пространство функций  $H_{N-1}$ , определенных на сетке  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$  и равных нулю при  $i = 0, i = N$ . Как обычно,

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

Задачу (52) можно записать в виде операторного уравнения (37), где  $y = \{0, y_1, \dots, y_{N-1}, 0\}$ , оператор  $A: H_{N-1} \rightarrow H_{N-1}$  определен тождествами

$$(Ay)_i = -(ay_{\bar{x}})_{x,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (Ay)_0 = (Ay)_N = 0, \quad (53)$$

и правая часть  $\varphi$  есть вектор

$$\varphi = \{0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}, 0\}.$$

Ранее было показано, что если  $a_i \geq c_1 > 0$ , то оператор (53) — самосопряженный и положительно определенный, так что оператор  $A^{-1}$  существует.

*Лемма 2. Норму  $\|\varphi\|_{A^{-1}}$  для оператора (53) можно представить в виде*

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i \right)^2 \bigg/ \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i}, \quad (54)$$

где

$$S_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\varphi_k, \quad i = 2, 3, \dots, N; \quad S_1 = 0. \quad (55)$$

В частности, для оператора (53) с  $a_i \equiv 1$  имеем

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = \sum_{i=1}^N hS_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N hS_i \right)^2. \quad (56)$$

*Доказательство.* Представим правую часть уравнения (52) в виде  $\varphi_i = S_{x,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , где  $S_i$  задано соотношениями (55). Из уравнения

$$(ay_{\bar{x}} + S)_{x,i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

получим тогда, что

$$a_i y_{\bar{x},i} + S_i = C = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (57)$$

Для нахождения постоянной  $C$  поделим (57) на  $a_i$  и просуммируем по  $i$  от 1 до  $N$ :

$$\sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i = C \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i},$$

т. е.

$$C = \left( \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i \right) \bigg/ \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i}.$$

Далее, согласно (51), имеем

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = (y, S_x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i (S_{i+1} - S_i) = - \sum_{i=1}^N h y_{\bar{x},i} S_i.$$

Учитывая уравнение (57), получаем отсюда

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{A^{-1}}^2 &= -\sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} (C - S_i) S_i = \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 - C \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i} S_i \right)^2 \bigg/ \sum_{i=1}^N \frac{h}{a_i}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Заметим, что тождество (54) справедливо и в случае, когда функция  $S$  определена следующим образом:

$$S_i = -\sum_{k=i}^{N-1} h\varphi_k, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad S_N = 0.$$

Следствие. Если  $a_i \geq c_1 > 0$ , то для оператора (53) имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{A^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \|\varphi\|_{(-2)}, \quad (58)$$

где

$$\|\varphi\|_{(-2)}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \sum_{k=i}^{N-1} h\varphi_k \right)^2,$$

либо

$$\|\varphi\|_{(-2)}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \sum_{k=1}^i h\varphi_k \right)^2.$$

Рассмотрим теперь третью краевую задачу (9). Введем также, как и в примере 2 п. 1, пространство  $H_{N+1}$ , состоящее из функций, заданных на сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\},$$

со скалярным произведением

$$[y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h (y_0 v_0 + y_N v_N).$$

Задачу (9) запишем в виде (37), где

$$y = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N\}, \quad \varphi = \left\{ \frac{1}{0,5h} \mu_1, f_1, \dots, f_{N-1}, \frac{1}{0,5h} \mu_2 \right\},$$

$$(Ay)_i = \begin{cases} -\frac{1}{0,5h} (y_{\bar{x}, 1} - \sigma_1 y_0), & i = 0, \\ -y_{\bar{x}, i}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{0,5h} (y_{\bar{x}, N} + \sigma_2 y_N), & i = N. \end{cases} \quad (59)$$

Лемма 3. Норму  $\|\varphi\|_{A^{-1}}$  для оператора (59) можно представить в виде

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 = [A^{-1}\varphi, \varphi] = \sum_{i=1}^N hS_i^2 + \frac{1}{\sigma_2} S_{N+1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N hS_i + \frac{1}{\sigma_2} S_{N+1}\right)^2}{1 + 1/\sigma_1 + 1/\sigma_2}, \quad (60)$$

где

$$S_1 = 0,5h\varphi_0, \quad S_i = 0,5h\varphi_0 + \sum_{k=1}^{i-1} h\varphi_k, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

$$S_{N+1} = 0,5h(\varphi_0 + \varphi_N) + \sum_{k=1}^{N-1} h\varphi_k.$$

Доказательство. Введем точки  $x_{-1} = -h$ ,  $x_{N+1} = 1 + h$  и положим  $y(x_{-1}) = y_{-1} = 0$ ,  $y(x_{N+1}) = y_{N+1} = 0$ . Тогда левое граничное условие в (9) можно записать в виде

$$-\frac{(y_1 - y_0) - a_0(y_0 - y_{-1})}{h^2} = \tilde{\varphi}_0,$$

где  $a_0 = h\sigma_1$ ,  $\tilde{\varphi}_0 = 0,5\varphi_0$ .

Точно так же правое граничное условие в (9) принимает вид

$$-\frac{a_{N+1}(y_{N+1} - y_N) - (y_N - y_{N-1})}{h^2} = \tilde{\varphi}_N,$$

где  $a_{N+1} = h\sigma_2$ ,  $\tilde{\varphi}_N = 0,5\varphi_N$ .

Таким образом, задача (9) эквивалентна первой краевой задаче

$$-(ay_{\bar{x}})_{x_i} = \tilde{\varphi}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad y_{-1} = y_{N+1} = 0, \quad (61)$$

где  $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ;  $\tilde{\varphi}_0 = 0,5\varphi_0$ ,  $\tilde{\varphi}_N = 0,5\varphi_N$ ,  $a_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $a_0 = h\sigma_1$ ,  $a_{N+1} = h\sigma_2$ .

Заметим теперь, что если  $y_i$  — решение задачи (9), то

$$\begin{aligned} [A^{-1}\varphi, \varphi] &= [y, \varphi] = 0,5h(y_0\varphi_0 + y_N\varphi_N) + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i h = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i\varphi_i h + h(y_0\tilde{\varphi}_0 + y_N\tilde{\varphi}_N) = \sum_{i=0}^N h y_i \tilde{\varphi}_i = \sum_{i=0}^N (A^{-1}\tilde{\varphi})_i \tilde{\varphi}_i h. \end{aligned}$$

Поэтому применяя к (61) лемму 2, получаем (60).

Следствие. Если  $\sigma_1 \geq c_1 > 0$ ,  $\sigma_2 \geq c_1 > 0$ , то для оператора (59) справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{A^{-1}}^2 \leq \sum_{i=1}^N h \left( \sum_{k=1}^{i-1} h\varphi_k + 0,5h\varphi_0 \right)^2 + \frac{1}{c_1} \left( \sum_{k=1}^{N-1} h\varphi_k + 0,5h(\varphi_0 + \varphi_N) \right)^2.$$

Пример 2. Пусть  $Ay = -(ay_{\bar{x}})_x + dy$ ,  $y_0 = y_N = 0$ , где  $a \geq c_1 > 0$ ,  $d \geq 0$ . Тогда  $A = A^* \geq 8c_1 E$  и

$$(Ay, y) = (a, y_{\bar{x}}^2] + (d, y^2) \geq c_1 \|y_{\bar{x}}\|^2 = c_1 (A_0 y, y),$$

$$A_0 y = -y_{\bar{x}\bar{x}},$$

т. е.  $\gamma = c_1$ . Поэтому, в силу (43), для задачи

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - dy_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = y_N = 0 \quad (62)$$

верна оценка

$$\|y_{\bar{x}}\| \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_{A_0^{-1}},$$

или, учитывая следствие из леммы 2,

$$\|y_{\bar{x}}\| \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_{(-2)}.$$

Применяя теорему вложения (см. лемму 1, гл. I, § 2), имеем оценку

$$\|y\|_C = \max_{1 \leq i \leq N-1} |y_i| \leq \frac{1}{2c_1} \|\varphi\|_{(-2)}.$$

Эта оценка была получена в гл. I, § 2 методом энергетических неравенств.

Оценкой (43) можно пользоваться, если  $A$  — разностная аппроксимация оператора

$$-Lu = - \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \geq \gamma \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2, \quad u|_\Gamma = 0,$$

область  $G$  — параллелепипед,  $\Gamma$  — граница  $G$ , сетка  $\bar{\omega}_h$  равномерна по каждому  $x_\alpha$ . В этом случае, согласно гл. IV, § 1,

$$Ay = - \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{1}{2} \left[ (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta} y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right],$$

$$A_0 y = \sum_{\alpha=1}^p y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Рассмотрим теперь операторы специального вида (дивергентные или консервативные)

$$A = T^* S T, \quad (63)$$

где  $T, S, T^*$  — линейные операторы:  $T$  действует из  $H$  в пространство  $H_1$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ ,  $S$  действует из  $H_1$  в  $H_1$ , а  $T^*$  — из  $H_1$  в  $H$ .

Операторы  $T$  и  $T^*$  сопряжены в следующем смысле

$$(Ty, v) = (y, T^*v) \text{ для всех } y \in H, v \in H_1.$$

Пусть  $S \geq c_1 E$ ,  $c_1 > 0$ , тогда

$$(Ay, y) = (T^*STy, y) = (STy, Ty) \geq c_1 \|Ty\|^2,$$

т. е.  $A \geq \gamma A_0$ , где  $A_0 = T^*T$ ,  $\gamma = c_1$ .

Оператор  $A_0$  самосопряжен,

$$(A_0y, z) = (T^*Ty, z) = (y, T^*Tz) = (y, A_0z).$$

Поэтому имеет место оценка (43), которая, если существуют  $T^{-1}$  и  $(T^*)^{-1}$ , принимает вид

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{c_1} \|(T^*)^{-1}\varphi\|. \quad (64)$$

В самом деле,

$$\|y\|_{A_0}^2 = (A_0y, y) = \|Ty\|^2, \quad \|\varphi\|_{A_0^{-1}}^2 = (T^{-1}(T^*)^{-1}\varphi, \varphi) = \|(T^*)^{-1}\varphi\|^2.$$

Оценка (64) упрощается в том случае, когда правая часть  $\varphi$  уравнения (37) имеет специальный вид,  $\varphi = T^*\eta$  и  $A = T^*ST$ . Умножая (37) скалярно на  $y$ , получим

$$(T^*STy, y) = (T^*\eta, y) = (Ty, \eta).$$

Отсюда и из неравенств

$$(T^*STy, y) \geq c_1 \|Ty\|^2, \quad (Ty, \eta) \leq \|Ty\| \|\eta\|$$

следует оценка

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{c_1} \|\eta\|.$$

Отметим, что в этом случае не требуется существования оператора  $(T^*)^{-1}$ .

Приведем пример построения разложения (63).

Пример 3. Третья краевая задача:

$$\left. \begin{aligned} (ay_{\bar{x}})_x &= -\varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad a \geq c_1 > 0, \\ a_1 y_{\bar{x}, 1} &= \sigma_1 y_0 - \mu_1, \quad -a_N y_{\bar{x}, N} = \sigma_2 y_N - \mu_2, \\ \sigma_1 &\geq c_1 > 0, \quad \sigma_2 \geq c_1 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

В данном случае оператор  $A$  имеет вид (см. пример 2 п. 1):

$$(Ay)_i = \begin{cases} -\frac{1}{0,5h} (a_1 y_{\bar{x}, 1} - \sigma_1 y_0), & i = 0, \\ -(ay_{\bar{x}})_x, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{0,5h} (a_N y_{\bar{x}, N} + \sigma_2 y_N), & i = N. \end{cases} \quad (66)$$



Чтобы представить оператор (66) в виде (63), удобно ввести дополнительную сетку

$$\bar{\omega}_h^1 = \{x_0, x_{1/2}, \dots, x_{i-1/2}, \dots, x_{N-1/2}, x_N\}, \quad x_{i-1/2} = (i - 0,5)h,$$

и рассматривать пространство функций  $H_1$ , определенных на  $\bar{\omega}_h^1$ , со скалярным произведением

$$(y, v)_1 = \sum_{i=1}^N h y_{i-1/2} v_{i-1/2} + y_N v_N + y_0 v_0, \quad \|y\|_1 = \sqrt{(y, y)_1}.$$

Как и ранее,  $H$  — пространство функций, определенных на  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}$  со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5h (y_0 v_0 + y_N v_N), \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Определим операторы  $T: H \rightarrow H_1$  и  $T^*: H_1 \rightarrow H$  следующим образом:

$$(Ty)_0 = y_0, \quad (Ty)_{i-1/2} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (Ty)_N = -y_N,$$

$$(T^*v)_0 = -\frac{v_{1/2} - v_0}{0,5h}, \quad (T^*v)_N = -\frac{v_N - v_{N-1/2}}{0,5h},$$

$$(T^*v)_i = -\frac{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y \in H, \quad v \in H_1.$$

Нетрудно видеть, что  $A = T^*ST$ , где оператор  $S: H_1 \rightarrow H_1$  определен формулами

$$(Sy)_0 = \sigma_1 y_0, \quad (Sy)_{i-1/2} = a_i y_{i-1/2}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (Sy)_N = \sigma_2 y_N.$$

Очевидно, что  $S$  — самосопряженный в  $H_1$  оператор и

$$(Sy, y)_1 \geq c_1 \|y\|_1^2, \quad c_1 = \min(a_i, \sigma_1, \sigma_2).$$

Покажем теперь, что операторы  $T$  и  $T^*$  являются взаимно сопряженными в следующем смысле:

$$(T^*v, y) = (v, Ty)_1, \quad y \in H, \quad v \in H_1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (T^*v, y) &= -\sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) y_i - y_0 (v_{1/2} - v_0) - y_N (v_N - v_{N-1/2}) = \\ &= \sum_{i=1}^N v_{i-1/2} (y_i - y_{i-1}) + y_0 v_0 - y_N v_N = (v, Ty)_1. \end{aligned}$$

Аналогично строится разложение (63) и в случае краевых условий первого рода ( $y_0 = y_N = 0$ ). Единственное отличие со-

стоит в том, что  $H$  определяется как пространство функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль при  $i=0, i=N$ , со скалярным произведением  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ .

Оператор вида  $A = \sum_{\alpha=1}^p T_{\alpha}^* S_{\alpha} T_{\alpha}$ , очевидно, соответствует разностному оператору  $Ay = - \sum_{\alpha=1}^p (a_{\alpha} y_{x_{\alpha}})_{x_{\alpha}}$ . Для него также нетрудно получить оценки, аналогичные (64).

Мы ограничились простейшими примерами, показывающими, как надо использовать для конкретных задач априорные оценки, полученные для операторного уравнения  $Ay = \varphi$ .

**5. Коэффициентная устойчивость уравнений первого рода.** Пусть  $A$  — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства  $H$  в  $H$ . Рассмотрим операторное уравнение первого рода:

$$Au = f, f \in H. \quad (67)$$

Задача (67) называется *корректно поставленной*, если существует единственное решение уравнения (67) для любых  $f \in H$  и это решение непрерывно зависит от правой части  $f$ , так что

$$\|\tilde{u} - u\|_{(1)} \leq M_0 \|\tilde{f} - f\|_{(2)}, \quad (68)$$

где  $\tilde{u}$  — решение уравнения (67) с возмущенной правой частью  $\tilde{f}$ :

$$A\tilde{u} = \tilde{f}, \quad (69)$$

$\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторые нормы на множестве  $H$ .

При постановке задачи (67) задается не только правая часть, но и оператор  $A$ . Если, например,  $A$  — дифференциальный или разностный оператор, то должны быть заданы коэффициенты уравнения.

Естественно требовать, чтобы решение задачи (67) непрерывно зависело не только от возмущения правой части, но и от возмущения оператора  $A$  задачи (например, от коэффициентов разностного оператора). Это требование, возникшее при изучении разностных схем, было названо в работе А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1] свойством *коэффициентной устойчивости* или *ко-устойчивости*.

Устойчивость решения уравнения (67) относительно возмущения правой части  $f$  и возмущения оператора  $A$  будем называть *сильной устойчивостью*.

Вопрос ставится так: даны две задачи

$$\begin{aligned} Au &= f, \\ \tilde{A}\tilde{u} &= \tilde{f}, \end{aligned} \quad (70)$$

где  $A$  и  $\tilde{A}$  — линейные операторы, область определения которых совпадает с  $H$ ,  $f$  и  $\tilde{f}$  — произвольные векторы из  $H$ . Требуется найти оценку для величины возмущения решения

$$z = \tilde{u} - u \quad (71)$$

через величины возмущений  $\tilde{f}$  и  $A$ .

Предположим, что операторы  $A^{-1}$  и  $\tilde{A}^{-1}$  существуют. Будем считать, кроме того, что  $A$  и  $\tilde{A}$  — самосопряженные положительные операторы. Подставим  $u = A^{-1}f$  и  $\tilde{u} = \tilde{A}^{-1}\tilde{f}$  в (71):

$$z = \tilde{A}^{-1}\tilde{f} - A^{-1}f = \tilde{A}^{-1}(\tilde{f} - f) + (\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f. \quad (72)$$

Применим  $\tilde{A}^{1/2}$  к обеим частям равенства (72):

$$\tilde{A}^{1/2}z = \tilde{A}^{-1/2}(\tilde{f} - f) + \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f. \quad (73)$$

Вектор  $z$  будем оценивать в норме  $\|z\|_{\tilde{A}} = \sqrt{(\tilde{A}z, z)}$  пространства  $H_{\tilde{A}}$ , а  $f$  и  $\tilde{f} - f$  — в негативной норме  $\|f\|_{\tilde{A}^{-1}} = \sqrt{(\tilde{A}^{-1}f, f)}$  энергетического пространства  $H_{\tilde{A}^{-1}}$ .

Преобразуем выражение

$$\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f = (E - \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2})(\tilde{A}^{-1/2}f)$$

и оценим его по норме

$$\|\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{-1} - A^{-1})f\| \leq \|E - \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}\| \|\tilde{A}^{-1/2}f\|. \quad (74)$$

В качестве меры возмущения оператора  $A$  возьмем относительное изменение энергии  $(Ax, x)$  оператора  $A$ , т. е. будем предполагать, что

$$|((\tilde{A} - A)x, x)| \leq \alpha(Ax, x) \quad (75)$$

для всех  $x \in H$ .

Отсюда следуют неравенства

$$(1 - \alpha)A \leq \tilde{A} \leq (1 + \alpha)A, \quad (76)$$

$$(1 - \alpha)\tilde{A}^{-1} \leq A^{-1} \leq (1 + \alpha)\tilde{A}^{-1}. \quad (77)$$

Покажем, что из (76) следует (77).

Рассмотрим разность  $J = (1 + \alpha)(Ax, x) - (\tilde{A}x, x)$  и положим  $A^{1/2}x = y$ :

$$J = (1 + \alpha)\|y\|^2 - (A^{-1/2}\tilde{A}A^{-1/2}y, y) = (1 + \alpha)\|y\|^2 - (Dy, y),$$

где  $D = A^{-1/2}\tilde{A}A^{-1/2}$ . Положим  $D^{1/2}y = z$ :

$$\begin{aligned} J &= (1 + \alpha)(D^{-1}z, z) - \|z\|^2 = (1 + \alpha)(A^{1/2}\tilde{A}^{-1}A^{1/2}z, z) - \|z\|^2 = \\ &= (1 + \alpha)(\tilde{A}^{-1}v, v) - (A^{-1}v, v), \quad v = A^{1/2}z. \end{aligned}$$

Так как  $J \geq 0$ , то  $(1 + \alpha)\bar{A}^{-1} \geq A^{-1}$ . Тем самым доказано, что из неравенства  $\bar{A} \leq (1 + \alpha)A$  следует неравенство  $A^{-1} \leq \leq (1 + \alpha)\bar{A}^{-1}$  для любых  $A = A^* > 0$ ,  $\bar{A} = \bar{A}^* > 0$ . Неравенства (77) эквивалентны неравенствам

$$(1 - \alpha)E \leq C \leq (1 + \alpha)E, \quad C = \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}.$$

В самом деле,

$$(1 + \alpha)(\tilde{A}^{-1}x, x) - (A^{-1}x, x) = (1 + \alpha)\|y\|^2 - (\tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}y, y) = \\ = (1 + \alpha)\|y\|^2 - (Cy, y) \geq 0.$$

Итак, из (74) следует

$$-aE \leq E - C \leq aE, \quad C = \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}.$$

По определению нормы самосопряженного оператора

$$\|E - C\| = \|E - \tilde{A}^{1/2}A^{-1}\tilde{A}^{1/2}\| \leq a.$$

Подставляя эту оценку в (74), получаем из (72):

$$\|z\|_{\bar{A}} \leq \|\tilde{f} - f\|_{\bar{A}^{-1}} + \alpha\|f\|_{\bar{A}^{-1}},$$

или

$$\|\tilde{u} - u\|_{\bar{A}} \leq \|\tilde{f} - f\|_{\bar{A}^{-1}} + \alpha\|f\|_{\bar{A}^{-1}}.$$

Пусть известен некоторый оператор  $A_0 = A_0^* > 0$ , имеющий более простую структуру, чем  $\bar{A}$ , и удовлетворяющий условию

$$\bar{A} \geq c_1 A_0, \quad c_1 > 0.$$

Тогда, если оператор  $A_0^{-1}$  существует, то

$$\bar{A}^{-1} \leq \frac{1}{c_1} A_0^{-1}, \quad \|f\|_{\bar{A}^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \|f\|_{A_0^{-1}}.$$

Таким образом доказана следующая теорема сравнения:

**Теорема 2.** Пусть  $u$  — решение уравнения (67),  $\tilde{u}$  — решение уравнения (70),  $A$ ,  $\bar{A}$ ,  $A_0$  — самосопряженные положительные операторы, имеющие обратные. Тогда, если выполнены условия (75) и неравенство  $\bar{A} \geq c_1 A_0$ ,  $c_1 > 0$ , то справедливы оценки

$$\|\tilde{u} - u\|_{\bar{A}} \leq \|\tilde{f} - f\|_{\bar{A}^{-1}} + \alpha\|f\|_{\bar{A}^{-1}}, \quad (78)$$

$$\|\tilde{u} - u\|_{A_0} \leq \frac{1}{c_1} \|\tilde{f} - f\|_{A_0^{-1}} + \frac{\alpha}{c_1} \|f\|_{A_0^{-1}}. \quad (79)$$

Первое слагаемое в правой части (78) есть величина возмущения правой части  $\tilde{f}$ , второе слагаемое содержит коэффициент  $\alpha$  — величину относительного возмущения оператора.

Пример. Пусть  $H$  — множество сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$  и обращающихся в нуль при  $i = 0, i = N$ . Рассмотрим разностные операторы

$$Ay = - (ay_x)_x + dy, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0,$$

$$\tilde{A}y = - (\tilde{a}y_x)_x + \tilde{d}y, \quad \tilde{a} \geq c_1 > 0, \quad \tilde{d} \geq 0,$$

$$A_0y = -y_{xx}.$$

Вводя обычным образом скалярное произведение и используя разностные формулы Грина, получим неравенства

$$\tilde{A} \geq c_1 A_0, \quad A \geq c_1 A_0.$$

Согласно лемме 2, имеем

$$\|f\|_{A_0^{-1}} \leq \|f\|_{(-2)} = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h \left( \sum_{k=i}^{N-1} hf_k \right)^2 \right)^{1/2}, \quad f \in H.$$

Таким образом, оценка (79) принимает вид

$$\|z_x\| \leq \frac{1}{c_1} \|\tilde{f} - f\|_{(-2)} + \frac{\alpha}{c_1} \|f\|_{(-2)},$$

или, в силу неравенства  $\|z\|_C \leq 0,5 \|z_x\|$ ,

$$\|z\|_C = \|\tilde{y} - y\|_C \leq \frac{1}{2c_1} \|\tilde{f} - f\|_{(-2)} + \frac{\alpha}{2c_1} \|f\|_{(-2)}.$$

Выясним, что означает условие (75). Его можно записать в виде

$$(1 - \alpha) \left( (a, y_x^2] + (d, y^2) \right) \leq (\tilde{a}, y_x^2] + (\tilde{d}, y^2) \leq (1 + \alpha) \left( (a, y_x^2] + (d, y^2) \right),$$

откуда следует, что (75) будет выполнено, если потребовать

$$|\tilde{a} - a| \leq \alpha a, \quad |d - \tilde{d}| \leq \alpha d.$$

## § 2. Операторно-разностные схемы

**1. Введение.** В § 1 краевые задачи для дифференциальных уравнений  $Lu = -f(x)$  мы трактовали как операторные уравнения  $\mathcal{A}u = f$ , где  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, заданный в банаховом пространстве  $\mathcal{B}$ .

При изучении нестационарных процессов, описываемых уравнениями в частных производных параболического и гиперболического типов

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < t \leq t_0$$

переменная  $t$  (время) играет особую роль и поэтому должна быть выделена. Здесь  $L$  — дифференциальный оператор, действующий на  $u(x, t)$  как функцию  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  — точки  $p$ -мерной области  $G$ . Функция  $u(x, t)$  при каждом фиксированном  $t$  является элементом банахова пространства  $\mathcal{B}$ . Поэтому вместо  $u(x, t)$  мы получаем абстрактную функцию  $u(t)$  переменного  $t$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , со значениями в  $\mathcal{B}$ , т. е.  $u(t) \in \mathcal{B}$  для всех  $t \in [0, t_0]$ . Оператор  $L$ , действующий на  $u(x, t)$  как функцию  $x$ , заменяется оператором  $\mathcal{A}$ , заданным в  $\mathcal{B}$ . Оператор  $\mathcal{A}$ , вообще говоря, действует из некоторого пространства  $\mathcal{B}_1$  в некоторое пространство  $\mathcal{B}_2$  (область его определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}_1$  является всюду плотной в  $\mathcal{B}_1$ , а область его значений  $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}_2$ ). Мы будем считать здесь, что  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ . В результате приходим к абстрактной задаче Коши

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(0) = u_0,$$

где  $u_0$  — заданный элемент из  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Эти рассуждения носят лишь эвристический характер и имеют целью провести аналогию между методами общей теории дифференциальных уравнений и общей теории разностных схем, которая излагается в этой главе и в главе VI.

Задача Коши называется *устойчивой по начальным данным и по правой части*, если

$$\|u(t)\| \leq M_1 \|u_0\| + M_2 \int_0^t \|f(t')\| dt',$$

где  $M_1 = \text{const} > 0$ ,  $M_2 = \text{const} > 0$ .

В силу принципа суперпозиции ( $\mathcal{A}$  — линейный оператор) устойчивость задачи Коши по правой части следует из равномерной устойчивости по начальным данным

$$\|u(t)\| \leq M_1 \|u(t')\|, \quad t \geq t' \geq 0,$$

где  $u(t)$  — решение однородного уравнения.

**2. Операторно-разностные схемы.** По аналогии с § 1 рассмотрим линейную систему  $\mathcal{B}_h$ , зависящую от параметра  $h$ , являющегося вектором некоторого нормированного пространства с нормой  $|\cdot|_h$ . На линейной системе  $\mathcal{B}_h$  можно ввести ряд норм  $\|\cdot\|_h, \|\cdot\|_{(1h)}, \|\cdot\|_{(2h)}, \dots$ . При этом мы получим линейные нормированные пространства  $\mathcal{B}_h, \mathcal{B}_h^{(1)}, \mathcal{B}_h^{(2)}, \dots$ . Условимся в дальнейшем для упрощения изложения говорить о нормах  $\|\cdot\|_{(1h)}, \|\cdot\|_{(2h)}, \dots$  в пространстве  $\mathcal{B}_h$ , считая  $\|\cdot\|_h$  основной нормой в  $\mathcal{B}_h$ .

На отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  введем равномерную с шагом  $\tau$  сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = t_0/j_0\}$ ,  $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, 0 \leq j < j_0\}$ .

Будем рассматривать абстрактные функции  $y_{h\tau}(t), \varphi_{h\tau}(t)$  и т. д. дискретного аргумента  $t = j\tau \in \bar{\omega}_\tau$  со значениями в  $\mathcal{B}_h$ , так что  $y_{h\tau}(t) \in \mathcal{B}_h$  для всех  $t = j\tau \in \bar{\omega}_\tau$ . Пусть  $A_{h\tau}(t), B_{h\tau}(t), C_{h\tau}(t)$  и т. д. — линейные операторы, зависящие от параметров  $h, \tau$  и действующие из  $\mathcal{B}_h$  в  $\mathcal{B}_h$  при каждом  $t \in \bar{\omega}_\tau$ . В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, индексы  $h$  и  $\tau$  будем опускать и писать

$$y_n = y(n\tau) = y(t_n) = y, \quad A(t), B(t), C(t).$$

Семейство разностных уравнений  $(r-1)$ -го порядка

$$B_0(t_n) y_{n+1} = \sum_{s=1}^{r-1} C_s(t_n) y_{n+1-s} + f_n, \quad n = r-1, r, r+1, \dots,$$

зависящих от параметров  $h$  и  $\tau$ , с операторными коэффициентами  $B_0, C_1, \dots, C_{r-1}$  (которые являются линейными операторами, заданными на  $\mathcal{B}_h$  и зависят от  $h$  и  $\tau$ ) будем называть  $r$ -слойной операторно-разностной схемой или просто  $r$ -слойной схемой. Если существует оператор  $B_0^{-1}$ , то решение  $y_{n+1}$  этой задачи может быть выражено через начальные векторы  $y_0, y_1, \dots, y_{r-2}$  и правую часть  $f$ . Мы предполагаем, как всегда, что векторы  $y_0, y_1, \dots, y_{r-2}$  заданы.

Мы будем рассматривать только двухслойные и трехслойные схемы

$$B_0 y_{n+1} + B_1 y_n = \tau \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \text{ задан } y_0, \quad (1)$$

$$B_0 y_{n+1} + B_1 y_n + B_2 y_{n-1} = \tau \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ заданы } y_0 \text{ и } y_1. \quad (2)$$

**3. Каноническая форма двухслойных схем.** Любую двухслойную схему (1) можно записать в виде

$$B(t_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(t_n) y_n = \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \text{ задан } y_0 \in \mathcal{B}_h. \quad (3)$$

В самом деле, сравнивая (1) с (3), видим, что  $B = B_0, A = (B_0 + B_1)/\tau$ . Будем пользоваться обозначениями

$$y = y_n = y(t_n), \quad \hat{y} = y_{n+1} = y(t_{n+1}) = y(t_n + \tau),$$

$$\check{y} = y_{n-1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\check{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}.$$

Тогда уравнение (3) можно записать так:

$$B y_t + A y = \varphi(t), \quad t = t_n = n\tau \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0 \in \mathcal{B}_h. \quad (4)$$

Будем называть уравнения (3) или (4) *канонической формой двухслойных схем*.

Уравнение (4) аналогично дифференциальному уравнению

$$\mathcal{B} \frac{du}{dt} + \mathcal{A} u = f(t).$$

Пример 1. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

в гл. III была рассмотрена двухслойная схема с весами

$$y_t = \Lambda (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma) y) + \varphi, \quad \Lambda v = (a(x, \bar{t}) v_{\bar{x}})_{\bar{x}}, \quad \bar{t} = t_n + 0,5\tau.$$

Используя тождество

$$\hat{y} = y + \tau \frac{\hat{y} - y}{\tau} = y + \tau y_t,$$

перепишем ее в виде

$$y_t - \sigma\tau\Lambda y_t - \Lambda y = \varphi.$$

Сравнивая это уравнение с (4), видим, что

$$B = E + \sigma\tau A, \quad A = -\Lambda.$$

Так записывается в каноническом виде двухслойная схема с весами.

Разрешим уравнение (4) относительно  $\hat{y} = y_{n+1}$ . Если существует оператор  $B^{-1}$ , то можно написать

$$\hat{y} = Sy + \tau\tilde{\varphi}, \quad S = E - \tau B^{-1}A, \quad \tilde{\varphi} = B^{-1}\varphi. \quad (5)$$

Оператор  $S$  называется *оператором перехода* (со слоя на слой).

**4. Канонические формы трехслойных схем.** Трехслойную схему (2) будем записывать в канонической форме

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = \varphi. \quad (6)$$

Сравнивая (6) с (2), видим, что такая запись всегда возможна, если положить

$$B = B_0 - B_2, \quad R = \frac{1}{2\tau} (B_0 + B_2), \quad A = \frac{1}{\tau} (B_0 + B_1 + B_2). \quad (7)$$

Введем обозначения

$$y_i^{\circ} = \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau}, \quad y_{ii}^{\circ} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2}$$

и наряду с (6) будем под канонической формой трехслойной схемы понимать уравнение

$$By_i^{\circ} + \tau^2 R y_{ii}^{\circ} + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t = n\tau \in \omega_{\tau}, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (8)$$

Пример 1. Рассмотрим трехслойную схему с весами

$$y_i^{\circ} + A(\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}) = \varphi. \quad (9)$$



Приведем ее к каноническому виду. Используем формулы

$$\hat{y} = y + \frac{\hat{y} - \check{y}}{2} + \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{2} = y + \tau y_i^c + \frac{\tau^2}{2} y_{ii}^c,$$

$$\check{y} = y - \frac{\hat{y} - \check{y}}{2} + \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{2} = y + \tau y_i^c + \frac{\tau^2}{2} y_{ii}^c,$$

$$\sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y} = y + (\sigma_1 - \sigma_2) \tau y_i^c + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tau^2 y_{ii}^c.$$

Подставляя это выражение в (9), запишем схему с весами в канонической форме (8), где

$$B = E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2) A, \quad R = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2) A. \quad (10)$$

Переходя от (6) или (8) к (2), получим

$$(B + 2\tau R) y_{n+1} = 2\tau(2R - A) y_n + (B - 2\tau R) y_{n-1} + 2\tau \varphi_n. \quad (11)$$

Отсюда видно, что задача (8) разрешима, если существует оператор  $(B + 2\tau R)^{-1}$ . При этом  $y_{n+1}$  выражается через  $y_n$  и  $y_{n-1}$  на двух предыдущих слоях. Поэтому требуется задание двух начальных векторов  $y_0$  и  $y_1$  (или  $y_0 = y(0)$  и  $\bar{y}_0 = y_t(0)$ ).

**5. Понятие устойчивости.** Введем понятие устойчивости для двухслойных схем. Под двухслойной схемой мы понимаем множество операторно-разностных уравнений (4), зависящих от параметров  $h$  и  $\tau$ . Операторы  $A$  и  $B$  считаем заданными на всем пространстве  $\mathcal{B}_h$ .

Будем рассматривать поэтому множество решений  $\{y_{h\tau}(t)\}$  задачи Коши (4), зависящих от входных данных  $\{\varphi_{h\tau}(t)\}$ ,  $\{y_{0h}\}$ .

Схема (4) называется *корректной* (корректно поставленной), если при всех достаточно малых  $\tau \leq \tau_0$  и  $|h| \leq h_0$

1) решение задачи (4) существует и единственно при любых начальных данных  $y_{0h} \in \mathcal{B}_h$  и правых частях  $\varphi_{h\tau}(t) \in \mathcal{B}_h$  для всех  $t \in \bar{\omega}_\tau$ ,

2) существуют такие положительные постоянные  $M_1$  и  $M_2$ , не зависящие от  $h$ ,  $\tau$  и выбора  $y_{0h}$ ,  $\varphi_{h\tau}$ , что при любых  $y_{0h} \in \mathcal{B}_h$ ,  $\varphi_{h\tau}(t) \in \mathcal{B}_h$ ,  $t \in \bar{\omega}_\tau$  для решения задачи (4) справедлива оценка

$$\|y_{h\tau}(t + \tau)\|_{(1_h)} \leq M_1 \|y_{0h}\|_{(1_h^0)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi_{h\tau}(t')\|_{(2_h)}, \quad (12)$$

где  $\|\cdot\|_{(1_h)}$ ,  $\|\cdot\|_{(1_h^0)}$  и  $\|\cdot\|_{(2_h)}$  — некоторые нормы в пространстве  $\mathcal{B}_h$ .

Неравенство (12) выражает свойство непрерывной зависимости, равномерной по  $h$  и  $\tau$ , решения задачи Коши (4) от входных данных. Это свойство и называется *устойчивостью*.

Будем называть разностную схему *абсолютно устойчивой*, если она устойчива при любых  $\tau$  и  $h$  (а не только при достаточно малых).

Аналогично вводится понятие устойчивости для трехслойной схемы. Однако при этом следует рассматривать пару векторов  $Y^{j+1} = \{y^j, y^{j+1}\}$  с нормой вида

$$\|Y^{j+1}\|_{(1h)}^2 = \|y^j + y^{j+1}\|_{(1h^*)}^2 + \|y^{j+1} - y^j\|_{(1h^{**})}^2, \quad (13)$$

где  $\|\cdot\|_{(1h^*)}$ ,  $\|\cdot\|_{(1h^{**})}$  — некоторые нормы в  $\mathcal{B}_h$ . Нормы вида (13) возникают при изучении устойчивости трехслойных схем методом энергетических неравенств (см. гл. II, § 2).

Таким образом, трехслойная схема (8) называется устойчивой, если при любых начальных данных  $y_0, y_1$  и любых правых частях  $\varphi(t)$  для ее решения справедлива оценка

$$\|Y_{h\tau}(t + \tau)\|_{(1h)} \leq M_1 \|Y_{h\tau}(\tau)\|_{(1h^0)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\varphi_{h\tau}(t')\|_{(2h)}, \quad (14)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $h, \tau$  и от выбора  $y_0, y_1, \varphi(t)$ .

Основная задача, которая стоит перед нами, заключается в следующем. Предположим, что уравнение (4) однозначно разрешимо относительно  $y_{n+1}$  при любых  $y_n$  и  $\varphi(t)$ .

Какими свойствами должны обладать операторы  $A$  и  $B$ , чтобы схема была устойчивой в смысле данного выше определения? Иными словами, надо найти достаточные условия устойчивости схемы (4) и получить априорные оценки вида (12). При этом достаточные условия должны быть удобны для практической проверки в случае конкретных разностных схем, соответствующих уравнениям математической физики.

Устойчивость разностных схем будем исследовать вне связи с аппроксимацией и сходимостью.

**6. Достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах.** Исследуем теперь в общих чертах вопрос о достаточных условиях устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах. Более детально это исследование будет проведено в гл. VI для случая, когда  $\mathcal{B}_h = H_h$  — вещественное гильбертово пространство.

Всюду предполагается, что задача Коши (4) разрешима, т. е. существует обратный оператор  $B^{-1}$ . Поэтому схему (4) можно записать в виде

$$y_{n+1} = S_n y_n + \tau f_n, \quad f_n = B_n^{-1} \varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in \mathcal{B}_h, \quad (15)$$

где

$$S_n = E - \tau B_n^{-1} A_n \quad (16)$$

— оператор перехода. Оператор  $S_n$  зависит от  $t_n = n\tau, h, \tau$ .

Пользуясь рекуррентной формулой (15), найдем

$$y_{n+1} = T_{n+1, 0} y_0 + \sum_{j=0}^n \tau T_{n+1, j+1} f_j, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} T_{n+1, j} &= S_n S_{n-1} \dots S_{j+1} S_j, \\ T_{n+1, 0} &= S_n S_{n-1} \dots S_1 S_0, \quad T_{n+1, n+1} = E. \end{aligned}$$

Оператор  $T_{n+1, j}$  называют *разрешающим оператором*.

Неравенство треугольника дает

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq \|T_{n+1, 0}\| \|y_0\|_{(1)} + \sum_{j=0}^n \tau \|T_{n+1, j+1}\| \|f_j\|_{(1)}, \quad (18)$$

где  $\|\cdot\|_{(1)}$  — любая норма в  $\mathcal{B}_h$ .

Из (18) видно, что имеет место следующая

**Теорема 1.** *Для устойчивости схемы (15) достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\|T_{n, j}\| \leq M_1 \text{ при любых } 0 \leq j \leq n \leq n_0. \quad (19)$$

При этом для решения задачи (3) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \left( \|y_0\|_{(1)} + \sum_{j=0}^n \tau \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{(1)} \right) \text{ для всех } 0 \leq n < n_0. \quad (20)$$

Заметим, что из (20) следует (12) при  $M_2 = M_1 t_0$ .

**Теорема 2.** *Для устойчивости схемы (3) достаточно, чтобы для нормы ее оператора перехода  $S_j$  выполнялась оценка*

$$\|S_j\| \leq 1 + c_0 \tau \text{ для всех } j = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad (21)$$

где  $c_0 \geq 0$  — постоянная, не зависящая от  $\tau$  и  $h$ . При условии (21) верна априорная оценка (20) с  $M_1 = e^{c_0 t_0}$ .

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что из (21) следует (19):

$$\begin{aligned} \|T_{n, j}\| &= \|S_{n-1} S_{n-2} \dots S_{j+1} S_j\| \leq \\ &\leq \|S_{n-1}\| \|S_{n-2}\| \dots \|S_{j+1}\| \|S_j\| \leq (1 + c_0 \tau)^{n-j} \leq \\ &\leq (1 + c_0 \tau)^n \leq (1 + c_0 \tau)^{n_0} \leq e^{c_0 n_0 \tau} = e^{c_0 t_0} = M_1. \end{aligned}$$

Часто высказывается утверждение: «из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части». В каком смысле следует понимать это утверждение?

Будем говорить, что схема (4) *равномерно устойчива по начальным данным*, если устойчива задача Коши

$$y_{n+1} = S_n y_n, \quad n = j, j+1, \dots, \text{ задан } y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (22)$$

при любом  $j$ , т. е.

$$\|y_n\|_{(1)} \leq M_1 \|y_j\|_{(1)} \text{ при всех } 0 \leq j < n \leq n_0, \quad (23)$$

где  $M_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $\tau$  и  $h$ .

Если выполнено условие равномерной устойчивости, то для разрешающего оператора  $T_{n,j}$  справедлива оценка (19). Следовательно, в силу теоремы 1, для решения задачи (4) выполнена оценка (20).

Таким образом, имеет место

*Теорема 3. Если схема (4) равномерно устойчива по начальным данным, то она устойчива и по правой части при условии согласования норм*

$$\|\Phi\|_{(2)} = \|B^{-1}\Phi\|_{(1)}. \quad (24)$$

При этом верна априорная оценка (20).

Заметим, что условие (21) достаточно для равномерной устойчивости по начальным данным.

Рассмотрим двухслойную схему с постоянным оператором перехода

$$y_{n+1} = Sy_n + \tau f_n, \quad f_n = B^{-1}\varphi_n, \quad n = 0, 1, \dots, \text{ задан } y_0. \quad (25)$$

*Теорема 4. Пусть двухслойная схема (4) с постоянным оператором перехода  $S$  устойчива по начальным данным с некоторой постоянной  $M_1 > 0$ . Тогда она устойчива и по правой части, причем  $\|\Phi\|_{(2)} = \|B^{-1}\Phi\|_{(1)}$ , и верна оценка (20) с той же постоянной  $M_1$ .*

*Доказательство.* Согласно теореме 1, достаточно показать, что  $\|T_{n,j}\| \leq M_1$  для любых  $0 \leq j \leq n \leq n_0$ . Так как  $S$  — постоянный оператор, то

$$T_{n,j} = S_{n-1}S_{n-2} \dots S_j = S^{n-j} = S^{\bar{n}}, \quad \bar{n} = n - j \geq 0.$$

Из устойчивости схемы (4) по начальным данным следует, что при любых  $y_0 \in H$

$$\|y_{\bar{n}}\|_{(1)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1)},$$

т. е.

$$\|S^{n-j}y_0\|_{(1)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1)},$$

и, следовательно,

$$\|S^{n-j}\| \leq M_1.$$

Сделаем выводы, необходимые для дальнейшего.

1. Если оператор перехода постоянен, то исследование устойчивости по начальным данным сводится к оценкам нормы оператора перехода.

2. Условие согласования норм для правой части и решения

$$\|\varphi\|_{(2)} = \|B^{-1}\varphi\|_{(1)}$$

является весьма жестким. Если  $\|B^{-1}\| \leq c_1$ , где  $c_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ , то  $\|\varphi\|_{(2)} \leq c_1 \|\varphi\|_{(1)}$  и вместо (20) получим оценку

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} + M_3 \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{(1)}, \quad M_3 = M_1 c_1. \quad (26)$$

В гл. VI будут получены априорные оценки, для которых условие (24) согласования норм  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  не требуется.

3. Схема (4) устойчива, если  $\|S_j\| \leq 1 + c_0 \tau$  для всех  $j = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ . При практическом использовании этого достаточного критерия устойчивости надо указать, какими свойствами должны обладать операторы  $A$  и  $B$  для того, чтобы обеспечить выполнение условия (21). Такие условия найдены в гл. VI. Они имеют вид линейных операторных неравенств для операторов  $A$  и  $B$ , заданных на гильбертовом пространстве  $H_h = \mathcal{B}_h$ .

Понятия аппроксимации, сходимости и точности для операторно-разностных схем вводятся по аналогии с § 1. Чтобы не загромождать изложение повторением формулировок, ограничимся лишь следующим замечанием. Нормы  $\|\cdot\|_{(1h)}$ ,  $\|\cdot\|_{(2h)}$ , фигурирующие в § 1, надо заменить нормами

$$\|y_{h\tau}(t_n)\|_{(1h\tau)} = \max_{0 \leq t' = n'\tau \leq t_n} \|y_{h\tau}(t_{n'})\|_{(1h)},$$

$$\|\varphi_{h\tau}(t_n)\|_{(2h\tau)} = \max_{0 \leq t' = n'\tau \leq t_n} \|\varphi_{h\tau}(t')\|_{(2h)}, \quad t_n = n\tau.$$

## Глава VI

### ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В гл. VI изучается устойчивость по начальным данным и по правой части двухслойных и трехслойных разностных схем с операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Методом энергетических неравенств получены эффективные достаточные условия устойчивости и построены соответствующие априорные оценки. Установлена также необходимость некоторых условий устойчивости.

#### § 1. Классы устойчивых двухслойных схем

**1. Постановка задачи.** При изучении устойчивости двухслойных схем будем пользоваться их канонической формой

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad t = n\tau \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

Пусть  $\mathcal{B}_h = H_h$  — вещественное пространство,  $(,)$  — скалярное произведение,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  — норма в  $H_h$ . Операторы схемы (1)  $A$  и  $B$  в общем случае зависят от  $h$ ,  $\tau$  и  $t$ . Условимся зависимость от  $t$  явно не указывать.

Наша ближайшая задача — найти достаточные условия устойчивости схемы (1) и получить априорные оценки решения задачи (1), выражающие устойчивость схемы по правой части и начальным данным.

Решение задачи (1) можно представить в виде суммы  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , где  $\bar{y}$  — решение однородного уравнения с начальным условием  $\bar{y}(0) = y(0) = y_0$ :

$$By_t + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad (1a)$$

а  $\tilde{y}$  — решение неоднородного уравнения с нулевым начальным условием:

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad y(0) = 0. \quad (1b)$$

Оценка решения задачи (1а)

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y(0)\|_{(1)} \quad (2)$$

означает, что схема (1) устойчива по начальным данным, а оценка решения задачи (1б)

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (3)$$

выражает устойчивость схемы (1) по правой части.

Мы будем также пользоваться и другим определением устойчивости схемы по правой части

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\tau}(t')\|_{(2^*)}), \quad (4)$$

где  $\varphi_{\tau}(t') = (\varphi(t') - \varphi(t' - \tau))/\tau$ . Из (2) и (3) или (4), в силу неравенства треугольника  $\|y\|_{(1)} \leq \|\bar{y}\|_{(1)} + \|\tilde{y}\|_{(1)}$ , следует априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (5)$$

или

$$\|y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|y_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_{\tau}(t')\|_{(2^*)}). \quad (6)$$

В качестве нормы  $\|\cdot\|_{(1)}$  будем пользоваться энергетическими нормами

$$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)} \text{ при } A = A^* > 0, \quad (7)$$

$$\|y\|_B = \sqrt{(By, y)} \text{ при } B = B^* > 0. \quad (8)$$

Будем говорить, что схема (1) устойчива в  $H_A$  (или  $H_B$ ), если выполнено (5) с  $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_A$  (или  $\|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_B$ ).

**2. Исходное семейство схем.** Исследование устойчивости будем проводить в некотором исходном семействе разностных схем.

Операторы  $A$  и  $B$  считаем ограниченными линейными операторами, заданными на всем пространстве  $H_h$ ,  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = H_h$ . Всюду будем предполагать, что разностная задача (1) разрешима при любых входных данных  $y_0$  и  $\varphi(t)$ , т. е. что существует ограниченный оператор  $B^{-1}$  с областью определения  $\mathcal{D}(B^{-1}) = H_h$ .

Для упрощения выкладок детальное изложение проведем в предположении, что

- 1) операторы  $A$  и  $B$  не зависят от  $t$  (постоянные операторы),
- 2) оператор  $B$  — положительный,  $B > 0$ ,
- 3)  $A$  — самосопряженный и положительный оператор,  $A = A^* > 0$ .

Условия 1) — 3) и требование разрешимости выделяют из множества всех возможных схем (1) семейство допустимых схем (*исходное семейство*).

Условие 1) может быть ослаблено, т. е. будем иногда рассматривать операторы  $A$  и  $B$ , зависящие от  $t$ ,  $A = A(t)$ ,  $B = B(t)$ .

**3. Энергетическое тождество.** Исследование устойчивости схемы (1) проведем методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на  $2\tau y_t = \hat{y} - y$ :

$$2\tau(By_t, y_t) + 2\tau(Ay, y_t) = 2\tau(\varphi, y_t). \quad (9)$$

Пользуясь формулой

$$y = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\hat{y} - y}{2} = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2} y_t, \quad (10)$$

перепишем (9) в виде

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau(\varphi, y_t). \quad (11)$$

**Лемма 1.** Пусть  $A$  — самосопряженный оператор. Тогда

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y). \quad (12)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) &= (A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, \hat{y}) - (A\hat{y}, y) - (Ay, y) = \\ &= (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y), \end{aligned}$$

так как  $(Ay, \hat{y}) = (y, A\hat{y}) = (A\hat{y}, y)$  в силу самосопряженности  $A$ .

Подставляя (12) в (11), получим энергетическое тождество для схемы (1):

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \quad (13)$$

#### 4. Устойчивость по начальным данным в $H_A$

**Теорема 1.** Если для некоторой схемы (1) из исходного семейства выполнено условие

$$B \geq 0,5\tau A, \quad (14)$$

то эта схема устойчива в  $H_A$  по начальным данным с постоянной  $M_1 = 1$ , так что для решения задачи (1а) имеет место оценка

$$\|y(t)\|_A \leq \|y_0\|_A, \quad t = n\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** При  $\varphi = 0$  тождество (13) (для (1а)) принимает вид

$$2\tau((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y).$$

В силу (14) первое слагаемое в левой части этого тождества неотрицательно. Отбрасывая указанное слагаемое, получим



неравенство

$$\|\hat{y}\|_A \leq \|y\|_A \quad (15)$$

или

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_n\|_A \leq \dots \leq \|y_0\|_A,$$

где  $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ .

Условие (14) выделяет из исходного семейства класс устойчивых в  $H_A$  схем.

Покажем, что условие (14) и необходимо для устойчивости схемы (1) в  $H_A$  по начальным данным. Для этого нам понадобится следующая лемма.

*Лемма 2. Пусть  $C > 0$  — оператор в  $H$ , имеющий ограниченный обратный. Тогда эквивалентны следующие условия:*

$$\|E - \tau C\| \leq 1, \quad (16)$$

$$C^{-1} \geq 0,5\tau E. \quad (17)$$

В самом деле, пусть выполнено (16), т. е.  $\|(E - \tau C)x\|^2 \leq \|x\|^2$  или

$$\|x\|^2 - 2\tau(Cx, x) + \tau^2\|Cx\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Тогда  $\tau\|Cx\|^2 \leq 2(Cx, x)$ . Полагая  $Cx = y$ ,  $x = C^{-1}y$ , получим

$$(C^{-1}y, y) \geq 0,5\tau\|y\|^2$$

или  $C^{-1} \geq 0,5\tau E$ . Обратный ход рассуждений очевиден.

*Теорема 2. Пусть схема (1) принадлежит исходному семейству схем и, кроме того, оператор  $A$  — положительно определенный. Тогда условие (14) необходимо для устойчивости схемы (1) по начальным данным в  $H_A$  с постоянной  $M_1 = 1$ .*

*Доказательство.* Сведем сначала схему (1a) к явной схеме

$$x_{n+1} = Sx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где  $S = E - \tau C$ ,  $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ ,  $x_n = A^{1/2}y_n$ .

Перепишем (1a) в виде  $y_{n+1} = y_n - \tau B^{-1}Ay_n$ . Так как  $A$  — самосопряженный положительно определенный оператор, то существуют операторы  $A^{-1}$ ,  $A^{1/2}$ ,  $A^{-1/2}$  (см. теоремы 3 и 4 из гл. I, § 3), которые также являются самосопряженными положительными операторами. Поэтому уравнение (1a) эквивалентно уравнению

$$A^{1/2}y_{n+1} = A^{1/2}y_n - \tau(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2})A^{1/2}y_n,$$

которое совпадает с (18).

Устойчивость схемы (18) в  $H$  эквивалентна устойчивости в  $H_A$  схемы (1a), так как  $\|x_n\| = \|A^{1/2}y_n\| = \|y_n\|_A$ .

Пусть схема (1а) устойчива в  $H_A$  с  $M_1 = 1$ , т. е. выполнено (15). Тогда для схемы (18) выполнено неравенство  $\|x_n\| \leq \|x_0\|$  и, в частности, при  $n = 1$  имеем

$$\|x_1\| = \|Sx_0\| \leq \|x_0\|, \text{ т. е. } \|S\| \leq 1.$$

Применяя лемму 2, получим неравенство (17) с  $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ . Покажем теперь, что неравенство (17), где  $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$  эквивалентно неравенству (14). Так как  $C^{-1} = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ , то

$$\begin{aligned} (C^{-1}x, x) &= (A^{-1/2}BA^{-1/2}x, x) = (B(A^{-1/2}x), A^{-1/2}x) = \\ &= (By, y), \|x\|^2 = \|A^{1/2}y\|^2 = (Ay, y), \end{aligned}$$

где  $y = A^{-1/2}x$ ,  $x = A^{1/2}y$ .

Это и завершает доказательство теоремы.

Объединяя теоремы 1 и 2, видим, что верна

**Теорема 3.** Пусть схема (1), где  $A$  — положительно определенный оператор, принадлежит исходному семейству схем. Тогда условие (14) необходимо и достаточно для ее устойчивости по начальным данным в  $H_A$  с постоянной  $M_1 = 1$ .

Напомним, что оператор  $B$  является, вообще говоря, несамосопряженным.

**5. Устойчивость по начальным данным в  $H_B$ .** Напишем второе энергетическое тождество для схемы (1а), предполагая, что и  $B$  — самосопряженный оператор,  $B = B^* > 0$ . Умножим скалярно (1а) на  $2\tau\hat{y}$ :

$$2\tau(By_t, \hat{y}) + 2\tau(Ay, \hat{y}) = 0. \quad (19)$$

Учитывая формулы

$$\hat{y} = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) + \frac{\tau}{2}y_t, \quad y = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{2}y_t$$

и пользуясь леммой 1, найдем

$$2\tau(By_t, \hat{y}) = (B(\hat{y} - y), \hat{y} + y) + \tau^2(By_t, y_t) = \|\hat{y}\|_B^2 - \|y\|_B^2 + \tau^2\|y_t\|_B^2,$$

$$2\tau(Ay, \hat{y}) = \frac{\tau}{2}(A(\hat{y} + y - \tau y_t), \hat{y} + y + \tau y_t) = \frac{\tau}{2}\|\hat{y} + y\|_A^2 - \frac{\tau^3}{2}\|y_t\|_A^2.$$

После подстановки этих выражений в (19) получим

$$\|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2(\|y_t\|_B^2 - 0,5\tau\|y_t\|_A^2) + 0,5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 = \|y\|_B^2. \quad (20)$$

**Теорема 4.** Пусть в схеме (1) операторы  $A$  и  $B$  не зависят от  $t$ ,  $A^* = A > 0$ ,  $B^* = B > 0$ . Тогда условие (14) достаточно для устойчивости схемы (1) по начальным данным в  $H_B$  с  $M_1 = 1$ .

В самом деле, пусть  $B \geq 0,5\tau A$ . Тогда

$$\|y_t\|_B^2 - 0,5\tau \|y_t\|_A^2 = ((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) \geq 0$$

и (20) дает  $\|\dot{y}\|_B \leq \|y\|_B$ , т. е.  $\|y(t)\|_B \leq \|y(0)\|_B$ .

**6. Необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным.** При изучении вопроса о необходимых и достаточных условиях устойчивости двухслойной схемы эффективным оказался метод сведения неявной схемы к явной схеме с последующей оценкой нормы оператора перехода явной схемы. Простейший пример применения этого метода с постоянной  $M_1 = 1$  был рассмотрен в п. 4.

Нам теперь понадобится несколько отличное от прежнего определение устойчивости двухслойной схемы по начальным данным. Везде в этом пункте будем предполагать, что операторы  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  существуют, ограничены и  $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{D}(B^{-1}) = H$  (о достаточных условиях существования обратного оператора см. в гл. I, § 3, п. 2).

Пусть  $D = D^* > 0$  — постоянный оператор. Будем говорить, что схема (1)  $\rho$ -устойчива в  $H_D$  по начальным данным, если для решения задачи (1a) при любых  $y_0 \in H$  выполнено неравенство

$$\|y_n\|_D \leq \rho^n \|y_0\|_D,$$

где  $\rho = e^{c_0\tau}$ ,  $c_0$  — постоянная, не зависящая от  $h$ ,  $\tau$  и от выбора  $y_0$ . Если схема (1a)  $\rho$ -устойчива в  $H_D$ , то она устойчива в  $H_D$ :

$$\|y_n\|_D \leq M_1 \|y_0\|_D$$

с постоянной  $M_1 = e^{c_0\tau}$  при  $c_0 \geq 0$ ,  $M_1 = 1$  при  $c_0 \leq 0$ .

Двухслойную неявную схему (1) с постоянными операторами  $A$  и  $B$  можно при помощи простых преобразований свести к явной схеме, которую запишем в форме

$$x_{n+1} = Sx_n + \tau\bar{\varphi}_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x(0) = x_0, \quad S = E - \tau C, \quad (21)$$

где  $S$  — оператор перехода (со слоя на слой).

Возможны три варианта преобразования:

1) Если  $A = A^* > 0$ ,  $B > 0$ , то полагаем

$$x_n = A^{1/2}y_n, \quad C = C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}, \quad \bar{\varphi}_n = A^{1/2}B^{-1}\varphi_n. \quad (22)$$

2) Если  $B = B^* > 0$ ,  $A > 0$ , то

$$x_n = B^{1/2}y_n, \quad C = C_2 = B^{-1/2}AB^{-1/2}, \quad \bar{\varphi}_n = B^{-1/2}\varphi_n. \quad (23)$$

3) Если  $A$  и  $B$  перестановочны, то

$$x_n = y_n, \quad \bar{\varphi}_n = B^{-1}\varphi_n, \quad C = C_1 \text{ при } A = A^* > 0, \quad B > 0,$$

$$x_n = y_n, \quad \bar{\varphi}_n = B^{-1}\varphi_n, \quad C = C_2 \text{ при } A > 0, \quad B = B^* > 0.$$

В самом деле, запишем схему (1) в виде

$$y_{n+1} = y_n - \tau B^{-1} A y_n + \tau B^{-1} \varphi_n. \quad (24)$$

Если  $A = A^* > 0$ , то существует корень  $A^{1/2} = (A^{1/2})^* > 0$  из оператора  $A$ . Действуя на уравнение (24) оператором  $A^{1/2}$  и полагая  $A^{1/2} y_n = x_n$ ,  $y_n = A^{-1/2} x_n$ , получаем схему (21) с условиями (22). Аналогично, в случае  $B = B^* > 0$  действуем на (24) оператором  $B^{1/2}$  и вводим обозначения (23).

Если операторы  $A$  и  $B$  перестановочны, то

$$B^{-1} A = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} = C_1 \text{ при } A = A^* > 0,$$

$$B^{-1} A = B^{-1/2} A B^{-1/2} = C_2 \text{ при } B = B^* > 0.$$

Таким образом, мы убедились, что в ряде случаев неявная схема (1) сводится к явной схеме. Из (22) видно, что  $\|x_n\| = \|y_n\|_A$ , а из (23) следует  $\|x_n\| = \|y_n\|_B$ . Поэтому исследование устойчивости в  $H_A$  или  $H_B$  неявной схемы сводится к исследованию устойчивости явной схемы в  $H$ . При изучении устойчивости по начальным данным рассматриваем задачу:

$$x_{n+1} = S x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad S = E - \tau C. \quad (25)$$

Отсюда непосредственно следует

$$x_n = S^n x_0, \quad \|x_n\| \leq \|S^n\| \|x_0\|.$$

Это неравенство соответствует оценке

$$\|y_n\|_D \leq \|S^n\| \|y_0\|_D,$$

где  $x_n = D^{1/2} y_n$ ,  $D$  — один из операторов  $A$ ,  $B$  или  $E$ .

Вопрос ставится так: какими свойствами должен обладать оператор  $C$ , чтобы выполнялось условие

$$\|S^n\| \leq \rho^n \text{ при любых } n = 1, 2, \dots$$

(условие  $\rho$ -устойчивости схемы (1а))?

Рассмотрим здесь случай самосопряженного оператора  $C$ . Случай  $C \neq C^*$  при  $\rho = 1$  был рассмотрен в п. 4.

Будем пользоваться следующим определением нормы оператора  $S = S^*$ :

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)| = \sup_{\|x\|=1} |((E - \tau C)x, x)|, \quad C = C^*. \quad (26)$$

В силу леммы 3 из гл. I, § 3  $\|S^n\| = \|S\|^n$  и из условия  $\|S^n\| \leq \rho^n$  следует  $\|S\| \leq \rho$ . Определение (26) дает:

$$-\|S\|E \leq \tau C - E \leq \|S\|E$$

и, следовательно,  $-\rho E \leq \tau C - E \leq \rho E$  (так как  $\|S\| \leq \rho$ ), или

$$\frac{1-\rho}{\tau} E \leq C \leq \frac{1+\rho}{\tau} E. \quad (27)$$

Лемма 3. Если  $C = C^*$ ,  $\tau > 0$ , то условия (27) и

$$\|S\| \leq \rho \quad (28)$$

эквивалентны.

Мы убедились в том, что из (28) следует (27). Обратный ход рассуждений очевиден.

Обратимся к неявной схеме (1а).

Лемма 4. Если  $A = A^*$ ,  $B = B^* > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\rho > 0$ , то условия (27) и

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B \quad (29)$$

равносильны при  $C = C_2 = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ . Если же, кроме того,  $A$  — положительно определенный оператор, то (27) и (29) равносильны при  $C = C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ .

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из тождеств

$$\begin{aligned} (C_2x, x) &= (B^{-1/2}AB^{-1/2}x, x) = (Ay, y), \\ (Ex, x) &= \|x\|^2 = (B^{1/2}y, B^{1/2}y) = (By, y), \end{aligned}$$

где  $y = B^{-1/2}x$ . Для доказательства второго утверждения заметим, что если  $C$  — самосопряженный неотрицательный оператор и  $C^{-1}$  существует, то неравенства  $C \geq \alpha E$  и  $E \geq \alpha C^{-1}$  эквивалентны. Действительно, обозначив  $C^{1/2}x = y$ , запишем неравенство  $(Cx, x) \geq \alpha \|x\|^2$  в виде

$$\|y\|^2 \geq \alpha \|C^{-1/2}y\|^2 = \alpha (C^{-1}y, y),$$

т. е.  $E \geq \alpha C^{-1}$ .

Таким образом, если  $C^{-1}$  существует, то условия (27) эквивалентны следующим:

$$\frac{1-\rho}{\tau} C^{-1} \leq E \leq \frac{1+\rho}{\tau} C^{-1}.$$

Положив здесь  $C = C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ , имеем

$$\frac{1-\rho}{\tau} (BA^{-1/2}x, A^{-1/2}x) \leq \|x\|^2 \leq \frac{1+\rho}{\tau} (BA^{-1/2}x, A^{-1/2}x).$$

Обозначив  $A^{-1/2}x = y$ , получим отсюда

$$\frac{1-\rho}{\tau} (By, y) \leq (Ay, y) \leq \frac{1+\rho}{\tau} (By, y),$$

что и требовалось.

Теорема 5. Пусть  $A$  и  $B$  — постоянные операторы и

$$A = A^*, \quad B = B^* > 0.$$

Тогда условия

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B, \quad \rho = e^{c_0 \tau}$$

необходимы и достаточны для  $\rho$ -устойчивости в  $H_B$  схемы (1а):

$$\|y_n\|_B \leq \rho^n \|y_0\|_B,$$

а если, кроме того,  $A$  — положительно определенный оператор, то и для  $\rho$ -устойчивости в  $H_A$ :

$$\|y_n\|_A \leq \rho^n \|y_0\|_A.$$

Для доказательства теоремы достаточно свести схему (1а) к явной схеме (25) (случай  $C = C_2$  или  $C = C_1$ ) и затем воспользоваться леммами 3 и 4.

Отметим, что необходимые и достаточные условия устойчивости в данном случае совпадают. Энергетический метод не позволяет получить такой результат. Более того, энергетическим методом удастся доказать устойчивость (25) или (1а) при  $\rho > 1$  только при достаточно малом  $\tau \leq \tau_0(c_0)$ .

**7. Метод разделения переменных.** Пусть  $H$  — конечномерное (скажем,  $N$ -мерное) пространство. Если  $A$  и  $B$  — постоянные и самосопряженные операторы,

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad (30)$$

то исследование устойчивости может быть проведено методом разделения переменных по аналогии с гл. II, § 1.

Пусть  $\lambda_k$  — собственные значения,  $\mu_k$  — собственные функции следующей задачи (см., например, Ф. Р. Гантмахер [1]):

$$A\mu_k = \lambda_k B\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

причем  $(B\mu_k, \mu_m) = \delta_{km}$ .

Решение задачи (1а) будем искать в виде суммы

$$y(t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \mu_k.$$

Подставляя это выражение в (1а) и учитывая (31), получаем

$$\frac{c_k(t+\tau) - c_k(t)}{\tau} + \lambda_k c_k(t) = 0, \quad c_k(t+\tau) = (1 - \lambda_k \tau) c_k(t).$$

Замечая, что  $\|yt\|_A^2 = \sum_{k=1}^N c_k^2(t) \lambda_k$ , будем иметь

$$\|y(t+\tau)\|_A^2 = \sum_{k=1}^N c_k^2(t+\tau) \lambda_k \leq \max_k (1 - \lambda_k \tau)^2 \sum_{k=1}^N c_k^2(t) \lambda_k,$$

или

$$\|y(t+\tau)\|_A \leq \max_k |1 - \tau \lambda_k| \|y(t)\|_A.$$

Требование устойчивости с постоянной  $M_1 = 1$  будет выполнено, если  $\max_k |1 - \lambda_k \tau| \leq 1$  или

$$0 < \lambda_k \leq 2/\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Условия (32) эквивалентны энергетическому неравенству  $0 < A \leq 2B/\tau$  или

$$(By, y) \geq 0,5\tau(Ay, y) \text{ для всех } y \in H.$$

В самом деле,

$$By - 0,5\tau Ay = \sum_{k=1}^N c_k(t) (B\mu_k - 0,5\tau A\mu_k) = \sum_{k=1}^N c_k(t) (1 - 0,5\tau\lambda_k) B\mu_k,$$

$$(By, y) - 0,5\tau (Ay, y) = \sum_{k=1}^N c_k^2(t) (1 - 0,5\tau\lambda_k) \geq 0.$$

Отсюда и следует эквивалентность неравенства  $B \geq 0,5\tau A$  условиям (32).

Таким образом, мы показали, что при условиях (30) неравенство

$$B \geq 0,5\tau A \quad (33)$$

достаточно для устойчивости в  $H_A$  схемы (1а):

$$\|y(t)\|_A \leq \|y(0)\|_A.$$

Следует подчеркнуть, что требование самосопряженности оператора  $B$  является здесь обязательным, в то время как для применения энергетического метода достаточно лишь положительности оператора  $B$ .

Аналогично доказывается устойчивость схемы (1а) в  $H_B$ , если выполнены условия (30), (33).

Нетрудно показать, что условия

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B$$

обеспечивают  $\rho$ -устойчивость схемы (1а):

$$\|y(t_n)\|_D \leq \rho^n \|y(0)\|_D, \quad D = A \text{ или } D = B.$$

Для этого достаточно потребовать

$$-\rho \leq \lambda_k \tau - 1 \leq \rho.$$

Прежде чем применять метод разделения переменных, можно свести схему (1а) к явной схеме  $x_{n+1} = Sx_n$ ,  $S = E - \tau C$ ,  $C = C_1$  или  $C = C_2$ . Тогда получим обычную задачу на собственные значения

$$C\omega_k = \lambda_k \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (\omega_k, \omega_m) = \delta_{km}.$$

**8. Некоторые вспомогательные неравенства.** Пусть  $g_j = g(t_j)$  и  $f_j = f(t_j)$  — сеточные функции, заданные при  $t_j = j\tau$ ,  $j = 0, 1, \dots, n_0$ .

**Лемма 5.** Пусть  $g_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  и  $f_j \geq 0$ ,  $j = 0, 1, \dots$  неотрицательные функции. Если  $f_j$  — неубывающая функция ( $f_{j+1} \geq f_j$ ), то из неравенства

$$g_{j+1} \leq c_0 \sum_{k=1}^j \tau g_k + f_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad g_1 \leq f_0, \quad c_0 = \text{const} > 0 \quad (34)$$

следует оценка

$$g_{j+1} \leq e^{c_0 t_j} f_j. \quad (35)$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , — решение системы уравнений

$$\varphi_{j+1} = c_0 \sum_{k=1}^j \tau \varphi_k + f_j, \quad j \geq 1, \quad \varphi_1 = f_0. \quad (36)$$

Нетрудно заметить, что  $g_j \leq \varphi_j$  для всех  $j > 0$ . В самом деле,

$$g_1 \leq \varphi_1, \quad g_2 \leq c_0 \tau g_1 + f_1 \leq c_0 \tau \varphi_1 + f_1 = \varphi_2 \text{ и т. д.}$$

Из (34) и (36) видно, что из неравенств  $g_k \leq \varphi_k$  при  $k \leq j$  следует  $g_{j+1} \leq \varphi_{j+1}$ . Заменим в (36)  $j$  на  $j-1$  и вычтем из (36) полученное уравнение. Тогда для  $\varphi_j$  получим разностное уравнение

$$\varphi_{j+1} = q\varphi_j + \psi_j, \quad \psi_j = f_j - f_{j-1} \geq 0, \quad q = 1 + c_0 \tau \leq e^{c_0 \tau}, \quad c_0 > 0.$$

Отсюда находим

$$\varphi_{j+1} = q^2 \varphi_{j-1} + q\psi_{j-1} + \psi_j = q^j \varphi_1 + q^{j-1} \psi_1 + \dots + q\psi_{j-1} + \psi_j.$$

Так как  $q \geq 1$  и  $\psi_j \geq 0$ , а  $\varphi_1 = f_0$ , то  $\varphi_{j+1} \leq q^j (\varphi_1 + \psi_1 + \dots + \psi_j) = q^j (\varphi_1 + f_j - f_0) = q^j f_j$  и, следовательно,  $q_{j+1} \leq \varphi_{j+1} \leq q^j f_j \leq e^{c_0 t_j} f_j$ .

Лемма доказана.

**Замечание.** Лемма 5 верна, если вместо (34) дано неравенство

$$g_{j+1} \leq (1 + c_0 \tau) g_j + \tau \varphi_j, \quad j > 0, \quad g_1 = f_0, \quad \tau \varphi_j = f_j - f_{j-1} \geq 0, \quad (37)$$

так что  $f_j = \sum_{k=0}^j \tau \varphi_k$ .

**Лемма 6.** Если  $g_j \geq 0$ ,  $f_j \geq 0$ ,  $j \geq 0$ , то из (34) следует

$$g_{j+1} \leq f_j + c_0 e^{c_0 t_j} \sum_{k=0}^{j-1} \tau f_k. \quad (38)$$



Положим  $g_{j+1} = f_j + v_{j+1}$ . Тогда из (34) получим  $v_{j+1} \leq \leq c_0 \sum_{k=1}^j \tau v_k + f_j$ ,  $f_j = c_0 \sum_{k=0}^{j-1} \tau f_k$  — неубывающая функция. Для оценки  $v_j$  пользуемся леммой 5.

Леммы 5 и 6 будут использованы при доказательстве устойчивости схемы (1) по правой части.

**9. Устойчивость по правой части.** В гл. V, § 2 была доказана теорема о том, что из устойчивости по начальным данным в норме  $\|\cdot\|_{(1)}$  следует устойчивость по правой части, взятой в норме  $\|\varphi\|_{(2)} = \|B^{-1}\varphi\|_{(1)}$ . Отсюда следует

**Теорема 6.** Если выполнено условие (14), то схема (1) из исходного семейства схем устойчива по правой части и для решения задачи (1) справедлива априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\|_A \leq \|y(0)\|_A + \sum_{t'=0}^t \tau \|B^{-1}\varphi(t')\|_A.$$

Если, кроме того, оператор  $B$  самосопряжен, то

$$\|y(t + \tau)\|_B \leq \|y(0)\|_B + \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{B^{-1}}.$$

Покажем, что, кроме того, имеют место априорные оценки (3), (4), где

$$\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|_{A^{-1}} \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|.$$

Воспользуемся энергетическим тождеством (13) для схемы (16).

**Лемма 7.** Если  $A$  — постоянный, самосопряженный и положительно определенный оператор, то для любых  $\varphi(t)$ ,  $y(t)$  из  $H$  имеет место оценка:

$$(\varphi, y_t) \leq (\varphi, \hat{y})_{\bar{t}} + \varepsilon (Ay, y) + \frac{1}{4\varepsilon} (A^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}), \quad (39)$$

где  $\varepsilon > 0$  — число.

Представим  $(\varphi, y_t)$  в виде

$$(\varphi, y_t) = (\varphi, \hat{y})_{\bar{t}} - (\varphi_{\bar{t}}, y)$$

и воспользуемся леммой 1 из гл. V, § 1 для оценки второго слагаемого. Тогда получим (39).

Подставим (39) в (13):

$$\begin{aligned} 2\tau \left( \left( B - \frac{\tau}{2} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) &\leq \\ &\leq (Ay, y) + 2\tau (\varphi, \hat{y})_{\bar{t}} + 2\tau\varepsilon \|y\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_{\bar{t}}\|_{A^{-1}}^2 \end{aligned}$$

Пусть выполнено условие  $B \geq 0,5\tau A$ . Тогда

$$(A\hat{y}, \hat{y}) \leq (Ay, y) + 2\tau(\varphi, \hat{y})_{\bar{t}} + 2\tau\varepsilon(Ay, y) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi_{\bar{t}}, \varphi_{\bar{t}}),$$

или

$$(Ay_{j+1}, y_{j+1}) \leq (Ay_j, y_j) + 2\tau(\varphi_j, y_{j+1})_{\bar{t}} + 2\tau\varepsilon(Ay_j, y_j) + \frac{\tau}{2\varepsilon}(A^{-1}\varphi_{\bar{t}, j}, \varphi_{\bar{t}, j}).$$

Просуммируем это неравенство по  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|y_1\|_A^2 + 2(\varphi_n, y_{n+1}) - 2(\varphi_0, y_1) + 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \tau \|y_j\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^n \tau \|\varphi_{\bar{t}, j}\|_{A^{-1}}^2. \quad (40)$$

При  $t=0$  член  $2\tau(\varphi, y_t)$  в (13) преобразуется иначе. Так как  $y(0) = 0$ , то

$$2\tau(\varphi, y_t) = 2(\varphi_0, y_1)$$

и энергетическое тождество (13) дает

$$\|y_1\|_A^2 \leq 2(\varphi_0, y_1), \quad (41)$$

так, что  $\|y_1\|_A \leq 2\|\varphi_0\|_{A^{-1}}$ .

Складывая (40) и (41), получаем

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \tau \|y_j\|_A^2 + 2(\varphi_n, y_{n+1}) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=1}^n \tau \|\varphi_{\bar{t}, j}\|_{A^{-1}}^2.$$

При помощи леммы 1 из гл. V, § 1, оценим

$$2(\varphi_n, y_{n+1}) \leq \varepsilon_0 \|y_{n+1}\|_A^2 + \frac{1}{\varepsilon_0} \|\varphi_n\|_{A^{-1}}^2, \quad \varepsilon_0 > 0$$

и положим  $\varepsilon_0 = 0,5$ . Тогда

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq 4\varepsilon \sum_{j=1}^n \tau \|y_j\|_A^2 + 4\|\varphi_n\|_{A^{-1}}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^n \tau \|\varphi_{\bar{t}, j}\|_{A^{-1}}^2. \quad (42)$$

Теперь нам нужна лемма 5 из п. 8. Применяя ее к (42) и выбирая  $\varepsilon$  (например,  $\varepsilon = 1$ ), получаем

$$\|y_{n+1}\|_A \leq M_2 \max_{0 < t' \leq n\tau} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}} + \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{A^{-1}}),$$

где  $M_2$  зависит только от  $t_0$ . Для оценки решения задачи (1) надо учесть (15).

Тем самым доказана

**Теорема 7.** Если выполнено условие (14) и  $A$  — положительно определенный оператор, то схема (1) из исходного

семейства схем устойчива по правой части и для решения задачи (1) при  $t > 0$  верна априорная оценка

$$\left. \begin{aligned} \|y(t + \tau)\|_A &\leq \|y_0\|_A + M_1 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}} + \|\varphi_{\tau}(t')\|_{A^{-1}}), \\ \|y(\tau)\|_A &\leq \|y(0)\|_A + 2\|\varphi(0)\|_{A^{-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

При каких условиях имеет место устойчивость в норме  $\|\varphi\|_{(2)} = \|\varphi\|$ ? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 8. Пусть выполнено условие

$$B \geq \varepsilon E + 0,5\tau A, \quad (44)$$

где  $\varepsilon$  — любое положительное число и схема (1) принадлежит исходному семейству схем. Тогда для задачи (1) верна априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\|_A \leq \|y_0\|_A + \sqrt{\frac{t_0}{2\varepsilon}} \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|. \quad (45)$$

Доказательство. Обратимся к тождеству (13). Неравенство Коши — Буняковского и  $\varepsilon$ -неравенство дают:

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\| \|y_t\| \leq 2\tau\varepsilon \|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2.$$

Подставим эту оценку в (13) и спользуем условие (44):

$$\|y\|_A^2 \leq \|y\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|^2 \quad \text{или} \quad \|y_{j+1}\|_A^2 \leq \|y_j\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_j\|^2.$$

Суммируя затем по  $j = 0, 1, \dots, n$  и учитывая, что  $y(0) = 0$ , получаем

$$\|y(t + \tau)\|_A^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2, \quad t = n\tau.$$

Отсюда и из (15) следует (45).

Теорема 8 доказана.

Замечание. Теоремы 7 и 8 сохраняют силу и в случае переменного оператора  $B = B(t)$ , а теорема 4 справедлива для переменного оператора  $A = A(t)$ . Это видно из доказательств указанных теорем.

**10. Устойчивость схемы с весами.** Покажем, как надо пользоваться доказанными выше теоремами на примере схемы с весами:

$$y_t + A(\sigma y + (1 - \sigma)y) = \varphi, \quad y(0) = y_0. \quad (46)$$

В гл. V, § 2, п. 3 схема (46) была приведена к каноническому виду

$$(E + \sigma\tau A)y_t + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0. \quad (47)$$

Сравнивая (46) с (1), видим, что

$$B = E + \sigma \tau A.$$

Пусть существует оператор  $A^{-1}$ . Действуя  $A^{-1}$  на (47), получим вторую каноническую форму для схемы с весами:

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad y(0) = y_0, \quad \tilde{B} = A^{-1} + \sigma \tau E, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi. \quad (48)$$

Записью в виде (47) будем пользоваться в случае самосопряженного оператора  $A$ , (48) — в случае несамосопряженного положительно определенного оператора  $A = A(t)$ .

Пусть  $A = A^* > 0$ . Покажем, что  $B \geq 0,5\tau A$ , если

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}. \quad (49)$$

В самом деле, так как  $0 < (Ax, x) \leq \|A\| \|x\|^2$  или  $0 < A \leq \|A\| E$ . то

$$\begin{aligned} B - 0,5\tau A &= E + (\sigma - 0,5)\tau A \geq \frac{1}{\|A\|} A + (\sigma - 0,5)\tau A = \\ &= \left( \frac{1}{\|A\|} + (\sigma - 0,5)\tau \right) A = \tau(\sigma - \sigma_0) A \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\sigma \geq \sigma_0$  схема (46) устойчива в  $H_A$  по начальным данным. В частности, для явной схемы (при  $\sigma = 0$ ) из условия  $\sigma \geq \sigma_0$  следует  $\tau \leq 2/\|A\|$ , т. е. явная схема устойчива в  $H_A$  при  $\tau \leq 2/\|A\|$ . В силу теоремы 2 это условие не только достаточно, но и необходимо для устойчивости с постоянной  $M_1 = 1$ , если  $A$  — положительно определенный оператор.

Пример 1. Рассмотрим схему с весами для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1$$

с краевыми условиями первого рода. В этом случае  $Ay = -\Delta y$ ,  $\Delta y = y_{xx}$ . Оператор  $A = A^* > 0$  (см. гл. V, § 1, п. 1), его норма  $\|A\| < 4/h^2$ . Условие (49) принимает вид

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$$

и совпадает с условием, полученным в гл. II методом разделения переменных. Явная схема ( $\sigma = 0$ ) устойчива при  $\tau \leq 0,5h^2$ . Если

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < k \leq c_2, \quad \Delta y = (a(x) y_x)_x, \quad 0 < a \leq c_2,$$

то

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4c_2\tau}$$

и  $\sigma_0 \leq 0$  при  $\tau \leq 0,5h^2/c_2$ .

**Теорема 9.** Пусть  $A = A^*$  — постоянный положительно определенный оператор. Тогда для схемы (46) при условии (49) верна априорная оценка (43). Если  $A = A^* > 0$  и

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau \|A\|}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (50)$$

где  $\varepsilon$  — постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ , то для схемы (46) верна оценка (45).

Первое утверждение следует из теоремы 7 для схемы (47), так как  $B \geq 0,5\tau A$  при  $\sigma \geq \sigma_0$ , второе утверждение — из теоремы 8, так как неравенство (44) выполняется при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} B - \varepsilon E - 0,5\tau A &= (1 - \varepsilon)E + (\sigma - 0,5)\tau A \geq \\ &\geq ((1 - \varepsilon)\|A\| + (\sigma - 0,5)\tau)A = \tau(\sigma - \sigma_\varepsilon)A \geq 0. \end{aligned}$$

**Теорема 10.** Пусть  $A(t) = A^*(t)$  — положительно определенный оператор и выполнено условие (49). Тогда для схемы (46) верна оценка

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y_0\| + M_2 \max_{0 < t' \leq t} [\|(A^{-1}\varphi)|_{t=t'}\| + \|(A^{-1}\varphi)_{\bar{t}}|_{t=t'}\|]. \quad (51)$$

Если же выполнено условие (50), то

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y_0\| + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left( \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')}^2 \right)^{1/2}. \quad (51a)$$

**Доказательство.** а) Возьмем схему с весами в форме (48) и напишем для нее априорную оценку (43), учитывая при этом, что  $\bar{A} = E$  — постоянный оператор:

$$\|y^{j+1}\|_{\bar{A}} \leq \|y_0\|_{\bar{A}} + M_2 \max_{0 < j' \leq j} [\|\tilde{\varphi}^{j'}\|_{\bar{A}^{-1}} + \|\tilde{\varphi}_{\bar{t}}^{j'}\|_{\bar{A}^{-1}}].$$

Подставляя сюда  $\tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi$ ,  $\bar{A} = \bar{A}^{-1} = E$ , получаем (51).

б) Получим неравенство (51a). По аналогии с (13) напишем для (48) энергетическое тождество (учитывая, что  $\bar{A} = E$ )

$$2\tau ((A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E)y_t, y_t) + \|\hat{y}\|^2 = \|y\|^2 + 2\tau (A^{-1}\varphi, y_t). \quad (52)$$

Обобщенное неравенство Коши — Буняковского и  $\varepsilon$ -неравенство дают:

$$2\tau (A^{-1}\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\|_{A^{-1}} \|y_t\|_{A^{-1}} \leq 2\tau\varepsilon \|y_t\|_{A^{-1}}^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|_{A^{-1}}^2. \quad (53)$$

Из условия (50) следует, что

$$\tilde{B} - 0,5\tau\tilde{A} \geq \varepsilon A^{-1}. \quad (54)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{B} - 0,5\tau\tilde{A} &= A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E = \varepsilon A^{-1} + (1 - \varepsilon)A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E \geq \\ &\geq \varepsilon E + \frac{1 - \varepsilon}{\|A\|} E + (\sigma - 0,5)\tau E = \varepsilon A^{-1} + (\sigma - \sigma_\varepsilon)\tau E \geq \varepsilon A^{-1} \end{aligned}$$

при  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ . При этом мы учли оценку

$$A^{-1} \geq \frac{1}{\|A\|} E$$

(она следует из неравенства  $\|Ax\|^2 \leq \|A\|(Ax, x)$  (см. гл. I, § 3), если положить  $Ax = y$ ,  $x = A^{-1}y$ ).

Если учесть (54), то из (52) получим

$$2\tau\varepsilon \|y_t\|_{A^{-1}}^2 + \|\hat{y}\|^2 \leq \|y\|^2 + 2\tau(A^{-1}\varphi, y_t).$$

Подставляя сюда (53), будем иметь

$$\|\hat{y}\|^2 \leq \|y\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi\|_{A^{-1}}^2$$

или  $\|y_{j+1}\|^2 \leq \|y_j\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_j\|_{A^{-1}}^2$ . Суммирование по  $j = 0, 1, \dots, n$  приводит к оценке (51) с  $t = n\tau$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $A = A(t)$  — положительно определенный несамосопряженный оператор.

Покажем, что для схемы (48)

$$\begin{aligned} \tilde{B} &\geq 0,5\tau\tilde{A} \quad \text{при } \sigma \geq 0,5, \\ \tilde{B} &\geq 0,5\tau\tilde{A} \quad \text{при } \sigma \geq \bar{\sigma}_0, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta}, \end{aligned} \quad (55)$$

если выполнено условие

$$\|Ax\|^2 \leq \Delta(Ax, x), \quad \text{где } \Delta = \text{const} > 0. \quad (56)$$

Заметим, что для самосопряженного оператора  $A$

$$\Delta = \|A\|.$$

Итак, пусть  $\sigma \geq 0,5$ . Тогда

$$\tilde{B} - 0,5\tau\tilde{A} = A^{-1} + (\sigma - 0,5)\tau E \geq A^{-1} > 0.$$

Для доказательства неравенства (55) потребуется

**Лемма 8.** Пусть  $A$  — положительно определенный оператор, для которого выполнено (56). Тогда

$$A^{-1} \geq \frac{1}{\Delta} E \quad \text{и} \quad A \leq \Delta E.$$

**Доказательство.** 1) Положим  $Ax = y$ . Тогда (56) дает  $\|y\|^2 \leq \Delta(A^{-1}y, y)$ , т. е.  $A^{-1} \geq \frac{1}{\Delta} E$ .

2) Из неравенств  $(Ax, x) \leq \|Ax\| \|x\|$  и (56) следует, что  $(Ax, x) \leq \sqrt{\Delta(Ax, x)} \|x\|$ ,  $(Ax, x) \leq \Delta \|x\|^2$ , т. е.  $A \leq \Delta E$ .

*Лемма 9.* Пусть  $A$  — положительно определенный оператор и выполнено (56). Тогда

$$\|(E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma)\tau A)\| \leq 1 \quad \text{при } \sigma \geq \bar{\sigma}_0, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta}, \quad (57)$$

$$\|(E + \sigma\tau A)^{-1}\| \leq 1 \quad \text{при } \sigma \geq 0, \quad (58)$$

$$\|(E + \sigma\tau A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{при } \sigma \geq \bar{\sigma}_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau\Delta}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (59)$$

*Доказательство.* 1) Так как  $B \geq 0,5\tau A$  при  $\sigma \geq \bar{\sigma}_0$ , то, применяя к схеме (48) теорему 1, получим, что для решения задачи (48) при любых  $y_n \in H$  и  $\varphi = 0$  справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|. \quad (60)$$

Заметим теперь, что схему (48) при  $\varphi = 0$  можно записать в виде

$$y_{n+1} = S y_n, \quad S = E - \tau \tilde{B}^{-1} \tilde{A} = (E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma)\tau A).$$

Отсюда и из (60) получаем оценку (57).

2) Для оценки  $\|B^{-1}\|$ , где  $B = E + \sigma\tau A$ , достаточно получить неравенство вида  $B \geq \delta E$ ,  $\delta > 0$ . Тогда

$$\delta \|x\|^2 \leq (Bx, x) \leq \|Bx\| \|x\|, \quad \|Bx\| \geq \delta \|x\|,$$

и, следовательно,  $\|B^{-1}\| \leq 1/\delta$ . Если  $\sigma \geq 0$ , то  $B \geq E$  и  $\|B^{-1}\| \leq 1$ . Если  $\sigma \geq \bar{\sigma}_\varepsilon$ , то

$$B \geq E + \bar{\sigma}_\varepsilon \tau A = E + 0,5\tau A - \frac{1-\varepsilon}{\Delta} A.$$

Так как, согласно лемме 8,  $A \leq \Delta E$ , то

$$B \geq E + 0,5\tau A - (1 - \varepsilon)E \geq \varepsilon E + 0,5\tau A > \varepsilon E,$$

и, следовательно,  $\|B^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$ . Отметим, что оценка (58) верна для любого несамосопряженного оператора  $A > 0$ .

Лемма доказана.

Из (60) и леммы 9 следует

*Теорема 11.* Пусть  $A = A(t)$  — положительно определенный оператор и выполнено условие (56). Тогда для схемы (46) при  $\sigma \geq \bar{\sigma}_\varepsilon$  верна априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y(0)\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|. \quad (61)$$

Если одновременно выполнены два условия

$$\sigma \geq 0, \quad \sigma \geq \bar{\sigma}_0, \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta},$$

то оценка (61) выполняется при  $\varepsilon = 1$ .

Для доказательства запишем схему (46) в виде

$$y_{n+1} = Sy_n + \tau B^{-1} \varphi_n,$$

где  $S = (E + \sigma\tau A)^{-1}(E - (1 - \sigma)\tau A)$ ,  $B = E + \sigma\tau A$ .

Используя неравенство треугольника и оценки (57)–(59), получаем

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi_n\|,$$

откуда и следует (61).

**З а м е ч а н и е.** Мы всюду предполагали, что оператор  $A$  положительно определен или, по меньшей мере, положителен. Однако можно получить некоторые априорные оценки для схемы (1) при условии, что  $A$  — полуограниченный оператор:

$$A \geq -c_*E, \quad c_* = \text{const} > 0.$$

Введем оператор

$$A' = A + c^*E, \quad c^* = \text{const} > c_*.$$

Он положительно определен:

$$A' \geq \delta E, \quad \delta = c^* - c_* > 0.$$

Перепишем схему (1) в виде

$$By_t + A'y = \varphi + c^*y = \Phi, \quad y(0) = y_0.$$

Пусть выполнены условия теоремы 8, так что

$$B \geq \varepsilon E + 0,5\tau A'.$$

Тогда верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A'}^2 \leq \|y_0\|_{A'}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{n'=0}^n \tau \|\Phi_{n'}\|^2,$$

где  $\Phi = c^*y + \varphi$  и

$$\|\Phi\|^2 \leq 2(c^*)^2 \|y\|^2 + 2\|\varphi\|^2 \leq \frac{2(c^*)^2}{\delta} \|y\|_{A'}^2 + 2\|\varphi\|^2.$$

Подставляя это неравенство в предыдущую оценку, получим

$$\|y_{n+1}\|_{A'}^2 \leq \frac{(c^*)^2}{\varepsilon\delta} \sum_{n'=0}^n \tau \|y_{n'}\|_{A'}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n'=0}^n \tau \|\Phi_{n'}\|^2 + \|y_0\|_{A'}^2,$$



или

$$g_{n+1} \leq c_0 \sum_{n'=0}^n \tau g_{n'} + f_n, \quad c_0 = \frac{(c^*)^2}{\varepsilon \delta}, \quad f_n \geq 0, \quad g_n \geq 0.$$

Так как  $f_n$  монотонно неубывающая функция, то в силу леммы 5 имеем  $g_{n+1} \leq e^{c_0 t_n} f_n$  или

$$\|y_{n+1}\|_{A'}^2 \leq e^{c_0 t_n} \|y_0\|_{A'}^2 + \frac{e^{c_0 t_n}}{\varepsilon} \sum_{n'=0}^n \tau \|\varphi_{n'}\|^2,$$

$$c_0 = (c^*)^2 / (\varepsilon \delta), \quad \delta = c^* - c_* > 0.$$

Постоянную  $c^*$  выберем так, чтобы постоянная  $c_0$  была минимальна. Из условия минимума функции  $f(x) = x^2 / (x - c_*)$  следует, что  $x = 2c_*$ ; при этом  $f(2c_*) = \min f(x) = 4c_*$  и  $c_0 = 4c_*/\varepsilon$ .

Тем самым доказана устойчивость схемы (1) в случае  $A \geq -c_* E$ . При этом важно отметить, что 1) достаточное условие устойчивости имеет вид  $B \geq \varepsilon E + 0,5\tau A'$ , 2) схема устойчива при любых  $\tau$ .

Рассмотрим, например, схему с весами. Тогда  $B = E + \sigma\tau A'$  и условие  $B \geq \varepsilon E + 0,5\tau A'$  выполнено при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{\tau \|A'\|}, \quad \|A'\| \leq \|A\| + c^*.$$

**11. Априорные оценки в случае переменного оператора  $A$ .** До сих пор мы предполагали при изучении устойчивости в  $H_A$ , что оператор  $A$  постоянный, т. е. не зависит от  $t$ . Если  $A(t) = A^*(t) > 0$  зависит от  $t$ , то будем требовать, чтобы выполнялось следующее условие липшиц-непрерывности  $A(t)$  по  $t$ :

$$|((A(t) - A(t - \tau))x, x)| \leq \tau c_3 (A(t - \tau)x, x), \quad (62)$$

для всех  $x \in H$ ,  $0 < t < n_0\tau$ , где  $c_3$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ .

Исходное семейство схем определим требованиями

$$\left. \begin{aligned} A(t) = A^*(t) > 0 \quad \text{для всех } t \in \bar{\omega}_\tau, \\ A(t) \text{ липшиц-непрерывен по } t, \\ B(t) > 0 \quad \text{для всех } t \in \bar{\omega}_\tau. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Как и ранее, предполагаем существование оператора  $B^{-1}(t)$ , что означает разрешимость задачи (1) при любых входных данных  $y_0$  и  $\varphi(t)$ .

Это семейство, очевидно, содержит исходное семейство, введенное в п. 2.

Исследования, проведенные методом энергетических неравенств, показывают, что условия

$$B(t) \geq 0,5\tau A(t) \quad \text{для всех } t \in \omega_\tau, \quad (64)$$

$$B(t) \geq \varepsilon E + 0,5\tau A(t) \quad \text{для всех } t \in \omega_\tau, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (65)$$

оказываются достаточными для устойчивости схемы (1) с переменными операторами  $A(t)$ ,  $B(t)$ . При этом сами нормы  $\|\cdot\|_A$ ,  $\|\cdot\|_{A^{-1}}$  оказываются зависящими от  $t$ :

$$\|y\|_A = \|y\|_{A(t)} = \sqrt{(A(t)y, y)}, \quad \|\varphi\|_{A^{-1}(t)} = \sqrt{(A^{-1}(t)\varphi, \varphi)}.$$

Поэтому надо говорить об устойчивости в  $H_{A(t)}$  (вместо  $H_A$ ) и  $H_{B(t)}$ .

Исходным для исследования является энергетическое тождество (13), где  $A = A(t)$ . Чтобы получить рекуррентное неравенство, преобразуем выражение

$$(Ay, y) = (A(t)y(t), y(t)) = (A(t-\tau)y(t), y(t)) + ((A(t) - A(t-\tau))y(t), y(t))$$

и оценим второе слагаемое в правой части при помощи (62):

$$(A(t)y(t), y(t)) \leq (1 + \tau c_3)(A(t-\tau)y(t), y(t)).$$

Подставив эту оценку в (13), получим энергетическое неравенство:

$$2\tau((B(t) - 0,5\tau A(t))y_t, y_t) + \mathcal{J}(t+\tau) \leq (1 + \tau c_3)\mathcal{J}(t) + 2\tau(\varphi(t), y_t), \quad (66)$$

где

$$\mathcal{J}(t+\tau) = (A(t)y(t+\tau), y(t+\tau)) = \|y(t+\tau)\|_{A(t)}^2.$$

Если выполнено условие (64), то из (66) при  $\varphi = 0$  следует:

$$\mathcal{J}(t+\tau) \leq (1 + \tau c_3)\mathcal{J}(t) \leq e^{c_3 t}\mathcal{J}(\tau) \quad \text{при } t \geq \tau. \quad (67)$$

Энергетическое тождество при  $t = 0$  записывается в виде

$$2\tau((B(0) - 0,5\tau A(0))y_t, y_t) + \mathcal{J}(\tau) = \|y(0)\|_{A(0)}^2 + 2\tau(\varphi(0), y_t(0)).$$

Отсюда при условии (64) и  $\varphi = 0$  получим

$$\mathcal{J}(\tau) \leq \|y(0)\|_{A(0)}^2. \quad (68)$$

В результате (67) и (68) дают для задачи (1) при  $\varphi = 0$ :

$$\|y(t+\tau)\|_{A(t)} \leq M_1 \|y(0)\|_{A(0)}, \quad M_1 = e^{0,5c_3 t_0}.$$

Проведенные выше рассуждения показывают по-существу единственное принципиальное отличие случая переменных операторов от случая постоянных операторов.

Суммируем результаты в виде двух теорем — аналогов теорем 7 и 8.

**Теорема 12.** Пусть выполнены условия (63), (64) и  $A$  — положительно определенный оператор. Тогда для решения задачи (1) верна оценка

$$\|y(t + \tau)\|_{A(t)} \leq M_1 \|y(0)\|_{A(0)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')} + \|\Phi_{\tau}(t')\|_{A^{-1}(t')}), \quad (69)$$

где  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$  зависят только от  $c_3$  и  $t_0$ .

**Теорема 13.** Пусть выполнены условия (63) и (65). Тогда для схемы (1) верна априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\|_{A(t)} \leq M_1 \left( \|y(0)\|_{A(0)} + \sqrt{\frac{t_0}{2\varepsilon}} \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\| \right), \quad (70)$$

где  $M_1 = e^{0,5c_3 t_0}$ .

Сравнивая (69) и (70) с (43) и (45), видим, что оценки (43) и (45) для случая постоянного  $A$  получаются из (69) и (70) при  $M_1 = 1$ .

Если вместо (64) ставится условие

$$B \geq \frac{\tau}{2} (1 - c_4 \tau) A \quad \text{или} \quad B \geq \frac{0,5\tau}{1 + c_4 \tau} A,$$

где  $c_4 = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ , то оценки (69) и (70) сохраняют силу при достаточно малом  $\tau \leq \tau_0(c_4)$  ( $\tau_0 < 1/(2c_4)$ ), а постоянные  $M_1$  и  $M_2$  зависят только от  $c_3$ ,  $c_4$  и  $t_0$ . На доказательстве этого факта останавливаться не будем.

**12. Пример.** Для того, чтобы пользоваться изложенной выше общей теорией устойчивости для конкретных разностных схем, необходимо:

1) привести двухслойную схему к каноническому виду (1), т. е. выделить операторы  $A$  и  $B$ ; 2) ввести пространство сеточных функций  $H_h$  и исследовать свойства  $A$  и  $B$  (положительность, самосопряженность и др.) как операторов, заданных на  $H_h$ ; 3) проверить принадлежность схемы к исходному семейству схем, а также проверить выполнение достаточных условий устойчивости (64) или (65); 4) если эти условия выполнены, то данная схема устойчива и для нее справедливы априорные оценки, например, (69) и (70).

Первый шаг состоит в приведении схемы к каноническому виду. Заметим, что полученные выше достаточные условия открывают возможность написания устойчивых разностных схем сразу в каноническом виде.

В качестве упражнений на приведение схем к каноническому виду можно рекомендовать различные схемы (например, для

уравнения теплопроводности), которые имеются в книгах В. К. Саульева [1] и В. Вазова, Д. Форсайта [1].

Рассмотрим здесь лишь один пример для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

В книге В. К. Саульева [1] предложена асимметричная схема, заданная на сетке

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, 0 \leq j \leq j_0\}.$$

Она записана в виде

$$y_{i,j+1} = \frac{1}{\omega + \alpha} (\alpha y_{i-1,j+1} + (1-\alpha) y_{i-1,j} + y_{i+1,j} - (2-\omega-\alpha) y_{i,j}), \quad (71)$$

где  $\omega = h^2/\tau$ , а  $\alpha$  — параметр.

1) Приведем схему к каноническому виду. Обозначая  $y_{i,j} = y_i$ ,  $y_{i,j+1} = \hat{y}_i$ , перепишем (71) сначала в виде

$$(\omega + \alpha) \hat{y}_i = \alpha \hat{y}_{i-1} + (1-\alpha) y_{i-1} + y_{i+1} - (2-\omega-\alpha) y_i. \quad (72)$$

Учитывая затем, что

$$y_{i-1} = -h y_{\bar{x},i} + y_i, \quad y_{i+1} = h y_{\bar{x},i} + y_i, \quad h y_{\bar{x},i} - h y_{\bar{x},i} = h^2 y_{\bar{x}\bar{x},i}, \\ \hat{y}_{i-1} = y_{i-1} + \tau y_{t,i-1} = y_i - h y_{\bar{x},i} + \tau y_{t,i} - h \tau y_{\bar{x}t,i},$$

подставляя эти выражения в (72) и опуская индекс  $i$ , будем иметь

$$\omega \tau y_t = h^2 y_{\bar{x}\bar{x}} - \alpha h \tau y_{\bar{x}t}. \quad (73)$$

После деления (73) на  $h^2$ , получаем

$$y_t + \frac{\alpha \tau}{h} y_{\bar{x}t} = y_{\bar{x}\bar{x}}. \quad (74)$$

2) Пусть  $H_h$  — пространство сеточных функций  $\hat{\Omega}_h$  (примеры 1 и 2, гл. V, § 1, п. 1), заданных на  $\omega_h = \{x_i = ih, 0 < i < N\}$  со скалярным произведением  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ . Операторы схемы  $Ay =$

$= -y_{\bar{x}\bar{x}}$  и  $R_1 y = \frac{1}{h} y_{\bar{x}}$ , согласно гл. V, § 1, п. 1, являются положительно определенными операторами, причем  $(R_1 y, y) = 0,5(Ay, y)$ . Оператор  $A$  самосопряжен,  $\|A\| \leq 4/h^2$ .

3) Операторы  $A$  и  $R_1$  постоянны. Схему (74) удобно записать в виде

$$(E + \alpha \tau R_1) y_t + Ay = 0, \quad (75)$$

так что  $B = E + \alpha \tau R_1$ .

Условие  $B \geq 0,5\tau A$  выполнено при  $\alpha \geq 1 - 2/(\tau \|A\|)$ . Действительно, для любого  $x \in H$

$$\begin{aligned} ((B - 0,5\tau A)x, x) &= ((E + \alpha\tau R_1 - 0,5\tau A)x, x) = \\ &= ((E + 0,5\tau(\alpha - 1)A)x, x), \end{aligned}$$

т. е.

$$B - 0,5\tau A \geq E + 0,5\tau(\alpha - 1)A \geq \left(\frac{1}{\|A\|} + 0,5\tau(\alpha - 1)\right)A \geq 0.$$

4) Так как  $\|A\| < 4/h^2$ , то схема (71) устойчива в  $H_A$  (в сеточной норме  $W_2^1$ ) при

$$\alpha \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}. \quad (76)$$

Наряду со схемой (71) В. К. Саульев [1] предложил другую асимметричную схему, которая после приведения ее к канонической форме запишется так:

$$(E + \alpha\tau R_2)y_t + Ay = 0, \quad \text{где } R_2y = -\frac{1}{h}y_x.$$

Так как  $(R_1y, y) = (R_2y, y)$ , то эта схема устойчива при том же условии (76). Из (76) видно, что асимметричные схемы безусловно устойчивы при  $\alpha \geq 1$ .

## § 2. Классы устойчивых трехслойных схем

**1. Постановка задачи.** В этом параграфе будут получены достаточные условия устойчивости и априорные оценки для трехслойных схем. Мы пользуемся канонической формой трехслойной схемы

$$\left. \begin{aligned} By_0 + \tau^2 R y_{tt} + Ay = \varphi(t), \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \\ 0 < t = n\tau < t_0, \quad n = 1, 2, \dots, n_0 - 1, \quad t_0 = n_0\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $y_0$  и  $y_1$  — произвольные заданные векторы из  $H$ ,  $\varphi(t)$  — заданная произвольная абстрактная функция  $t \in \omega_\tau$  со значениями в  $H$ ;  $A$ ,  $B$  и  $R$  — линейные операторы на  $H$ . Зависимость  $y(t) = y_{h\tau}(t)$ ,  $\varphi(t) = \varphi_{h\tau}(t)$ ,  $A(t) = A_{h\tau}(t)$ ,  $B$ ,  $R$ ,  $y_0$  и  $y_1$  от  $h$  и  $\tau$  явно не указываем. Напомним обозначения

$$\begin{aligned} y &= y(t_n) = y_n, \quad \hat{y} = y(t_n + \tau) = y_{n+1}, \quad \check{y} = y(t_n - \tau) = y_{n-1}, \\ y_t &= (\hat{y} - y)/\tau, \quad y_{\check{t}} = (y - \check{y})/\tau, \quad y_0^* = (\hat{y} - \check{y})/(2\tau), \\ y_{tt} &= (\hat{y} - 2y + \check{y})/\tau^2. \end{aligned}$$

По аналогии с § 1 решение задачи (1) можно представить в виде суммы  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , где  $\bar{y}$  — решение однородного уравнения

$$By_t + \tau^2 R y_{tt} + Ay = 0, \quad 0 < t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (1a)$$

а  $\tilde{y}$  — решение неоднородного уравнения с однородными начальными данными

$$By_t + \tau^2 R y_{tt} + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y(\tau) = 0. \quad (1b)$$

Перепишем (1) в виде

$$(B + 2\tau R) y_{n+1} = \Phi_n, \quad \Phi_n = 2(2R - A)\tau y_n + (B - 2\tau R) y_{n-1} + 2\tau \varphi_n \quad (2)$$

( $A$ ,  $B$  и  $R$ , вообще говоря, переменные, т. е. зависят от  $t_n$ ). Отсюда видно, что задача (1) разрешима, если существует оператор  $(B + 2\tau R)^{-1}$ . В дальнейшем будем всюду считать, что это условие выполнено. Более того, будем предполагать, что

$$\text{оператор } B + 2\tau R \text{ положительно определен.} \quad (3)$$

При изучении устойчивости трехслойной схемы будем пользоваться функционалом (составной нормой) вида

$$\|Y_{n+1}\|^2 = \|y_n + y_{n+1}\|_{(1)}^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_{(2)}^2, \quad (4)$$

где  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторые нормы на линейной системе  $H$ .

Под  $Y_{n+1}$  понимается упорядоченная пара векторов  $y_n$  и  $y_{n+1}$ ,  $Y_{n+1} = \{y_n, y_{n+1}\}$ , так что  $Y_{n+1} + \bar{Y}_{n+1} = \{y_n + \bar{y}_n, y_{n+1} + \bar{y}_{n+1}\}$ , если  $\bar{Y}_{n+1} = \{\bar{y}_n, \bar{y}_{n+1}\}$ ,  $\alpha Y_{n+1} = \{\alpha y_n, \alpha y_{n+1}\}$ ,  $\alpha$  — число.

Нетрудно видеть, что функционал (4) удовлетворяет всем аксиомам нормы, а именно:

$$\|\alpha Y_{n+1}\| = |\alpha| \|Y_{n+1}\|,$$

$$\|Y_{n+1}\| \geq 0 \quad \text{для любых } y_n \in H, \quad y_{n+1} \in H, \quad \text{и } \|Y_{n+1}\| = 0$$

только при  $y_n = y_{n+1} = 0$ ;  $\|\bar{Y}_{n+1} + Y_{n+1}\| \leq \|\bar{Y}_{n+1}\| + \|Y_{n+1}\|$ .

Определим теперь понятие устойчивости для (1).

Трехслойная схема (1) называется *устойчивой*, если существует норма (4) и при всех достаточно малых  $\tau \leq \tau_0$  и  $|h| \leq h_0$  можно указать такие положительные постоянные  $M_1$  и  $M_2$ , не зависящие от  $\tau$ ,  $h$  и выбора  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $\varphi(t)$ , что при любых  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $\varphi(t)$  и всех  $t = \tau, 2\tau, \dots, (n_0 - 1)\tau$  для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad (5)$$

или оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{(2)} + \|\varphi_t(t')\|_{(2)}), \quad (6)$$

где  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторая норма на линейной системе  $H$ ,  $\|Y(t+\tau)\|_{(1)}$  и  $\|Y(\tau)\|_{(1^0)}$  определяются по формуле вида (4), так что

$$\|Y(t+\tau)\|_{(1)}^2 = \|y(t+\tau) + y(t)\|_{(1)}^2 + \|y(t+\tau) - y(t)\|_{(1)}^2, \quad (7)$$

$$\|Y(\tau)\|_{(1^0)}^2 = \|y_1 + y_0\|_{(1^0)}^2 + \|y_1 - y_0\|_{(1^0)}^2, \quad (8)$$

$\|\cdot\|_{(1^0)}$ ,  $\|\cdot\|_{(1_2^0)}$  — некоторые нормы на  $H$ .

Если  $A$  и  $R$  — постоянные операторы, то  $\|Y\|_{(1)}$  и  $\|Y\|_{(1^0)}$  обычно совпадают.

В общем случае  $\|Y(t+\tau)\|_{(1)}$  и  $\|\varphi(t)\|_{(2)}$  зависят от  $t = n\tau$ , так что надо писать  $\|Y(t+\tau)\|_{(1,t)}$  вместо  $\|Y(t+\tau)\|_{(1)}$  и  $\|\varphi(t)\|_{(2,t)}$  вместо  $\|\varphi(t)\|_{(2)}$ .

Как будет показано ниже, нормы  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(1_2)}$  являются энергетическими нормами, построенными на операторах  $A$  и  $R$ .

Поэтому будем предполагать, что операторы  $A$  и  $R$  являются (если  $H$  — гильбертово пространство)

$$\text{самосопряженными } A = A^*, R = R^*, \quad (9)$$

$$\text{положительными } A > 0, R > 0. \quad (10)$$

**2. Основное энергетическое тождество.** Перейдем к выводу энергетического тождества для трехслойной схемы (1), справедливого для переменных операторов  $A = A(t)$ ,  $B = B(t)$ ,  $R = R(t)$  и используемого при получении априорных оценок, выражающих устойчивость схемы по начальным данным и по правой части.

Учитывая, что

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{1}{2}(\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y}) - \frac{\tau^2}{2}y_{tt},$$

перепишем (1) в виде

$$By_i + \tau^2\left(R - \frac{1}{2}A\right)y_{tt} + \frac{1}{2}A(\hat{y} + \check{y}) = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (11)$$

где  $A = A(t_n) = A_n$ ,  $B = B(t_n) = B_n$ ,  $R = R(t_n) = R_n$ .

Умножим (11) скалярно на  $2\tau y_i = \tau(y_t + y_{\bar{t}}) = \hat{y} - \check{y}$ :

$$2\tau(By_i, y_i) + \tau^2\left(\left(R - \frac{1}{2}A\right)(y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}}\right) + \frac{1}{2}(A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 2\tau(\varphi, y_i). \quad (12)$$

Пусть  $A$  и  $R$  — самосопряженные операторы. Тогда

$$R - 0,5A = (R - 0,5A)^*,$$

В силу леммы 1 из § 1 имеем

$$\begin{aligned} \left( \left( R - \frac{1}{2} A \right) (y_t - y_{\bar{t}}), y_t + y_{\bar{t}} \right) = \\ = \left( \left( R - \frac{1}{2} A \right) y_t, y_t \right) - \left( \left( R - \frac{1}{2} A \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$(A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (A\check{y}, \check{y}). \quad (14)$$

Прибавим и вычтем  $(Ay, y)$  справа в (14):

$$(A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = [(A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, y)] - [(Ay, y) + (A\check{y}, \check{y})]. \quad (15)$$

**Лемма 1.** Пусть  $A = A^*$  самосопряженный оператор. Тогда

$$(Av, v) + (Az, z) = \frac{1}{2} (A(v+z), v+z) + \frac{1}{2} (A(v-z), v-z), \quad (16)$$

для любых векторов  $v$  и  $z$  из  $H$ .

**Доказательство.** Так как  $A = A^*$ , то  $(Av, z) = (v, Az) = (Az, v)$  и

$$\begin{aligned} (A(v+z), v+z) + (A(v-z), v-z) = [(Av, v) + 2(Av, z) + (Az, z)] + \\ + [(Av, v) - 2(Av, z) + (Az, z)] = 2[(Av, v) + (Az, z)], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Полагая в (16)  $v = \hat{y}$ ,  $z = y$ , преобразуем (15):

$$\begin{aligned} (A(\hat{y} + \check{y}), \hat{y} - \check{y}) = 0,5 [(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + (A(\hat{y} - y), \hat{y} - y)] - \\ - 0,5 [(A(y + \check{y}), y + \check{y}) + (A(y - \check{y}), y - \check{y})]. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим теперь (17) и (13) в (12) и учтем, что

$$\begin{aligned} (A(\hat{y} - y), \hat{y} - y) = \tau^2 (Ay_t, y_t), \quad y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau = \check{y}_t, \\ (A(y - \check{y}), y - \check{y}) = \tau^2 (Ay_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

Тогда получим основное энергетическое тождество для трехслойной схемы (1):

$$\begin{aligned} 2\tau (By_{\bar{t}}, y_{\bar{t}}) + \left[ \frac{1}{4} (A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2 \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right) y_t, y_t \right) \right] = \\ = \left[ \frac{1}{4} (A(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right) y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}} \right) \right] + 2\tau (\varphi, y_{\bar{t}}). \end{aligned} \quad (18)$$

При его выводе мы использовали лишь предположение (9) о самосопряженности  $A$  и  $R$ .

**3. Устойчивость по начальным данным.** Напомним определение устойчивости по начальным данным и по правой части.

Схема (1) устойчива по начальным данным, если для задачи (1a) справедлива априорная оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(1)}, \quad (19)$$



Схема (1) устойчива по правой части, если для задачи (16) имеет место оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 < t' \leq t} \|\Phi(t')\|_{(2)} \quad (20)$$

или оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|\Phi(t')\|_{(2)} + \|\Phi_{\tau}(t')\|_{(2)}). \quad (21)$$

Пользуясь неравенством треугольника, из (19) и (20) или (21) получаем оценку (5) или (6).

Основное изложение проведем, предполагая, что

$$A \text{ и } R \text{ — постоянные операторы.} \quad (22)$$

Рассмотрим задачу (1а). Для нее тождество (18) примет вид

$$2\tau (By_{\tau}, y_{\tau}) + \|Y(t + \tau)\|^2 = \|Y(t)\|^2, \quad t = n\tau, \quad (23)$$

где

$$\|Y(t + \tau)\|^2 = \frac{1}{4} (A(y(t + \tau) + y(t)), y(t + \tau) + y(t)) + \tau^2 \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right) y_t, y_t \right), \quad (24)$$

$$\|Y(t)\|^2 = \frac{1}{4} (A(y(t) + y(t - \tau)), y(t) + y(t - \tau)) + \tau^2 \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right) y_t, y_t \right). \quad (25)$$

Из (24) видно, что  $\|Y(t + \tau)\|^2 > 0$  при любых  $y(t) \neq 0$ ,  $y(t + \tau) \neq 0$ , если  $A$  и  $R - A/4$  положительны,  $A > 0$ ,  $R > A/4$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A = A^* > 0$ ,  $R = R^* > 0$  постоянные операторы. Тогда условия

$$B = B(t) \geq 0 \quad \text{для всех } t \in \omega_{\tau}, \quad (26)$$

$$R > \frac{1}{4} A \quad (27)$$

достаточны для устойчивости схемы (1) по начальным данным. При выполнении условий (26) и (27) для задачи (1а) имеет место оценка

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\|, \quad (28)$$

где  $\|Y\|$  определяется согласно (24).

Действительно, при  $B \geq 0$  из (23) следует

$$\|Y(t + \tau)\|^2 \leq \|Y(t)\|^2, \quad \|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(t)\| \leq \dots \leq \|Y(\tau)\|.$$

**З а м е ч а н и я.** 1) Если  $A \geq 0$ ,  $R \geq A/4$ , то  $\|Y\| \geq 0$ , т. е.  $\|Y\|$  — полунорма. Оценка (28) выполняется и в этом случае.

2) Если условия теоремы выполнены при любых  $\tau$  и  $h$ , то схема (1а) абсолютно устойчива.

**4. Устойчивость по правой части.** Рассмотрим теперь задачу (1б). Будем предполагать, что выполнены условия (10) и (27). Так как  $A$  и  $R$  постоянные операторы, то тождество (18) для (1б) имеет вид

$$2\tau (By_0, y_0) + \|Y(t + \tau)\|^2 = \|Y(t)\|^2 + 2\tau (\varphi, y_0). \quad (29)$$

При выводе априорных оценок вида (20) или (21) основную роль играет оценка функционала  $2\tau(\varphi, y_0)$ .

Заметим, прежде всего, что имеет место очевидное неравенство

$$2\tau (\varphi, y_0) \leq \tau \varepsilon_0 \|y_0\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|\varphi\|^2, \quad (30)$$

где  $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ .

**Лемма 2.** Пусть  $A = A^*$  — положительно определенный оператор и  $R^* = R \geq A/4$ . Тогда

$$\begin{aligned} |(\varphi, \hat{y} + y)| &= |(\varphi(t), y(t + \tau) + y(t))| \leq \\ &\leq 2\varepsilon_1 \|Y(t + \tau)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\varphi(t)\|_{A^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\varepsilon_1 > 0$  — любое число.

Применим лемму 1 из гл. V, § 1

$$\begin{aligned} |(\varphi(t), y(t + \tau) + y(t))| &\leq \|\varphi(t)\|_{A^{-1}} \|y(t + \tau) + y(t)\|_A \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|y(t + \tau) + y(t)\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\varphi(t)\|_{A^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} \|Y(t + \tau)\|^2 &\geq \frac{1}{4} (A(y(t + \tau) + y(t)), y(t + \tau) + y(t)) = \\ &= \frac{1}{4} \|y(t + \tau) + y(t)\|_A^2 \quad \text{при } R \geq \frac{1}{4} A, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|y(t + \tau) + y(t)\|_A^2 \leq 4 \|Y(t + \tau)\|^2, \quad (32)$$

где  $\|Y(t + \tau)\|^2$  дается формулой (24). Отсюда получаем (31).

**Лемма 3.** Если  $A = A^*$  положительно определенный оператор и  $R^* = R \geq A/4$ , то

$$2\tau (\varphi, y_0) \leq \tau (\varphi, \hat{y} + y)_t + \varepsilon_0 \tau \|Y(t)\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|\varphi_t\|_{A^{-1}}^2, \quad \varepsilon_0 > 0. \quad (33)$$

Воспользуемся тождествами

$$\left. \begin{aligned} 2\tau y_t^0 &= \tau(\hat{y} + y)_t, \\ 2\tau(\varphi, y_t^0) &= \tau(\varphi, (\hat{y} + y)_t) = \tau(\varphi, \hat{y} + y)_t - \tau(\varphi_t, y + \hat{y}). \end{aligned} \right\} (34)$$

Согласно лемме 1 из гл. V, § 1 имеем

$$\tau |(\varphi_t, y + \hat{y})| \leq \tau \|\varphi_t\|_{A^{-1}} \|y + \hat{y}\|_A \leq \frac{\varepsilon_0 \tau}{4} \|y + \hat{y}\|_A^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|\varphi_t\|_{A^{-1}}^2.$$

Учитывая затем (32), получим

$$\tau |(\varphi_t, y + \hat{y})| \leq \varepsilon_0 \tau \|Y(t)\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|\varphi_t\|_{A^{-1}}^2. \quad (35)$$

После подстановки (35) в (34) приходим к (33).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,  $A$  — положительно определенный оператор. Тогда схема (1) устойчива по правой части и для нее при  $t > \tau$  верна оценка

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}} + \|\varphi_t(t')\|_{A^{-1}}), \quad (36)$$

где  $M_2 = \text{const} > 0$  зависит только от  $t_0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим задачу (16). Подставим оценку (33) в (29) и учтем, что  $B \geq 0$ :

$$\|Y(t + \tau)\|^2 \leq (1 + \varepsilon_0 \tau) \|Y(t)\|^2 + \tau(\varphi, \hat{y} + y)_t + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \|\varphi_t\|_{A^{-1}}^2.$$

Суммируем это неравенство по  $t = j\tau$ ,  $j = 2, 3, \dots, n$ . Так как  $y(0) = y(\tau) = 0$ , то

$$\begin{aligned} \|Y(t + \tau)\|^2 &\leq \|Y(2\tau)\|^2 + \varepsilon_0 \sum_{t'=2\tau}^t \tau \|Y(t')\|^2 + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{t'=2\tau}^t \tau \|\varphi_{t'}(t')\|_{A^{-1}}^2 + (\varphi(t), y(t + \tau) + y(t)) - (\varphi(\tau), y(2\tau)), \end{aligned} \quad (37)$$

а при  $t = \tau$  тождество (29) дает

$$\|Y(2\tau)\|^2 \leq 2\tau(\varphi(\tau), y_2^0(\tau)) = (\varphi(\tau), y(2\tau)),$$

так как  $y(0) = y(\tau) = 0$ .

Сложим это неравенство с (37):

$$\begin{aligned} \|Y(t + \tau)\|^2 &\leq \varepsilon_0 \sum_{t'=2\tau}^t \tau \|Y(t')\|^2 + (\varphi(t), y(t + \tau) + y(t)) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{t'=2\tau}^t \tau \|\varphi_{t'}(t')\|_{A^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Лемма 2 при  $\varepsilon_1 = 1/4$  дает

$$\|Y(t + \tau)\|^2 \leq 2\varepsilon_0 \sum_{t'=2\tau}^t \tau \|Y(t')\|^2 + \Phi(t), \quad (38)$$

$$\Phi(t) = 4\|\varphi(t)\|_{A^{-1}}^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} \sum_{t'=2\tau}^t \tau \|\varphi_t(t')\|_{A^{-1}}^2.$$

Для решения неравенства (38) применим лемму 5 из § 1, выберем  $\varepsilon_0$  и учтем, что  $\check{\varphi} = \varphi - \tau\varphi_t$ ,  $\|\varphi(\tau)\| \leq \|\varphi(2\tau)\| + \tau\|\varphi_t(2\tau)\|$ . В результате получим для решения задачи (16) априорную оценку

$$\|Y(t + \tau)\| \leq M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}} + \|\varphi_t(t')\|_{A^{-1}}). \quad (39)$$

Из (39) и (28) следует (36).

**Теорема 3.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $R = R^* \geq 0$  — постоянные неотрицательные операторы, а  $B = B(t)$  — переменный самосопряженный положительно определенный оператор

$$B \geq \varepsilon E, \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (40)$$

где  $\varepsilon$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ , и выполнено условие

$$R \geq \frac{1}{4} A. \quad (41)$$

Тогда для решения задачи (16) справедлива априорная оценка

$$\|y(t + \tau)\| \leq \frac{2\sqrt{t}}{\varepsilon} \left[ \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right]^{1/2}. \quad (42)$$

Рассмотрим тождество (29). Из (40) и (30) при  $\varepsilon_0 = \varepsilon$  следует

$$\tau \varepsilon \|y_i\|^2 + \|Y(t + \tau)\|^2 \leq \|Y(t)\|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi(t)\|^2.$$

Суммируя по  $t = \tau, 2\tau, \dots, n\tau$ , получаем (так как  $\|Y(\tau)\| = 0$ )

$$\varepsilon \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_i(t')\|^2 + \|Y(t + \tau)\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2, \quad (43)$$

или

$$\sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_i(t')\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2, \quad (44)$$

так как  $\|Y(t + \tau)\|^2 \geq 0$ .

**Лемма 4.** Если  $y(0) = y(\tau) = 0$ , то

$$\|y(t)\|^2 + \|y(t + \tau)\|^2 \leq 4t \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}^\circ\|^2. \quad (45)$$

В самом деле  $y(t + \tau) + y(t) = 2 \sum_{t'=\tau}^t \tau y_{t'}^\circ$ ,

$$\|y(t + \tau) + y(t)\|^2 \leq 4t \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}^\circ\|^2. \quad (46)$$

Далее, обозначив  $w_n = y_n - y_{n-1}$ , получим

$$w_{n+1} = 2\tau y_{t,n}^\circ - w_n, \quad w_1 = 0,$$

откуда следует неравенство

$$\|w_{n'+1}\| \leq 2\tau \|y_{t,n'}^\circ\| + \|w_{n'}\|, \quad n' = 1, 2, \dots, n.$$

Суммируя его по  $n$  от 1 до  $n + 1$ , получаем

$$\|w_{n+1}\| \leq 2 \sum_{n'=1}^n \tau \|y_{t,n'}^\circ\|,$$

или

$$\|y(t + \tau) - y(t)\| \leq 2 \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}^\circ\|,$$

$$\|y(t + \tau) - y(t)\|^2 \leq 4t \sum_{t'=\tau}^t \tau \|y_{t'}^\circ\|^2. \quad (47)$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$\|y(t + \tau) + y(t)\|^2 + \|y(t + \tau) - y(t)\|^2 = 2(\|y(t)\|^2 + \|y(t + \tau)\|^2).$$

Отсюда и из (46), (47) следует (45).

Подставляя в (44) оценку (45), получаем (42).

**Теорема 4.** Пусть  $A = A^* > 0$ ,  $R = R^* > 0$  — постоянные операторы. Тогда при условиях  $B \geq \varepsilon E$ ,  $R \geq A/4$ ,  $\varepsilon = \text{const} > 0$ , для решения задачи (1) верна априорная оценка

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right]^{1/2}. \quad (48)$$

Достаточно оценить лишь решение задачи (16), так как теорема 1 при  $B \geq \varepsilon E$  сохраняет силу. Положим в (30)  $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$ . Тогда из (29) следует

$$\|Y(t + \tau)\|^2 \leq \|Y(t)\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi(t)\|^2.$$

Остается просуммировать это неравенство по переменному  $t = \tau, 2\tau, \dots, n\tau$ , учесть при этом, что  $\|Y(\tau)\| = 0$ , и затем воспользоваться теоремой 1.

**5. Схемы с переменными операторами.** Если  $A$  и  $R$  зависят от  $t$ , то вводится дополнительное требование липшиц-непрерывности  $A$  и  $R$  по  $t$ :

$$|((A(t) - A(t - \tau))x, x)| \leq \tau c_3 (A(t - \tau)x, x) \quad (49)$$

при всех  $x \in H$  и  $t = 2\tau, \dots, (n_0 - 1)\tau$ , где  $c_3 = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ , и аналогичное условие для  $R$ . В этом случае составная норма  $\|Y(t + \tau)\| = \|Y(t + \tau)\|_{(t)}$  зависит от  $t$ :

$$\|Y(t + \tau)\|_{(t)}^2 = \frac{1}{4} (A(t)(y(t + \tau) + y(t)), y(t + \tau) + y(t)) + \\ + \tau^2 \left( \left( R(t) - \frac{1}{4} A(t) \right) y_t(t), y_t(t) \right), \quad (50)$$

$$\|Y(t)\|_{(t-\tau)}^2 = \frac{1}{4} (A(t - \tau)(y(t) + y(t - \tau)), y(t) + y(t - \tau)) + \\ + \tau^2 \left( \left( R(t - \tau) - \frac{1}{4} A(t - \tau) \right) y_t(t), y_t(t) \right). \quad (51)$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части тождества (18). Замечая, что

$$(A(y + \check{y}), y + \check{y}) = (\check{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau (A_t(y + \check{y}), y + \check{y}), \\ \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right) y_t, y_t \right) = \left( \left( \check{R} - \frac{1}{4} \check{A} \right) y_{\check{t}}, y_{\check{t}} \right) + \tau \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right)_t y_{\check{t}}, y_{\check{t}} \right), \\ \check{A} = A(t - \tau), \quad A_t = (A - \check{A})/\tau,$$

и вводя обозначения

$$\hat{J} = J(t + \tau) = \|Y(t + \tau)\|_{(t)}^2, \quad J = J(t) = \|Y(t)\|_{(t-\tau)}^2, \quad (52)$$

перепишем тождество (18) в следующем виде

$$2\tau (By_{\check{t}}, y_{\check{t}}) + \hat{J} = J + 2\tau (\varphi, y_{\check{t}}) + \tau F, \quad (53)$$

$$F = \frac{1}{4} (A_t(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 \left( \left( R - \frac{1}{4} A \right)_t y_{\check{t}}, y_{\check{t}} \right). \quad (54)$$

Если  $R - A/4$  и  $A$  удовлетворяют условию (49), то

$$|F| \leq \frac{c_3}{4} (\check{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 c_3 \left( \left( \check{R} - \frac{1}{4} \check{A} \right) y_{\check{t}}, y_{\check{t}} \right) = c_3 J,$$

и из тождества (53) при  $R \geq A/4$  следует неравенство

$$2\tau (By_{\check{t}}, y_{\check{t}}) + \hat{J} \leq (1 + \tau c_3) J + 2\tau (\varphi, y_{\check{t}}). \quad (55)$$

В общем случае, когда условию (49) удовлетворяет каждый из операторов  $R(t)$  и  $A(t)$  в отдельности, имеем

$$|F| \leq \frac{c_3}{4} (\check{A}(y + \check{y}), y + \check{y}) + \tau^2 c_3 \left[ (\check{R}y_t, y_t) + \frac{1}{4} (\check{A}y_t, y_t) \right] \leq \leq c_3 \left( 1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) J \quad (56)$$

при  $R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A$ , где  $\varepsilon = \text{const} > 0$  не зависит от  $h$  и  $\tau$ , так как  $J > \frac{\varepsilon\tau^2}{4} (\check{A}y_t, y_t)$  при  $R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A$ .

Тождество (53) дает

$$2\tau (By_t, y_t) + J(t + \tau) \leq \left( 1 + \frac{(2+\varepsilon)c_3}{\varepsilon} \tau \right) J(t) + 2\tau (\varphi, y_t). \quad (57)$$

После того, как написано энергетическое неравенство (57), вывод априорных оценок проходит так же, как и для постоянных  $A$  и  $R$ . Так, например, при  $B \geq 0$  из (57) для задачи (1а) следует оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(t)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(\tau)}, \quad \text{если } R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A, \quad (58)$$

где  $M_1$  зависит только от  $\varepsilon$ ,  $c_3$  и  $t_0$ .

Формулируем основные результаты в виде одной теоремы.

**Теорема 5.** Пусть  $A(t) = A^*(t) \geq \delta E$ ,  $\delta > 0$ ,  $R(t) = R^*(t) > > 0$  — переменные операторы, липшиц-непрерывные по  $t$ , и

$$R(t) \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A(t) \quad \text{для всех } 0 < t = n\tau < t_0, \quad (59)$$

где  $\varepsilon = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ . Тогда для схемы (1) имеют место оценки

$$\|Y(t + \tau)\|_{(t)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(\tau)} + + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} \left[ \|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')} + \|\varphi_t(t')\|_{A^{-1}(t')} \right] \quad (60)$$

при  $B(t) \geq 0$ ,  $0 < t = n\tau < t_0$ ,

$$\|Y(t + \tau)\|_{(t)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(\tau)} + M_2 \max_{\tau \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\| \quad (61)$$

при  $B(t) \geq \bar{\varepsilon} E$ , где  $\bar{\varepsilon} = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$ ,  $h$ .

Во избежание ненужных повторов, доказательство теоремы опускаем.

**З а м е ч а н и е.** Некоторые требования теоремы 5 могут быть ослаблены. Так, устойчивость по начальным данным имеет место при условии  $A^*(t) = A(t) > 0$  (вместо  $A^*(t) = A(t) \geq \delta E$ ,  $\delta > 0$ ). Для выполнения оценки (61) также достаточно потре-

бовать положительности оператора  $A$ . Условие  $B \geq 0$  можно заменить условием

$$B \geq -c_4 \tau^2 A, \quad (62)$$

где  $c_4 = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $h$ . Если выполнено (62), то оценка (60) имеет место при  $\tau \leq \tau_0$ ,  $\tau_0 = 1/(4c_4)$ .

**6. Схема с весами.** Весьма часто встречаются на практике схемы с весами

$$y_i^{\circ} + Ay^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi(t), \quad \tau \leq t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (63)$$

где  $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \dot{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \ddot{y}$ ;  $\sigma_1, \sigma_2$  — вещественные числа, от выбора которых зависит устойчивость и точность схемы.

В гл. V, § 2 схема (63) была приведена к каноническому виду (1) и были найдены операторы

$$B = E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A, \quad R = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A. \quad (64)$$

Пусть существует оператор  $A^{-1}$ . Действуя на (1) с операторами (64) оператором  $A^{-1}$ , получим

$$\tilde{B}y_i^{\circ} + \tau^2 \tilde{R}y_{it}^{\circ} + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad \tau \leq t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (65)$$

где

$$\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E, \quad \tilde{R} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}E, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi.$$

Отсюда видно, что  $\tilde{A}$  и  $\tilde{R}$  самосопряженные постоянные операторы.

Применим к (65) теоремы 1 и 2. Справедливы операторные неравенства

$$\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}\right)E > 0 \quad \text{при } \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5, \quad (66)$$

$$\tilde{B} = A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E \geq 0 \quad \text{при } \sigma_1 \geq \sigma_2 \text{ и любом } A(t) > 0. \quad (67)$$

**Теорема 6.** Если  $A(t)$  — переменный положительно определенный оператор и выполнены условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5, \quad (68)$$

то схема (63) устойчива и для нее верна оценка

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + \sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|, \quad (69)$$

где

$$\|Y(t + \tau)\|^2 = \frac{1}{4}\|y(t + \tau) + y(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\right)\|y(t + \tau) - y(t)\|^2. \quad (70)$$



**Доказательство.** 1) *Устойчивость по начальным данным.* Так как условия  $\tilde{R} > \tilde{A}/4$ ,  $\tilde{B} \geq 0$  теоремы 1 выполнены, то для решения задачи (65) при  $\varphi = 0$  имеем

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(t')\|, \quad t' < t,$$

и, в частности,

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\|, \quad (71)$$

где  $\|Y(t + \tau)\|$  определяется по формуле (70), являющейся частным случаем формулы (24) при  $\tilde{A} = E$ ,  $\tilde{R} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)E$ .

2) *Устойчивость по правой части.* Рассмотрим задачу (63) при  $y(0) = y(\tau) = 0$ . Будем искать ее решение в виде

$$y_{n+1} = \sum_{s=1}^n \tau g_{n+1, s}, \quad y_0 = 0, \quad (72)$$

где  $g_{n+1, s}$  как функция  $n$  при фиксированном  $s = 1, 2, \dots, n$  удовлетворяет уравнению (63) с  $\varphi = 0$  при  $n > s + 1$  и начальным данным

$$g_{s+1, s} + 2\sigma_1 \tau A g_{s+1, s} = 2\varphi_s, \quad g_{s, s} = 0. \quad (73)$$

Подставляя (72) в (63) и учитывая (73), убеждаемся в том, что (72) есть решение задачи (63). Для  $g_{n, s}$ , в силу устойчивости по начальным данным (71), имеем

$$\|G_{n+1, s}\| \leq \|G_{s+1, s}\| \quad \text{при фиксированном } s = 1, 2, \dots, \quad (74)$$

где  $\|G_{n+1, s}\|$  выражается через  $g_{n, s}$  и  $g_{n+1, s}$  по формуле (70). Из (73) находим  $g_{s+1, s} = 2(E + 2\sigma_1 \tau A)^{-1} \varphi_s$  и, так как  $E + 2\sigma_1 \tau A \geq E$  при  $\sigma_1 \geq 0$ , то  $\|(E + 2\sigma_1 \tau A)^{-1}\| \leq 1$  и  $\|g_{s+1, s}\| \leq 2\|\varphi_s\|$ .

По условию  $g_{s, s} = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|G_{s+1, s}\|^2 &= \frac{1}{4} \|g_{s+1, s}\|^2 + \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \|g_{s+1, s}\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \|g_{s+1, s}\|^2 \leq 2(\sigma_1 + \sigma_2) \|\varphi_s\|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|G_{n+1, s}\| \leq \|G_{s+1, s}\| \leq \sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \|\varphi_s\|. \quad (75)$$

Подставляя (75) в правую часть неравенства

$$\|Y_{n+1}\| \leq \sum_{s=1}^n \tau \|G_{n+1, s}\|,$$

получаем для решения задачи (63) с  $y(0) = y(\tau) = 0$  оценку

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \sqrt{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|. \quad (76)$$

Отсюда и из (71) следует (69).

**Теорема 7.** Если  $A(t) = A^*(t)$  — положительно определенный оператор и выполнены условия (68), то для решения задачи (63) выполняется неравенство

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')}^2 \right]^{1/2}, \quad (77)$$

где  $\|Y(t + \tau)\|$  дается формулой (70).

Для доказательства теоремы надо подставить оценки

$$\begin{aligned} 2\tau(\tilde{\varphi}, y_i^0) &= 2\tau(A^{-1}\varphi, y_i^0) \leq 2\tau\|y_i^0\|_{A^{-1}}\|\varphi\|_{A^{-1}} \leq \\ &\leq 2\tau\|y_i^0\|_{A^{-1}}^2 + \frac{\tau}{2}\|\varphi\|_{A^{-1}}^2, \\ 2\tau(\tilde{B}y_i^0, y_i^0) &\geq 2\tau(A^{-1}y_i^0, y_i^0) = 2\tau\|y_i^0\|_{A^{-1}}^2 \end{aligned}$$

в тождество (18) для схемы (65).

Применяя теорему 2 к схеме (65) с постоянным положительно определенным оператором  $A$ , нетрудно получить при условиях (68) оценку

$$\|Y(t + \tau)\| \leq \|Y(\tau)\| + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|A^{-1}\varphi(t')\| + \|A^{-1}\varphi_t(t')\|). \quad (78)$$

Отметим еще, что оценка (60) имеет место для схемы (63), если  $A(t) = A^*(t) \geq \delta E$ ,  $\delta > 0$ ,  $A(t)$  липшиц-непрерывен по  $t$  и

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau\|A\|},$$

а оценка вида (61) справедлива при  $\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1-\varepsilon}{\tau\|A\|}$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

**7. Примеры.** Рассмотрим несколько схем частного вида.

1. Явная схема ( $R = 0$ )

$$By_i^0 + Ay = \varphi \quad (79)$$

неустойчива при  $B > 0$ ,  $A^* = A > 0$ .

2. Схема (1) с оператором  $R = \kappa E$  и  $B = E$

$$y_i^0 + \kappa\tau^2 y_{it} + Ay = \varphi \quad (80)$$

устойчива при  $\kappa E > A/4$ , т. е. при

$$\kappa > \frac{1}{4}\|A\|. \quad (81)$$

Частным случаем схемы (80) является схема Дюфорта и Франкела (схема «ромб») для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

Она получается из явной неустойчивой схемы (вида (79))

$$y_i^0 + Ay = 0, \quad Ay = -y_{\bar{x}x} = -\frac{y(x+h, t) - 2y(x, t) + y(x-h, t)}{h^2}$$

в результате замены  $y(x, t) = y_i^l$  полусуммой  $0,5(y_i^{l+1} + y_i^{l-1}) = 0,5(\hat{y}_i + \check{y}_i)$ , что дает

$$\frac{\hat{y}_i - \check{y}_i}{2\tau} = \frac{y_{i+1} - (\hat{y}_i + \check{y}_i) + y_{i-1}}{h^2}. \quad (82)$$

Приведем (82) к каноническому виду. Так как  $\hat{y} + \check{y} = 2y + \tau^2 y_{tt}$ , то правая часть в (82) равна  $y_{\bar{x}x} - \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt}$ , следовательно,

$$y_i^0 + \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt} + Ay = 0, \quad Ay = -y_{\bar{x}x}, \quad \|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}.$$

Сравнивая это уравнение с (80), видим, что  $\kappa = 1/h^2 > \|A\|/4$ , т. е. схема Дюфорта и Франкела устойчива при любых  $\tau$  и  $h$ . Нетрудно сразу написать аналог этой схемы для случая, когда  $L$  — любой эллиптический оператор. При этом надо лишь выбрать  $\kappa$  из условия (81).

### 3. Несимметричная трехслойная схема

$$\frac{3}{2} y_i^0 - \frac{1}{2} y_i^1 + A\hat{y} = \varphi \quad \text{или} \quad \frac{3\hat{y} - 4y + \check{y}}{2\tau} + A\hat{y} = \varphi$$

применяется для решения уравнения теплопроводности. Пользуясь формулами

$$y_i = y_i^0 + \frac{\tau}{2} y_{tt}, \quad y_i = y_i^1 - \frac{\tau}{2} y_{tt}, \quad \hat{y} = y + \tau y_i^0 + \frac{\tau^2}{2} y_{tt},$$

приведем ее к каноническому виду

$$(E + \tau A) y_i^0 + \tau^2 \left( \frac{E}{\tau} + \frac{1}{2} A \right) y_{tt} + Ay = \varphi,$$

т. е.  $B = E + \tau A$ ,  $R = E/\tau + 0,5A$ . Отсюда видно, что условия  $R > A/4$ ,  $B \geq E$  выполняются при любом  $A > 0$ . Если  $A = A^* > 0$ , то схема устойчива в норме

$$\|Y(t + \tau)\|_{(1)}^2 = \frac{1}{2} (\|y(t + \tau)\|_A^2 + \|y(t)\|_A^2) + \tau \|y_t\|_A^2.$$

**8. Другие априорные оценки.** Наряду со схемой (1) часто встречаются трехслойные схемы, записанные в виде

$$(E + \tau^2 R) y_{tt} + B y_i^0 + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (83)$$

Эта схема формально получается из (1) заменой  $R$  на  $\tilde{R} = R + E/\tau^2$ . Имея в виду эту замену, нетрудно заключить, что схема (83) устойчива при  $R \geq A/4$ , и написать соответствующие оценки.

Составные нормы  $\|Y\|$  естественно появляются при написании уравнения энергетического баланса. Они весьма сложны по структуре. Желательно иметь априорные оценки для решения задач (1) и (83) в обычных энергетических нормах  $H_A$  и  $H_R$ . Перейдем к выводу таких оценок.

Любую трехслойную схему будем записывать в форме

$$Dy_{tt} + By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 < t \in \omega_\tau, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \quad (84)$$

где  $D = D(t)$ ,  $A = A(t)$  и  $B = B(t)$  — линейные операторы. В частности,  $D = \tau^2 R$  для схемы (1),  $D = E + \tau^2 R$  для схемы (83).

Наряду с (84) будем рассматривать задачи

$$Dy_{tt} + By_t + Ay = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0, \quad (84a)$$

$$Dy_{tt} + By_t + Ay = \varphi(t), \quad y(0) = y_t(0) = 0. \quad (84б)$$

Будем предполагать, что

$$A(t) = A^*(t) > 0, \quad D(t) = D^*(t) > 0, \quad B(t) \geq 0, \quad (85)$$

$$A(t) \text{ и } D(t) \text{ — липшиц-непрерывны по } t \text{ с постоянной } c_3. \quad (86)$$

Из теоремы 5 следует, что схема (84) при условиях (85), (86) и условии

$$D \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A \quad (87)$$

(где  $\varepsilon > 0$  — любое число, не зависящее от  $\tau$  и  $h$ ) устойчива по начальным данным и для решения задачи (84a) имеет место оценка

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \leq M_1 \|Y_1\|_{(1)}, \quad (88)$$

где  $M_1 = M_1(c_3, \varepsilon, t_0) > 0$  не зависит от  $\tau, h, n$  и

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)}^2 = \frac{1}{4} \|y_n + y_{n+1}\|_{A(t_n)}^2 + \left( \left( D(t_n) - \frac{\tau^2}{4} A(t_n) \right) y_{t,n}, y_{t,n} \right), \quad (89)$$

$$\|Y_1\|_{(1)}^2 = \frac{1}{4} \|y_0 + y_1\|_{A(\tau)}^2 + \left( \left( D(\tau) - \frac{\tau^2}{4} A(\tau) \right) y_t(0), y_t(0) \right). \quad (90)$$

Постоянная  $M_1 = 1$ , если операторы  $A$  и  $D$  не зависят от  $t$ . Для перехода от (88) к оценкам в  $H_A$  и  $H_D$  нам понадобятся двусторонние оценки функционала  $\|Y_{n+1}\|^2$ .

**Лемма 5.** Пусть выполнены условия (85) и (87). Тогда

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \leq \|y_n\|_{A(t_n)} + \|y_t(t_n)\|_{D(t_n)}, \quad (91)$$

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|y_{n+1}\|_{A(t_n)}, \quad (92)$$

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} (\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} + \|y_t(t_n)\|_{D(t_n)}). \quad (93)$$

Доказательство. Обозначим

$$J = \frac{1}{4} \|g + y\|_A^2 + \left( \left( D - \frac{\tau^2}{4} A \right) y_t, y_t \right).$$

Докажем неравенство (91).

$$J = \frac{1}{4} (\|y\|_A^2 + 2(Ay, g) + \|g\|_A^2) - \frac{1}{4} (\|y\|_A^2 - 2(Ag, y) + \|g\|_A^2) + \\ + (Dy_t, y_t) = (Ay, g) + \|y_t\|_D^2.$$

Подставим сюда  $g = y + \tau y_t$ :

$$J = \|y\|_A^2 + \tau(Ay, y_t) + \|y_t\|_D^2 \leq \|y\|_A^2 + \tau \|y\|_A \|y_t\|_A + \|y_t\|_D^2.$$

Используем условие (87):  $\|y_t\|_A \leq \frac{2}{\tau\sqrt{1+\varepsilon}} \|y_t\|_D$ , так что

$$J \leq \|y\|_A^2 + \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|y\|_A \|y_t\|_D + \|y_t\|_D^2 < (\|y\|_A + \|y_t\|_D)^2.$$

Отсюда следует первое неравенство леммы.

Заметим далее, что  $J = (Ag, y) + \|y_t\|_D^2$ . Подставим сюда  $y = g - \tau y_t$ :

$$J = (Ag, g) - \tau(Ag, y_t) + \|y_t\|_D^2.$$

Пользуясь снова обобщенным неравенством Коши — Буняковского  $(Ag, y_t) \leq \|g\|_A \|y_t\|_A$  и учитывая (87), получаем

$$J \geq \|g\|_A^2 - \tau \|g\|_A \|y_t\|_A + \|y_t\|_D^2 \geq \|g\|_A^2 - \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|g\|_A \|y_t\|_D + \|y_t\|_D^2.$$

Применим неравенство:  $ab \leq \delta a^2 + b^2/(4\delta)$ . Тогда

$$J \geq (1 - \delta) \|g\|_A^2 + \left( 1 - \frac{1}{\delta(1+\varepsilon)} \right) \|y_t\|_D^2. \quad (94)$$

Полагая второй коэффициент равным нулю, найдем  $\delta = 1/(1+\varepsilon)$  и  $J \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|g\|_A^2$ . Вторая оценка леммы доказана.

Чтобы получить третью оценку, потребуем равенства коэффициентов при  $\|g\|_A^2$  и  $\|y_t\|_D^2$  в (94); это дает

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}, \quad 1 - \delta = \frac{\sqrt{1+\varepsilon} - 1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Так как  $\sqrt{1+\varepsilon} < 1 + \varepsilon$  при любом  $\varepsilon > 0$ , то  $1 - \delta > \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$  и

$$J \geq \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} (\|g\|_A^2 + \|y_t\|_D^2) \geq \frac{\varepsilon}{4(1+\varepsilon)} (\|g\|_A + \|y_t\|_D)^2.$$

Лемма полностью доказана.

Подставляя (91) — (93) в (88), получаем оценки для задачи (84а):

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|y_0\|_{A(\tau)} + \|y_t(0)\|_{D(\tau)}), \quad (95)$$

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} + \|y_t(t_n)\|_{D(t_n)} \leq 2M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} (\|y_0\|_{A(\tau)} + \|y_t(0)\|_{D(\tau)}). \quad (96)$$

Для доказательства устойчивости схемы (84) по правой части воспользуемся принципом суперпозиции и будем искать решение задачи (84б) в виде суммы

$$y_n = \sum_{s=1}^n \tau g_{n,s}, \quad n = 1, 2, \dots, y_0 = 0, \quad (97)$$

где  $g_{n,s}$ , как функция  $n$  при любом фиксированном  $s = 1, 2$  удовлетворяет уравнению (84а) и начальным условиям

$$(0,5\tau B(t_s) + D(t_s)) \frac{g_{s+1,s} - g_{s,s}}{\tau} = \varphi_s, \quad g_{ss} = 0.$$

Предположим, что оператор  $D^{-1}$  существует. Для этого достаточно потребовать, чтобы  $D > \delta E$ ,  $\delta > 0$  (см. теорему 4 из гл. I, § 3).

Так как  $B \geq 0$ , а  $D = D^* \geq \delta E$ , то для решения уравнения  $(0,5\tau B + D)w = \varphi$  будем иметь оценку  $\|w\|_D \leq \|\varphi\|_{D^{-1}}$ , так что

$$\|(g_t)_{s,s}\|_{D(t_s)} \leq \|\varphi_s\|_{D^{-1}(t_s)}.$$

В силу (95) получаем

$$\|g_{n+1,s}\|_{A(t_n)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|(g_t)_{s,s}\|_{D(t_s)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \|\varphi_s\|_{D^{-1}(t_s)}.$$

Пользуясь затем (97) и неравенством треугольника, получим для решения задачи (84б) оценку

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|_{D^{-1}(t_s)}. \quad (98)$$

Суммируем все результаты в виде следующей теоремы.

**Теорема 8.** Пусть выполнены условия (85) — (87) и, кроме того,  $D$  — положительно определенный оператор. Тогда схема (84) устойчива по начальным данным и по правой части, а для решения задачи (84) имеет место априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|y(0)\|_{A(\tau)} + \|y_t(0)\|_{D(\tau)} + \sum_{s=1}^n \tau \|\varphi_s\|_{D^{-1}(t_s)} \right). \quad (99)$$

Следствие. Пусть  $D = E + \tau^2 R > E$ ,  $D^{-1} < E$ . Тогда  $\|\Phi_s\|_{D^{-1}} \leq \|\Phi\|$  и для (84б) верна оценка

$$\|y_{n+1}\|_{A(t_n)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{s=1}^n \tau \|\Phi_s\|. \quad (100)$$

Более тонкие оценки, аналогичные оценкам для уравнения колебаний струны (гл. II), можно получить для более узкого класса схем

$$Dy_{it} + Ay = \varphi, \quad 0 < t = n\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y_t(0) = \bar{y}_0. \quad (101)$$

Предположим, что

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ и } D - \text{постоянные операторы,} \\ A \text{ и } D - \text{самосопряженные положительно определен-} \\ \text{ные операторы.} \end{array} \right\} \quad (102)$$

Тогда при условии (87) для (101) верна оценка (99) с  $M_1 = 1$ . Полагая  $x = D^{1/2}y$ ,  $C = D^{-1/2}AD^{-1/2}$ , преобразуем (101) к виду

$$x_{it} + Cx = \tilde{\varphi}, \quad x(0) = x_0, \quad x_t(0) = \bar{x}_0. \quad (103)$$

Применяя к (103) оператор  $C^{-1}$ , получим схему

$$C^{-1}x_{it} + x = C^{-1}\tilde{\varphi}, \quad x(0) = x_0, \quad x_t(0) = \bar{x}_0. \quad (104)$$

Сравнивая ее со схемой (84), устанавливаем соответствие

$$C^{-1} \sim D, \quad E \sim A, \quad C^{-1}\tilde{\varphi} \sim \varphi.$$

Условие (87) принимает вид

$$C^{-1} \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 E \quad \text{или} \quad E \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 C.$$

Воспользуемся теперь оценкой (99). Так как  $C$  — постоянный оператор, то  $M_1 = 1$ :

$$\|x_{n+1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|x(0)\| + \|x_t(0)\|_{C^{-1}} + \sum_{s=1}^n \tau \|C^{-1}\tilde{\varphi}\|_C \right). \quad (105)$$

Учитывая, что  $x = D^{1/2}y$ ,  $\tilde{\varphi} = D^{-1/2}\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \|x_t(0)\|_{C^{-1}}^2 &= (C^{-1}x_t(0), x_t(0)) = (D^{1/2}A^{-1}D^{1/2}D^{1/2}y_t(0), D^{1/2}y_t(0)) = \\ &= \|Dy_t(0)\|_{A^{-1}}^2, \end{aligned}$$

$$\|C^{-1}\tilde{\varphi}\|_C^2 = (C^{-1}\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = (D^{1/2}A^{-1}D^{1/2}D^{-1/2}\varphi, D^{-1/2}\varphi) = (A^{-1}\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_{A^{-1}}^2,$$

запишем (105) в исходных переменных

$$\|y_{n+1}\|_D \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \left( \|y(0)\|_D + \|Dy_t(0)\|_{A^{-1}} + \sum_{s=1}^n \tau \| \varphi_s \|_{A^{-1}} \right). \quad (106)$$

Тем самым доказана

*Теорема 9. Если выполнены условия (87) и (102), то для схемы (101) имеет место априорная оценка (106). В частности, для схемы (101) с  $D = E$  и  $y_0 = \bar{y}_0 = 0$  имеем*

$$\|y_{n+1}\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \sum_{s=1}^n \tau \| \varphi_s \|_{A^{-1}}$$

(ср. с оценками гл. II, § 2, п. 2).

Рассмотрим в качестве примера схему с весами

$$y_{tt} + A(\sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y}) = \varphi, \quad A^* = A \geq \delta E, \quad \delta > 0.$$

Подставляя сюда  $\sigma \hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \check{y} = y + \sigma \tau^2 y_{tt}$ , получим

$$(E + \sigma \tau^2 A) y_{tt} + Ay = \varphi, \quad (107)$$

т. е.  $D = E + \sigma \tau^2 A$ . Условие устойчивости  $D \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \tau^2 A$  или  $E \geq ((1+\varepsilon)/4 - \sigma) \tau^2 A$  выполнено при

$$\sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\tau^2 \|A\|}.$$

Для явной схемы ( $\sigma = 0$ ) отсюда следует

$$\tau \leq \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon) \|A\|}}.$$

Явная схема ( $y_{tt} = y_{xx}$ ) для уравнения колебаний струны, согласно этому условию, устойчива при  $\tau/h \leq 1/\sqrt{(1+\varepsilon)}$  (ср. гл. II, § 2).

Рассмотрим вопрос об устойчивости схемы (107) с переменным оператором  $A(t)$ . Будем считать по-прежнему, что  $A(t)$  — самосопряженный положительно определенный оператор, так что  $A^{-1}(t)$  существует.

Применим к обеим частям уравнения (107) оператор  $A^{-1}$ . Тогда получим схему

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D} y_{tt} + \tilde{A} y &= \tilde{\varphi}, \\ \tilde{D} &= A^{-1} + \sigma \tau^2 E, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (107^*)$$



Чтобы воспользоваться теоремой 5, надо установить липшиц-непрерывность  $D(t)$  по  $t$ . Будем предполагать, что оператор  $A(t)$  липшиц-непрерывен по  $t$ :

$$(1 - c_3\tau)\check{A} \leq A \leq (1 + c_3\tau)\check{A}, \quad A = A(t), \quad \check{A} = A(t - \tau).$$

В силу самосопряженности и положительной определенности оператора  $A$ , получаем отсюда

$$(1 - c_3\tau)A^{-1} \leq \check{A}^{-1} \leq (1 + c_3\tau)A^{-1}.$$

Предполагая, что выполнено условие  $\tau < 1/(2c_3)$ , получаем

$$(1 - 2c_3\tau)\check{A}^{-1} < \frac{1}{1 + c_3\tau}\check{A}^{-1} \leq A^{-1} \leq \frac{1}{1 - c_3\tau}\check{A}^{-1} < (1 + 2c_3\tau)\check{A}^{-1}.$$

Следовательно

$$|((A^{-1} - \check{A}^{-1})x, x)| \leq 2c_3\tau(\check{A}^{-1}x, x).$$

Учитывая затем неравенство

$$\check{A}^{-1} = \check{D} - \sigma\tau^2 E \leq \check{D} \quad \text{при} \quad \sigma \geq 0,$$

закключаем, что  $\check{D}$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$  с постоянной  $2c_3$ :

$$|((\check{D} - \check{D})x, x)| \leq 2c_3\tau(\check{D}x, x) \quad \text{для всех} \quad x \in H,$$

если выполнены условия

$$\sigma \geq 0, \quad 1 - 2c_3\tau > 0.$$

В силу теоремы 5, если

$$\check{D} \geq \frac{1 + \varepsilon}{4} \tau^2 \check{A},$$

то для схемы (107\*) выполняется оценка

$$\|Y_{n+1}\|_{(n)} \leq M_1 \|Y_1\|_{(1)} + M_2 \max_{0 < k \leq n} (\|\tilde{\varphi}^k\|_{\check{A}^{-1}} + \|\varphi_t^k\|_{\check{A}^{-1}}).$$

Пользуясь (91) и (92) и учитывая, что  $\check{A} = E$ , получаем

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\| \leq & \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} M_1 (\|y_0\| + \|y_t(0)\|_{\check{D}(\tau)}) + \\ & + \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} M_2 \max_{0 < k \leq n} [\|(A^{-1}\varphi)^k\| + \|(A^{-1}\varphi)_t^k\|], \end{aligned} \quad (108)$$

где  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $\tau$  и  $h$ .

Априорная оценка (108) имеет место при условиях:

- 1)  $A(t)$  — самосопряженный, положительно определенный оператор,
- 2)  $A(t)$  липшиц-непрерывен по  $t$  с постоянной  $c_3$ ,

$$3) \tau < 1/(2c_3),$$

$$4) \sigma \geq \frac{1+\varepsilon}{4} - \frac{1}{\tau^2 \|A\|} \quad \text{и} \quad \sigma \geq 0.$$

**9. О регуляризации разностных схем.** Теорию устойчивости разностных схем, изложенную в этой главе, можно использовать для формулировки общего принципа (принципа регуляризации, А. А. Самарский [20]) для получения схем заданного качества, т. е. устойчивых, обладающих аппроксимацией и удовлетворяющих дополнительному требованию экономичности (минимума арифметических действий, достаточных для решения на ЭВМ получающихся разностных уравнений).

Требование экономичности применительно к нестационарным задачам математической физики обычно означает, что число арифметических действий, затрачиваемых для решения разностных уравнений при переходе со слоя на слой, пропорционально числу узлов сетки  $\omega_h$  (подробнее об экономичных схемах см. гл. VII).

При записи двухслойных и трехслойных схем в канонической форме

$$(E + \tau R) y_t + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad B = E + \tau R, \quad (109)$$

$$By_t + \tau^2 R y_{tt} + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (110)$$

было обнаружено, что ответственным за устойчивость является оператор  $R$  (*регуляризатор*). Достаточные условия устойчивости имеют простой вид

$$\left. \begin{aligned} R \geq \sigma_0 A, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|} \quad \text{для двухслойных схем,} \\ R > \frac{1}{4} A \quad \text{или} \quad R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A \quad \text{для трехслойных схем.} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Устойчивость или неустойчивость схемы (из исходного семейства) зависит только от выбора оператора  $R$ .

С точки зрения теории устойчивости произвол в выборе оператора  $R$  ограничен лишь двумя требованиями:

1) схема должна принадлежать исходному семейству, т. е.

$$B = E + \tau R > 0 \quad \text{для (109),} \quad R = R^* > 0 \quad \text{для (110),}$$

2) должны быть выполнены условия (111).

Для получения устойчивой схемы заданного качества необходимо добиться, чтобы она имела аппроксимацию заданного порядка и была экономичной, т. е. для решения уравнений  $(E + \tau R)\hat{y} = F$  (для (109)) или  $(B + 2\tau R)\hat{y} = F$  (для (110)) требовалось бы минимальное, в некотором смысле, число действий.

Заметим, прежде всего, что если схема (109) или (110) с некоторым оператором  $R$  устойчива, то и схема с оператором  $\tilde{R} \geq R$  также устойчива.

Обычно при построении разностных схем поступают так: пишется сначала схема, обладающая аппроксимацией нужного порядка и экономичная, после чего исследуется ее устойчивость.

Основная идея регуляризации разностных схем заключается в следующем: схемы заданного качества надо искать в классе устойчивых схем, отправляясь от некоторой исходной схемы и заменяя ее, путем изменения оператора  $R$ , другой схемой нужного качества, принадлежащей классу устойчивых схем.

Многие приемы построения схем частного вида можно трактовать как простейшие приемы регуляризации.

Запись схем в канонической форме удобна не только для проверки устойчивости, но и для оценки порядка аппроксимации. При  $R$  в (109) стоит множитель  $\tau$ , а в (110) — множитель  $\tau^2$ . Поэтому, если при изменении  $R$  в случае двухслойной схемы остается выполненным условие  $\|Ru_t\| = O(1)$  ( $u$  — решение исходного дифференциального уравнения), то погрешность аппроксимации при изменении  $R$  меняется на величину  $O(\tau)$ . В случае трехслойных схем условие  $\|Ru_{it}\| = O(1)$  гарантирует, что при регуляризации будут получаться схемы, погрешность аппроксимации которых отличается на величину  $O(\tau^2)$ . Поэтому трехслойными схемами удобно пользоваться для получения устойчивых схем второго порядка аппроксимации по  $\tau$ .

Основным является вопрос о выборе регуляризатора  $R$ . Так как условия устойчивости имеют вид операторных неравенств, то в качестве  $R$  естественно выбирать операторы возможно более простой структуры, энергетически эквивалентные оператору  $A$ . Пусть, например,  $A$  и  $A_0$  — энергетически эквивалентные операторы с постоянными  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (см. гл. IV, § 2, п. 4), так что

$$\gamma_1 A_0 \leq A \leq \gamma_2 A_0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0.$$

Полагая затем  $R = \sigma A_0$ , получим устойчивые схемы при  $\sigma \geq \sigma_0 \gamma_2$  (или  $\sigma \geq 0,5 \gamma_2$ ) в случае (109),  $\sigma > \frac{1}{4} \gamma_2$  в случае (110).

Простейшим видом  $R$  является оператор

$$R = \sigma E \quad (A_0 = E).$$

Условия устойчивости выполнены, если  $\sigma \geq \sigma_0 \|A\|$  для (109),  $\sigma > \frac{1}{4} \|A\|$  для (110).

Пример 1. Рассмотренная в § 2, п. 7 явная трехслойная схема Дюфорта и Франкела для уравнения теплопроводности принадлежит семейству схем

$$y_i^* + \sigma \tau^2 y_{it} + Ay = 0, \quad \sigma > \frac{1}{4} \|A\|, \quad A = A^* > 0. \quad (112)$$

В самом деле,  $Ay = -\Lambda y$ ,  $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$ ,  $\|A\| = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}$ ,  $\sigma = \frac{1}{h^2}$ , т. е. условие  $\sigma > \frac{1}{4} \|A\|$  выполнено. Эта схема обладает условной аппроксимацией  $O(h^2)$  при  $\tau = O(h^2)$ .

Нетрудно написать явную устойчивую схему для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2; \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

В этом случае  $\sigma = c_2/h^2$ ,  $Ay = -\Lambda y$ ,  $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$ .

Для многомерного уравнения теплопроводности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in G, \\ u|_\Gamma &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

$G$  — параллелепипед ( $0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ),  $0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2$ , следует положить

$$\sigma = c_2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}, \quad Ay = - \sum_{\alpha=1}^p (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha},$$

где  $h_\alpha$  — шаг сетки  $\omega_h = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in \bar{G}\}$  по  $x_\alpha$ .

Пусть  $A_0 = A_1 + A_2$ , где  $A_1$  и  $A_2 = A_1^*$  — сопряженные или «треугольные» (с треугольной матрицей) операторы, так что  $(A_0 y, y) = 2(A_1 y, y) = 2(A_2 y, y)$ . Полагая  $R = \sigma A_1$  или  $R = \sigma A_2$ , получим схему (109), устойчивую при  $\sigma \geq 2\gamma_2 \sigma_0$ .

Пример 2. Асимметричная схема В. К. Саульева [1] для уравнения теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  принадлежит семейству «треугольных» схем. Она имеет вид:

$$y_t + \frac{\sigma\tau}{h} y_{\bar{x}t} = \Lambda y, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x}. \quad (115)$$

Здесь  $Ay = -\Lambda y$ ,  $Ry = \frac{\sigma}{h} y_{\bar{x}}$ ,  $A_0 = A$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ . Схема (115) устойчива при

$$\sigma \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau}$$

и условно аппроксимирует уравнение с  $O(h)$  при  $\tau = O(h^2)$ .

Для уравнения (113) следует положить  $\gamma_2 = c_2$ ,  $Ay = -(ay_{\bar{x}})_x$ ,  $Ry = \frac{\sigma}{h} y_{\bar{x}}$  и взять  $\sigma \geq c_2 \left(1 - \frac{h^2}{2c_2\tau}\right)$ .

В случае задачи (114) имеем

$$Ry = \sigma \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}} y_{\bar{x}_{\alpha}} \quad \text{или} \quad Ry = -\sigma \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}} y_{x_{\alpha}}, \quad \gamma_2 = c_2,$$

$$\sigma \geq c_2 \left(1 - \frac{1}{2\tau\Delta}\right), \quad \Delta = c_2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}^2}.$$

Важно отметить, что при построении схемы Дюфорта и Франкела [1] в качестве исходной бралась явная неустойчивая схема

$$y_i^{\circ} = \Lambda y,$$

которая имеет аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ . Чтобы получить устойчивую схему, в выражении для  $\Lambda y$  значение  $y_i^i$  заменялось полусуммой  $0,5(y_i^{i+1} + y_i^{i-1})$ , что приводило к явной схеме (112) с  $\sigma = 1/h^2$ . Это преобразование, таким образом, соответствует введению регуляризатора простейшего типа.

В дальнейшем, после введения в практику формул прогонки, стали широко рассматривать двухслойные неявные схемы (схемы с весами), для которых  $R = \sigma A$ . Очевидно, что эти схемы являются частным случаем схем с  $R = \sigma A_0$ .

Укажем еще один способ выбора  $R$ . Пусть  $A_0 = A_1 + A_2$ ,  $A_2 = A_1^* > 0$ . Выберем  $R$  так, чтобы двухслойная схема имела факторизованный оператор

$$B = (E + \sigma\tau A_1)(E + \sigma\tau A_2) = E + \tau(\sigma A_0 + \sigma^2\tau A_1 A_2),$$

так что

$$R = \sigma A_0 + \sigma^2\tau A_1 A_2.$$

Так как  $(A_1 A_2 y, y) = (A_2 y, A_2 y) = \|A_2 y\|^2 > 0$ , то эта схема устойчива, если  $\sigma \geq \gamma_2 \sigma_0$ .

Переменяющиеся схемы В. К. Саульева [1] фактически эквивалентны схеме с факторизованным оператором  $B$  указанного вида.

Схемы с факторизованным оператором

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_2 = R_1^*$$

применяются в качестве итерационных схем для решения уравнений  $Ay = \varphi$  (см. гл. VIII).

**10. О работах по устойчивости разностных схем.** Остановимся кратко на работах, в которых рассматриваются принципиальные вопросы теории устойчивости разностных схем и получены достаточно общие результаты. Отметим, что данный обзор никоим образом не претендует на полноту. Многочисленные литературные ссылки читатель может найти в книгах В. К. Саульева [1],

С. К. Годунова и В. С. Рябенского [1], Рихтмайера и Мортонга [1], В. Вазова и Дж. Форсайта [1], Н. Н. Яненко [6], [7], Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко [1].

Понятие устойчивости разностной схемы, по-видимому, впервые встречается в статье Неймана и Рихтмайера [1] в 1950 г., где устойчивость определяется как ограниченность всех гармоник решения разностной задачи. Более подробно этот спектральный критерий изложен в обзоре О'Брайена, Хаймана и Каплана [1].

Независимо от этих работ в 1952 г. была опубликована статья В. С. Рябенского [1] (см. также В. С. Рябенский и А. Ф. Филиппов [1]), где даны математически строгие определения устойчивости для разностных схем, аппроксимирующих задачу Коши для системы уравнений с частными производными. Устойчивость определялась, по аналогии с понятием корректности для системы дифференциальных уравнений, как непрерывная зависимость в сеточной норме  $S$  или  $L_2$  решения разностной задачи от начальных данных, причем эта зависимость должна быть равномерной относительно шагов сетки. Было показано, что из устойчивости и аппроксимации следует сходимость разностной схемы.

Различные определения и способы исследования устойчивости были предложены в работах Н. Н. Меймана [1], Л. А. Люстерника [1], Коллатца [2], Джона [1], Дюфорта и Франкела [1] и др.

Существенный шаг был сделан в 1955 году А. Ф. Филипповым [1], который ввел общее понятие устойчивости разностной схемы как непрерывной зависимости (в разных нормах), равномерной относительно шагов сетки, решения разностной задачи от начальных и граничных данных и от правой части. Это определение включает в себя определения, предложенные ранее, и относится к схеме общего вида, не связанной с каким-либо конкретным уравнением. А. Ф. Филиппов вводит определение аппроксимации и показывает, что из устойчивости и аппроксимации следует сходимость схемы.

Работы В. С. Рябенского и А. Ф. Филиппова получили развитие в их книге (см. В. С. Рябенский и А. Ф. Филиппов [1]), где рассмотрены и некоторые способы исследования устойчивости, например, метод разделения переменных, который иллюстрируется на ряде конкретных примеров.

Другой подход к теории разностных схем дан в работе Лакса и Рихтмайера [1] (см. также Р. Д. Рихтмайер [1]), которые рассматривали в банаховом пространстве абстрактную задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(0) = u_0,$$

где  $u(t) \in H$  для всех  $t \in [0, t_0]$ ,  $\mathcal{A}$  — постоянный линейный оператор со всюду плотной областью определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \in H$ . Задаче Коши ставится в соответствие двухслойная схема

$$y_{n+1} = S_\tau y_n, \quad y_0 = u_0; \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $y_n = y(t_n) \in H$ ,  $t_n = n\tau$ ,  $S_\tau$  — ограниченный линейный оператор, зависящий от параметра  $\tau$ , с областью определения, совпадающей со всем пространством  $H$ . Функция  $y_n$  рассматривается как элемент того же пространства  $H$ , которому принадлежит решение  $\bar{u}(t)$  исходной задачи. (Предполагается, что шаги  $h$  по другим переменным являются функциями шага  $\tau$  по времени,  $h = h(\tau)$ .)

Устойчивость схемы определяется как равномерная ограниченность степеней оператора перехода  $S_\tau$ :

$$\|S_\tau^n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, n\tau \leq t_0,$$

где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $n$  и  $\tau$ . Отсюда сразу следует оценка

$$\|y_n\| \leq M \|y_0\|,$$

выражающая устойчивость по начальным данным в  $H$ .

В работе Лакса и Рихтмайера [1] было показано, что если исходная задача корректна и схема аппроксимирует эту задачу, то устойчивость необходима и достаточна для сходимости схемы.

В книге Р. Д. Рихтмайера [1] для периодической задачи Коши получены некоторые необходимые и некоторые достаточные условия устойчивости. Эти условия сформулированы в виде ограничений на спектр преобразования Фурье (называемого также символом или матрицей перехода) оператора перехода  $S$ .

Работа Лакса и Рихтмайера [1] положила начало ряду исследований по спектральной теории устойчивости. Так, Крейс [2] получил необходимые и достаточные условия устойчивости (ограниченности спектра степеней матрицы перехода) для широкого класса разностных схем. Эти же вопросы рассматривали Буханан [1], Мортон и Шехтер [1], которые упростили некоторые доказательства Крейса [2]. Результаты работ Крейса [2], Буханана [1], Мортон и Шехтера [1] изложены в книге Рихтмайера и Мортон [1].

Ряд необходимых признаков устойчивости несамосопряженных краевых задач получен с помощью изучения спектра семейства разностных операторов в работах С. К. Годунова и В. С. Рябенского [1]—[3] и В. С. Рябенского [2], [3].

Устойчивость разностных схем для гиперболических систем первого порядка изучалась в работах О. А. Ладыженской [1], С. К. Годунова [1], [2], Лакса [1], Лакса и Вендрофа [1]—[3], Лакса и Ниренберга [1], Крейса [5], Стренга [1], Келлера и Томэ [1], Томэ [1], Л. С. Франка [1].

Исследование устойчивости разностных схем в норме  $C$  было проведено в работах С. И. Сердюковой [1]—[3], И. В. Коновальцева [1], [2], М. В. Федорюка [1], Томэ [4], Видланда [2].

Наряду со спектральными методами исследования устойчивости развивался, применительно к конкретным схемам, энергетический метод, позволивший освободиться от детального изучения спектральных свойств операторов разностных схем. Начало этому направлению фактически положила работа Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви [1].

Априорные оценки разностных схем простейшего вида, в связи с изучением вопроса о разрешимости смешанных задач для различных уравнений и систем уравнений в частных производных, были получены энергетическим методом О. А. Ладыженской [2], В. И. Лебедевым [1] (см. также обзорную статью А. М. Ильина, А. С. Калашникова и О. А. Олейник [1]).

Усовершенствование аппарата энергетических оценок и применение его для широких классов разностных схем (для параболических и гиперболических уравнений) было дано в работах Лиза [1]—[4] и А. А. Самарского [1], [2]. Примерно в это же время ряд априорных оценок для разностных краевых задач был получен Крейсом [4], Л. И. Камыниным [1], Дугласом [3].

Позже энергетический метод нашел широкое применение при исследовании разностных схем для многомерных задач математической физики. Укажем в связи с этим работы В. Б. Андреева [1]—[6], И. Г. Белухиной [1], [2], Е. Г. Дьяконова [3]—[5], [8], А. Н. Коновалова [4], А. А. Самарского [4]—[12], [16], [21], И. В. Фрязинова [2]—[6].

Двухслойные и трехслойные разностные схемы для эволюционной задачи Коши изучались с помощью метода энергетических неравенств в работе Равьярта [1].

Ряд новых результатов в теории устойчивости разностных схем получен в работах Видланда [1], Вендрова [1], Миллера и Стренга [1], Томэ [3], [5], Л. С. Франка [3].

Изложение теории устойчивости разностных схем, данное в главах V—VI, основано на работах А. А. Самарского [20], [21], [23], [24]. Развитию этого направления посвящены работы А. В. Гулина [1], А. В. Гулина и А. А. Самарского [1], А. А. Самарского [28], А. А. Самарского и А. В. Гулина [1].

## Задачи к главе VI

Для иллюстрации общей теории устойчивости мы приведем ряд простейших разностных схем для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t \leq t_0, \quad 0 < x < 1; \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad 0 \leq x_\alpha \leq 1, \quad \alpha = 1, 2; \quad u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \quad (2)$$

с нулевыми граничными условиями.

Предварительно напомним правила, которыми следует руководствоваться при исследовании конкретных разностных схем.

1) Вводится пространство  $H_h$  сеточных функций, заданных на сетке  $\omega_h$  и удовлетворяющих однородным граничным условиям (в случае первой краевой задачи — обращающихся в нуль на границе  $\gamma_h$  сетки), определяется скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$ .

2) Разностная схема приводится к каноническому виду. Двухслойная схема имеет канонический вид

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j. \quad (3)$$

Трехслойная схема имеет канонический вид

$$B \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} + \tau^2 R \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} + Ay^j = \varphi^j. \quad (4)$$

При этом определяются операторы  $B$ ,  $R$  и  $A$  схемы.

Каноническая форма записи схем удобна не только для проверки устойчивости, но и для оценки порядка аппроксимации.

3) После того, как операторы схемы найдены, исследуются их свойства как линейных операторов в пространстве  $H_h$  (положительность, самосопряженность и т. д.).

4) Проверятся выполнение достаточных условий устойчивости для данной схемы. Эти условия имеют вид:

а) для двухслойных схем:

$$B > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \geq 0,5\tau A \quad (5)$$

(устойчивость в  $H_A$ ), либо

$$B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \geq 0,5\tau A \quad (6)$$

(устойчивость в  $H_B$  и  $H_A$ ).

б) для трехслойных схем:

$$B \geq 0, \quad R = R^* > 0, \quad A = A^* > 0, \quad (7)$$

$$R > \frac{1}{4} A, \quad (8)$$

или  $R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое число.

5) Если достаточные условия устойчивости для данной схемы выполнены, то она устойчива и для нее можно пользоваться априорными оценками, полученными в гл. VI.

Сделаем некоторые замечания. Следует обратить внимание на возможность использования другой формы записи двухслойных схем:

$$By^{j+1} = Cy^j + \tau\varphi^j, \quad \text{где } C = B - \tau A, \quad A = (B - C)/\tau \quad (9)$$



и трехслойных схем:

$$B_0 y^{j+1} + B_1 y^j + B_2 y^{j-1} = 2\tau \varphi^j. \quad (10)$$

Сравнивая (4) и (10), находим

$$B_0 = B + 2\tau R, \quad B_1 = 2\tau(A - 2R), \quad B_2 = 2\tau R - B, \quad (11)$$

$$R = \frac{1}{4\tau}(B_0 + B_2), \quad A = \frac{1}{2\tau}(B_0 + B_1 + B_2), \quad B = \frac{1}{2}(B_0 - B_2). \quad (12)$$

Достаточные условия устойчивости (5) эквивалентны условиям

$$(B - C) = (B - C)^* > 0, \quad B + C \geq 0. \quad (13)$$

Для трехслойной схемы (4) или (10) условия (7), (8) эквивалентны условиям:

$$\left. \begin{aligned} B_0 + B_2 = (B_0 + B_2)^*, \quad B_1 = B_1^*, \quad B_0 - B_2 \geq 0, \\ B_2 - B_1 + B_0 > 0, \quad B_2 + B_1 + B_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В ряде случаев удобно пользоваться записью схем (3) и (4) в виде (9) и (10), после чего проверять достаточные условия устойчивости (13) и (14) соответственно.

Напомним достаточные условия (вытекающие из условий (5) или (8)) устойчивости схем с весами.

Пусть дана двухслойная схема с весами

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j) = \varphi^j, \quad (15)$$

где  $A > 0$  — несамосопряженный оператор. Тогда схема устойчива при  $\sigma \geq 0,5$ . Если, кроме того, дано, что

$$\|Ax\|^2 \leq \Delta(Ax, x), \quad (16)$$

то схема устойчива в  $H$  при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\Delta}. \quad (17)$$

Наконец, если  $A = A^* > 0$  и  $A$  — постоянный оператор, то  $\Delta = \|A\|$  и схема (15) устойчива в  $H$  и  $H_A$  при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}. \quad (18)$$

Для трехслойной схемы с весами:

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} + A(\sigma_1 y^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y^j + \sigma_2 y^{j-1}) = \varphi^j, \quad (19)$$

где  $A > 0$  — несамосопряженный оператор,  $\|Ax\|^2 \leq \Delta(Ax, x)$ , достаточное условие устойчивости имеет вид

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau\Delta}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon > 0. \quad (20)$$

Обратимся теперь к схемам для уравнений (1) и (2). На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  вводится равномерная сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$$

с шагом  $h = 1/N$ . Пусть  $H_h$  — пространство сеточных функций, определенных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе (при  $x = 0, x = 1$ ),

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

— скалярное произведение и норма в  $H_h$ .

В случае задачи (2) в квадрате вводим сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h); \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N\},$$

и пространство  $H_h$  функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю при  $i_1 = 0, i_1 = N, i_2 = 0, i_2 = N$  со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i_1, i_2=1}^{N-1} y_{i_1, i_2} v_{i_1, i_2} h^2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

В следующих задачах требуется привести к каноническому виду и указать условия устойчивости разностных схем.

$$1. \quad \frac{1}{12} \frac{y_{i+1}^{l+1} - y_i^{l+1}}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{y_i^{l+1} - y_i^l}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{y_{i-1}^{l+1} - y_{i-1}^l}{\tau} = \\ = \frac{1}{2h^2} [(y_{i-1}^{l+1} - 2y_i^{l+1} + y_{i+1}^{l+1}) + (y_{i-1}^l - 2y_i^l + y_{i+1}^l)]$$

Ответ.  $y_t - \sigma \tau \Delta y_t = \Delta y$ , или

$$(E + \sigma \tau A) y_t + A y = 0,$$

где  $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ ,  $\Delta y = y_{\bar{x}x}$ ,  $A y = -\Delta y$ .

Схема устойчива в  $H$  при любых  $h$  и  $\tau$  и имеет погрешность аппроксимации  $O(h^4 + \tau^2)$ .

Указание. Следует преобразовать левую часть уравнения, для чего воспользоваться соотношениями

$$v_{i+1} + 10v_i + v_{i-1} = (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + 12v_i = h^2 \Delta v_i + 12v_i, \\ v^{l+1} = v^l + \tau v_t^l.$$

$$2. \quad (1 + \theta) \frac{y_i^{l+1} - y_i^l}{\tau} - \theta \frac{y_i^l - y_{i-1}^{l-1}}{\tau} = \Delta y_t^{l+1}.$$

$$\text{Ответ. } (E - \tau \Lambda) y_t + \left[ (0,5 + \theta) \tau E - \frac{\tau^2}{2} \Lambda \right] y_{\bar{t}t} = \Delta y.$$

Схема устойчива при  $\theta > -\frac{1}{2} - \frac{\tau \delta}{4}$ ,  $\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$ .

Указание. Сравнение с (4) дает

$$B = E + \tau A, \quad R = \frac{1}{2} A + \frac{1 + 2\theta}{2\tau} E.$$

Отсюда следует:

$$R - \frac{1}{4} A = \frac{1}{4} A + \frac{1 + 2\theta}{2\tau} E \geq \left( \frac{1}{4} \delta + \frac{1 + 2\theta}{2\tau} \right) E > 0$$

при  $\theta > -1/2 - \tau \delta / 4$ , так как  $A \geq \delta E$ .

$$3. 2\gamma y_i^{j+1} = (\gamma - 0,5)(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + 0,5(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j), \quad \gamma = \tau/h^2.$$

Ответ.  $(E - \sigma\tau\Lambda)y_i = \Lambda y$ ,  $\sigma = 1 - 1/(2\gamma)$ .

Схема устойчива при  $\gamma \geq 0,5$  и имеет погрешность аппроксимации  $O(h^2 + \tau)$ .

$$4. y_i^{j+1} = \frac{1}{5+6\gamma} [(3\gamma - 0,5)(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + (5 - 6\gamma)y_i^j + (3\gamma + 0,5)(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j)], \\ \gamma = \tau/h^2.$$

Ответ. Та же схема, что и в задаче 1.

$$5. y_{i,k}^{j+1} = \frac{1}{\omega + \alpha + \beta} [\alpha y_{i+1,k}^{j+1} + \beta y_{i,k+1}^{j+1} + (1 - \alpha)y_{i+1,k}^j + \\ + (1 - \beta)y_{i,k+1}^j - (4 - \omega - \alpha - \beta)y_{i,k}^j + y_{i-1,k}^j + y_{i,k-1}^j], \\ \omega = h^2/\tau.$$

Ответ.  $y_i - \frac{\tau}{h}(\alpha y_{x_i,t} + \beta y_{x_i,t}) = \Lambda y$ , где  $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$ . Условие устойчивости  $\alpha + \beta \geq 2 - 0,5h^2/\tau$ . Если  $\alpha = O(1)$ ,  $\beta = O(1)$ ,  $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$ , то схема аппроксимирует уравнение (2) с погрешностью  $O(\tau + h^2 + \tau/h)$ .

$$6. y_i^{j+1} = \left(\frac{7}{6} - 3\gamma\right)y_i^j + \frac{1}{2}\left(3\gamma - \frac{1}{6}\right)(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) - \\ - \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{6}\right)(y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}), \quad \gamma = \tau/h^2.$$

Ответ.  $B y_i^0 + \tau^2 R y_{it} + A y = 0$ ,

где

$$B = E - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6\gamma} - 1\right)\tau A, \quad R = \frac{1}{2\tau}E + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6\gamma} - 1\right)A, \quad A y = -y_{\bar{x}x}.$$

Схема устойчива при  $\gamma \leq 1/3$ .

$$7. 10y_i^{j+1} = 3(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + 2(y_i^j + y_i^{j-1}), \quad \tau = h^2/4.$$

Ответ.  $y_i^0 + \frac{\tau}{3}y_{it} = \Lambda y$ . Схема устойчива.

$$8. y_i^{j+1} = \frac{1}{40} [2y_{i-1}^{j-1} + 32y_i^j + 3(y_{i-1}^{j-1} + y_{i+1}^{j-1})], \quad \tau = h^2/16.$$

Ответ. Схема приводится к виду (4) с

$$B = E - \tau A, \quad R = \frac{1}{3\tau}E + 0,5A, \quad A y = -y_{\bar{x}x}$$

и устойчива.

$$9. y_{i,k}^{j+1} - \frac{1}{4}(y_{i-1,k}^{j+1} + y_{i+1,k}^{j+1}) = \frac{1}{4}(y_{i,k-1}^j + y_{i,k+1}^j), \quad \tau = 0,5h^2.$$

Ответ. Схема имеет канонический вид (3), где  $A = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ ,  $B = E - \tau\Lambda_1$ ,  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , устойчива и аппроксимирует уравнение (2) с погрешностью  $O(\tau + h^2) = O(h^2)$ .

$$10. \frac{1}{12} \frac{1,5y_{i+1}^{j+1} - 2y_{i+1}^j + 0,5y_{i+1}^{j-1}}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{1,5y_i^{j+1} - 2y_i^j + 0,5y_i^{j-1}}{\tau} + \\ + \frac{1}{12} \frac{1,5y_{i-1}^{j+1} - 2y_{i-1}^j + 0,5y_{i-1}^{j-1}}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1}.$$

О т в е т. Схема имеет вид (4), где

$$B = E + \left(1 - \frac{h^2}{12\tau}\right) \tau A, \quad R = \frac{1}{\tau} E + \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}\right) A, \quad Ay = -y_{\bar{x}x},$$

абсолютно устойчива, погрешность аппроксимации на решении уравнения (1) равна  $O(\tau^2 + h^4)$ .

У к а з а н и е. Воспользоваться соотношением

$$\frac{3}{2} v^{l+1} - 2v^l + \frac{1}{2} v^{l-1} = \tau v_0^l + \tau^2 v_{tt}^l.$$

11. Рассмотрим задачу для системы уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{ij} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$u^{(i)}(0, t) = 0, \quad u^{(i)}(1, t) = 0, \quad u^{(i)}(x, 0) = u_0^{(i)}(x).$$

Известно, что

$$c_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n k_{ij} \xi_i \xi_j \leq c_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Пусть

$$\Lambda_{ij} y^{(j)} = (a_{ij} y_{\bar{x}x}^{(j)})_x, \quad a_{ij}(x, t) = k_{ij}(x_{l-1/2}, t),$$

$$\Lambda^0 y^{(i)} = y_{\bar{x}x}^{(i)}, \quad Ry^{(i)} = -\sigma \Lambda^0 y^{(i)}, \quad \sigma > \frac{c_2}{4},$$

$$Ay^{(i)} = - \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} y^{(j)}.$$

Показать, что схема

$$y_0^{(i)} + \tau^2 Ry_{tt}^{(i)} + Ay^{(i)} = 0$$

- а) устойчива при любых  $h$  и  $\tau$ ,  
 б) имеет точность  $O(h^2 + \tau^2)$ .

## Глава VII

# ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Одним из важных достижений в вычислительной математике является разработка экономичных разностных методов для решения многомерных (с несколькими пространственными переменными  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ) уравнений в частных производных. В настоящее время имеется большое число экономичных схем для многомерных уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов.

Экономичным методам посвящены работы В. Б. Андреева [1]—[6], Бейкера и Олифанта [1], К. А. Багриновского и С. К. Годунова [1], Вашпресса [3], Гана [1], Е. Г. Дьяконова [1]—[8], Дугласа [1], [4], Дугласа и Гана [2], А. Н. Коновалова [2]—[5], Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко [1], Писмена и Рэкфорда [1], А. А. Самарского [4]—[16], [19], В. К. Саульева [1], И. В. Фрязинова [2]—[6], Хаббарда [1], [2], Н. Н. Яненко [1]—[7] и др.

Мы суммируем результаты этих работ, проводя изложение с единой точки зрения и опираясь на общую теорию устойчивости, изложенную в гл. VI. Основное внимание будет уделено принципиальным вопросам теории экономичных разностных схем.

### § 1. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) для уравнения теплопроводности

1. Об экономичных схемах. Выясним на простейших примерах предпосылки к написанию экономичных разностных схем. Рассмотрим  $p$ -мерное уравнение теплопроводности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad x \in G, \\ u|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad t \in (0, t_0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пусть  $G = G_{0p}$  —  $p$ -мерный куб,  $(0 \leq x_\alpha \leq 1, \alpha = 1, 2, \dots, p)$ ,  $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, \dots, i_p h_p) \in G\}$  — кубическая сетка с шагом  $h$  по всем  $x_\alpha, \alpha = 1, \dots, p$ ,  $\bar{\omega}_\tau$  — сетка с шагом  $\tau = t_0/n_0$  на отрезке  $0 \leq t \leq t_0$ .

Оператор  $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$  аппроксимируем разностным оператором  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ , так что  $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha$ . Напишем двухслойную схему с весами

$$\left. \begin{aligned} y_t &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y), \quad x \in \omega_h, \quad 0 \leq t = n\tau < t_0, \\ y|_{V_h} &= 0, \quad y(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Схема (2), как было показано в гл. VI, § 1, устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4p\tau} = \sigma_0.$$

Полагая  $\sigma = 0$ , получим явную схему

$$y_t = \Lambda y \quad \text{или} \quad \hat{y} = y + \tau \Lambda y, \quad (3)$$

устойчивую при условии  $\tau \leq 0,5h^2/p$ .

Если (1) — уравнение с переменными коэффициентами, т. е.

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < k_\alpha \leq c_2,$$

то

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha, \quad 0 < a_\alpha \leq c_2$$

и явная схема (3) устойчива при  $\tau \leq 0,5h^2/(pc_2)$ .

Отсюда видно, что допустимый шаг  $\tau$  для явной схемы надо уменьшать с ростом числа измерений и ростом максимума коэффициента теплопроводности. Последнее требование является особенно жестким в случае задач с сильно меняющимися коэффициентами. По этой причине использование явных схем для решения не только многомерных, но и одномерных ( $p = 1$ ) задач, часто оказывается нецелесообразным. С другой стороны, явная схема обладает тем достоинством, что решение  $\hat{y} = y_{n+1}$  на новом слое  $t_{n+1} = t_n + \tau$  находится по явной формуле (3) и при этом в каждом узле сетки  $\omega_h$  затрачивается конечное число действий, так что общее число арифметических операций при переходе со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки  $\omega_h$  (есть величина  $O(1/h^p)$ ).

Рассмотрим теперь чисто неявную схему с  $\sigma = 1$ . Она устойчива при любых  $\tau$  и  $h$ . Для определения  $\hat{y}$  получаем задачу

$$\hat{y} - \tau \Lambda \hat{y} = y, \quad y|_{V_h} = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

Для решения этой системы  $1/h^p$  уравнений, например, методом исключения Гаусса требуется затратить  $O(1/h^{3p-2})$  действий (если учесть при этом специальный вид матрицы  $E - \tau \Lambda$ ).

Итак, явная схема требует небольшого числа действий, но ее устойчивость имеет место при достаточно малом  $\tau$ ; неявная схема безусловно устойчива, но она требует большого числа арифметических действий.

Возникает вопрос: можно ли построить схему, сочетающую лучшие качества явной и неявной схем, т. е.

1) безусловно устойчивую (как неявная схема), 2) требующую для перехода со слоя на слой затраты (как и для явной схемы) числа арифметических действий  $Q$ , пропорционального числу узлов сетки  $\omega_h$ , так что  $Q = O(1/h^p)$ .

Такие схемы принято называть *экономичными*.

Приведем один пример для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, показывающий, что существует неявная схема, требующая меньшего числа действий (более экономичная), чем явная схема.

**Пример** (А. А. Самарский [9]). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

где  $u = (u^{(1)}(t), \dots, u^{(m)}(t))$  — вектор,  $A = (a_{ij})$  — матрица. Предполагаем, что  $A$  симметрична и положительно определена. Явная схема  $y_{n+1} = y_n - \tau A y_n$  при переходе со слоя на слой требует  $2m^2 + 2m$  арифметических действий.

Пусть  $A^- = (a_{ij}^-)$  — нижняя,  $A^+ = (a_{ij}^+)$  — верхняя треугольные матрицы, причем  $a_{ii}^- = a_{ii}^+ = 0,5a_{ii}$ . Обе эти матрицы (операторы) положительно определены в смысле скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  в  $R_m$ , так как  $A^- = (A^+)^*$  и  $(Ax, x) = (A^+x, x) + ((A^+)^*x, x) = 2(A^+x, x) = 2(A^-x, x)$ . Рассмотрим схему

$$\frac{y_{2n+1} - y_{2n}}{\tau} + A^- y_{2n+1} + A^+ y_{2n} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{y_{2n+2} - y_{2n+1}}{\tau} + A^- y_{2n+1} + A^+ y_{2n+2} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Для определения  $y_{2n+1}$  и  $y_{2n+2}$  надо обратить треугольные матрицы  $(E + \tau A^-)$  и  $(E + \tau A^+)$ .

Нетрудно показать, что написанная схема абсолютно (при любых  $\tau > 0$ ) устойчива. Исключим из (4) и (5)  $y_{2n+1}$ . Вычитая (5) из (4), найдем

$$2y_{2n+1} = y_{2n} + y_{2n+2} + \tau A^+ (y_{2n+2} - y_{2n}).$$

После подстановки этого выражения в (5), получим схему

$$B \frac{y_{2n+2} - y_{2n}}{2\tau} + Ay_{2n} = 0, \quad A = A^- + A^+, \quad (6)$$

оператор которой

$$B = (E + \tau A^-)(E + \tau A^+)$$

есть произведение двух сопряженных друг другу «треугольных» операторов ( $B$  — факторизованный оператор), так как  $A^+ = (A^-)^*$ .

Очевидно, что  $B$  — самосопряженный оператор. Остается проверить выполнение достаточного условия устойчивости:

$$B - 0,5(2\tau A) = E + \tau A + \tau^2 A^- A^+ - \tau A > E,$$

так как  $A^- A^+ > 0$  ( $(A^- A^+ x, x) = \|A^+ x\|^2 > 0$ ). Схема (6) абсолютно устойчива. Она имеет, очевидно, второй порядок точности.

Пусть  $\tilde{A}^\mp$  — треугольные матрицы, отличающиеся от  $A^\mp$  только тем, что элементы на главной диагонали заменены нулями. Будем запоминать при решении уравнения (4) вектор  $\tilde{A}^- y_{2n+1}$ , а при решении уравнения (5) — вектор  $\tilde{A}^+ y_{2n+2}$ . Тогда для схемы (4), (5) число действий, затраченное при переходе от слоя  $t_{2n}$  к слою  $t_{2n+2}$  равно  $Q_1 = 2m^2 + 12m$ , в то время, как для явной схемы оно равно  $Q_0 = 4m^2 + 4m$ , т. е.  $Q_1 \leq Q_0$  при  $m \geq 4$ .

**2. Схема переменных направлений (продольно-поперечная схема).** Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad x \in G_{02}, \quad t \in (0, t_0], \\ u|_{\Gamma} &= \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ Lu &= \Delta u = (L_1 + L_2)u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Область  $\bar{G}_{02} = \bar{G}_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  — прямоугольник со сторонами  $l_1$  и  $l_2$ ,  $\Gamma$  — граница  $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$ .

В  $\bar{G}_0$  построим равномерную по  $x_\alpha$  сетку  $\bar{\omega}_h$  с шагами  $h_1 = l_1/N_1$ ,  $h_2 = l_2/N_2$ . Пусть  $\gamma_h$  — граница сеточной области  $\bar{\omega}_h$ , содержащая все узлы на сторонах прямоугольника, кроме его вершин,  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ . Оператор  $L_\alpha$  заменим разностным оператором  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha y = y_{\dot{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$



Напомним, что в случае одномерного уравнения теплопроводности неявная схема на каждом слое приводит к разностной краевой задаче вида

$$\left. \begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad A_i > 0, \quad B_i > 0, \\ C_i &\geq A_i + B_i, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

которая решается стандартным методом прогонки с затратой числа  $O(1/h) = O(N)$  действий, пропорционального числу  $N$  узлов сетки  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N\}$ .

Обратимся к нашей двумерной задаче в прямоугольнике. Сетку  $\bar{\omega}_h$  можно представить как совокупность узлов, расположенных на строках  $i_2 = 0, 1, \dots, N_2$ , или как совокупность узлов, расположенных на столбцах  $i_1 = 0, 1, \dots, N_1$ . Всего имеется  $N_1 + 1$  столбцов и  $N_2 + 1$  строк. Число узлов в каждой строке равно  $N_1 + 1$ , а в каждом столбце имеется  $N_2 + 1$  узлов.

Если на каждой строке (или столбце) решать задачу вида (8) методом прогонки при фиксированном  $i_2$  (или  $i_1$ ), то для отыскания решения на всех строках (или столбцах), т. е. во всех узлах сетки, понадобится число  $O(N_1 N_2)$  арифметических действий, пропорциональное числу узлов двумерной сетки. Основная идея большинства экономичных методов и состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач вида (8) вдоль строк и вдоль столбцов.

Весьма четко эту алгоритмическую идею выражает неявная схема переменных направлений (продольно-поперечная схема), предложенная Писменом и Рекфордом [1] и Дугласом [1] в 1955 году. Наряду с основными значениями искомой сеточной функции  $y(x, t)$ , т. е. с  $y = y^n$  и  $\hat{y} = y^{n+1}$ , вводится промежуточное значение  $\bar{y} = y^{n+1/2}$ , которое можно формально рассматривать как значение  $y$  при  $t = t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$ . Переход от слоя  $n$  к слою  $n+1$  совершается в два этапа с шагами  $0,5\tau$ :

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^n + \varphi^n, \quad (9)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi^n.$$

Эти уравнения пишутся во всех внутренних узлах  $x = x_i$  сетки  $\omega_h$  и для всех  $t = t_n > 0$ . Первая схема неявна по направлению  $x_1$  и явна по  $x_2$ , вторая схема явна по  $x_1$  и неявна по  $x_2$ . К уравнениям (9), (10) надо добавить начальные условия

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h \quad (11)$$

и разностные краевые условия, например, в виде

$$y^{n+1} = \mu^{n+1} \quad \text{при } i_2 = 0 \quad \text{и } i_2 = N_2, \quad (12)$$

$$y^{n+1/2} = \bar{\mu} \quad \text{при } i_1 = 0 \quad \text{и } i_1 = N_1, \quad (13)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} (\mu^{n+1} + \mu^n) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (\mu^{n+1} - \mu^n). \quad (14)$$

Смысл краевого условия (12) ясен, а условие (13), определяющее граничное значение  $\bar{y}$ , будет пояснено ниже. Отметим, что это условие было указано в более поздних работах (см., например, С. А. Кряквина [1]).

Таким образом, разностная краевая задача (9)–(14), соответствующая задаче (7), поставлена.

Остановимся на методе решения этой задачи. Перепишем (9) и (10) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\tau} \bar{y} - \Lambda_1 \bar{y} &= F, & F &= \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \varphi, \\ \frac{2}{\tau} \hat{y} - \Lambda_2 \hat{y} &= \bar{F}, & \bar{F} &= \frac{2}{\tau} \bar{y} + \Lambda_1 \bar{y} + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Условимся о следующих обозначениях:

$$x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), \quad F = F_{i_1 i_2}, \quad y = y_{i_1 i_2},$$

при этом, если в уравнении один из индексов фиксирован, то мы его не пишем. Тогда (15) можно записать в виде (8), т. е.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{i_1-1} - 2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} \right) \bar{y}_{i_1} + \frac{1}{h_1^2} y_{i_1+1} &= -F_{i_1}, \\ i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \bar{y} = \bar{\mu} &\text{ при } i_1 = 0, N_1, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{i_2-1} - 2 \left( \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} \right) \hat{y}_{i_2} + \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{i_2+1} &= -\bar{F}_{i_2}, \\ i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \hat{y} = \hat{\mu} &\text{ при } i_2 = 0, N_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Пусть задано  $y = y^n$ . Тогда вычисляем  $F$ , затем методом прогонки вдоль строк  $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  решаем задачу (16) и определим  $\bar{y}$  во всех узлах сетки  $\omega_h$ , после чего вычисляем  $\bar{F}$  и решаем задачу (17) вдоль столбцов  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ , определяя  $\hat{y} = y^{n+1}$ . При переходе от слоя  $n + 1$  к слою  $n + 2$  процедура счета повторяется, т. е. происходит все время чередование направлений.

**3. Устойчивость.** Для исследования устойчивости схемы (9)–(14) проведем исключение промежуточного значения  $\bar{y}$ . Вычитая из (9) уравнение (10), находим

$$2\bar{y} = \hat{y} + y - 0,5\tau\Lambda_2(\hat{y} - y), \quad x \in \omega_h. \quad (18)$$

Подставим (18) в (9):

$$\frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{1}{2} \Lambda_2 (\hat{y} - y) = \frac{1}{2} \Lambda_1 (\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (\hat{y} - y) + \Lambda_2 y + \varphi. \quad (19)$$

Учитывая, что  $\hat{y} = y + \tau y_t$ , преобразуем (19) к каноническому виду

$$(E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y + \varphi. \quad (20)$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что формула (18) должна выполняться и при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$  (иначе значение  $(\Lambda_1 \bar{y})_{t_1}$  не определено при  $i_1 = 1$  и  $i_1 = N_1 - 1$ ). Так как  $y = \mu$ ,  $\hat{y} = \hat{\mu}$  при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ , то из (18) следует

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \mu) - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \mu_t = \bar{\mu} \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = l_1,$$

что совпадает с краевым условием (13), (14). Тем самым доказано, что решение задачи (9) — (14) удовлетворяет уравнению (20) при дополнительных условиях

$$y|_{\gamma_h} = \mu, \quad \hat{y}|_{\gamma_h} = \hat{\mu}, \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (21)$$

С другой стороны, решение задачи (20), (21) является также решением задачи (9) — (14). В самом деле, введем  $\bar{y}$  по формуле (18), найдем из (18)

$$(E - 0,5\tau\Lambda_2)\hat{y} = 2\bar{y} - (E + 0,5\tau\Lambda_2)y$$

и подставим это выражение в (20); после несложных преобразований получим уравнение (9). Из него и из (18) следует (10). Тем самым доказана эквивалентность задач (9) — (14) и (20), (21). Она имеет место при согласованном задании граничных значений  $\bar{y}$  по формулам (13), (14). Исследование схемы (9) — (14) можно заменить исследованием схемы (20), (21) «в целых шагах».

Применим общую теорию устойчивости двухслойных схем. Краевые условия предполагаются однородными, т. е. рассматривается задача

$$\left. \begin{aligned} (E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)y_t &= \Lambda y + \varphi, \quad t \geq 0, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad y|_{\gamma_h} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Введем пространство  $H$  сеточных функций, заданных на  $\omega_h$  и обращающихся в нуль на  $\gamma_h$ , со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)v(x)h_1h_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_1h_1, i_2h_2)v(i_1h_1, i_2h_2)h_1h_2$$

и нормой  $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ . Будем обозначать  $A = -\Lambda = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ . Оператор  $A$  самосопряжен и положителен в  $H$ .

Норма в энергетическом пространстве  $H_A$  имеет вид

$$\|y\|_A^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1}(i_1 h_1, i_2 h_2))^2 h_1 h_2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_2}(i_1 h_1, i_2 h_2))^2 h_1 h_2$$

или

$$\|y\|_A^2 = \|y_{\bar{x}_1}\|_{(1)}^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_{(2)}^2. \quad (23)$$

Рассматривая  $y = y(t)$  как абстрактную функцию  $t \in \omega_\tau$  со значениями в  $H$ , запишем схему (22) в виде

$$By_t + Ay = \varphi(t), \quad 0 \leq t = n\tau < t_0, \quad y(0) = u_0, \quad (24)$$

где

$$B = (E + 0,5\tau A_1)(E + 0,5\tau A_2), \quad A_\alpha = -\Lambda_\alpha, \quad A = A_1 + A_2.$$

Операторы  $A_1$  и  $A_2$  — самосопряженные, положительные и перестановочные (в силу того, что исходная область — прямоугольник). Поэтому и  $A_1 A_2 > 0$ . Из (24) видно, что

$$B > E + 0,5\tau A, \quad (25)$$

т. е. схема (24) устойчива в  $H_A$ .

Действительно

$$B - 0,5\tau A = \left(E + \frac{\tau}{2} A + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2\right) - \frac{\tau}{2} A = E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 > E.$$

Из условия (25) следует, что для схемы (24) верна теорема 8 из гл. VI, § 1 при  $\varepsilon = 1$ , в силу которой решение задачи (22) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t + \tau)\|_A \leq \|y(0)\|_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Нетрудно получить априорную оценку

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y(0)\| + \left( \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{A^{-1}}^2 \right)^{1/2}. \quad (27)$$

В самом деле, применим к обеим частям уравнения (24) оператор  $A^{-1} > 0$ :

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{A} = E, \quad \tilde{\varphi} = A^{-1}\varphi, \quad \tilde{B} = A^{-1} + \frac{\tau}{2}E + \frac{\tau^2}{4}A^{-1}A_1A_2. \quad (28)$$

Так как  $A_1, A_2, A^{-1} > 0$  — перестановочные и самосопряженные операторы, то  $A^{-1}A_1A_2 > 0$  и  $\tilde{B} > A^{-1} + 0,5\tau E$ . Поэтому, в силу теоремы 10 из гл. VI, § 1 верна оценка (27).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Схема (22) устойчива по начальным данным и по правой части. Для решения задачи (22) верны априорные оценки (26), (27).

4. Сходимость и точность. Изучение сходимости и точности схемы (9) — (14), в силу ее эквивалентности схеме (20), (21), будем проводить для задачи (20), (21). Пусть  $u = u(x, t)$  — решение задачи (7),  $y = y(x_i, t_n)$  — решение задачи (9) — (14) и (20), (21). Подставляя  $y = z + u$  в (20), получим для погрешности схемы (20), (21) задачу

$$\left. \begin{aligned} Bz_t &= \Lambda z + \psi, & x \in \omega_h, & 0 \leq t = n\tau < t_0, \\ z|_{V_h} &= 0, & z(x, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$B = (E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)$$

и  $\psi$  — погрешность аппроксимации на решении, равная

$$\psi = \varphi + \Lambda u - Bu_t = 0,5\Lambda(\dot{u} + u) - u_t - \tau^2\Lambda_1\Lambda_2u_t + \varphi. \quad (30)$$

Отсюда видно, что

$$\psi = O(|h|^2 + \tau^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

если  $u = u(x, t)$  имеет ограниченные в  $\bar{Q}_T = \bar{G}_0 \times [0, t_0]$  производные

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right| \leq M. \quad (31)$$

В самом деле,  $0,5(\dot{u} + u) = \bar{u} + O(\tau^2)$ , где  $\bar{u} = u(x, t_n + 0,5\tau)$ ,  $\Lambda_1\Lambda_2u_t$  ограничено,  $u_t = \bar{u} + O(\tau^2)$ ,

$$\psi = L\bar{u} - \bar{u} + j + O(\tau^2 + |h|^2) = O(\tau^2 + |h|^2).$$

Так как для задачи (29) справедлива оценка (26) при  $z(0) = z_0 = 0$ , то имеет место

Теорема 2. Если выполнены условия (31), то схема (20), (21) сходится в сеточной норме (23) со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ .

5. Схема для уравнения с переменными коэффициентами. Напишем схему переменных направлений для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad (x, t) \in Q_T, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (32)$$

$$Lu = L_1u + L_2u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad k_\alpha(x, t) > 0.$$

Все уравнения (9) — (14) записываются без изменения, меняется лишь формула для  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha y = \Lambda_\alpha(\bar{t})y = \left( a_\alpha(x, \bar{t})y_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \bar{t} = t_n + 0,5\tau,$$

где  $a_\alpha$ , например, определяется по формуле  $a_\alpha = k_\alpha^{(-0,5\alpha)}$  или  $a_\alpha = 0,5(k_\alpha + k_\alpha^{(-1\alpha)})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , что обеспечивает второй порядок аппроксимации для  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2).$$

Все рассуждения, показывающие эквивалентность схем (9)—(14) и (20), (21), и в данном случае сохраняют силу. Схема (20) имеет на решении  $u = u(x, t)$  аппроксимацию  $O(|h|^2 + \tau^2)$ , если, кроме условий (31), выполнены очевидные требования гладкости  $k_\alpha(x, t)$  по  $x_1, x_2, t$ . Отличие от случая постоянных коэффициентов обнаруживается при изучении устойчивости схемы (20). Операторы  $-\Lambda_1, -\Lambda_2$  положительные и самосопряженные, но не перестановочные. Поэтому положительность  $\Lambda_1 \Lambda_2$  ниоткуда не следует. Вместо  $B \geq E + 0,5\tau A$  удастся доказать, что

$$B \geq \varepsilon E + 0,5\tau(1 - c_1\tau)A, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (33)$$

где  $c_1$  зависит от максимума производных  $\frac{\partial k_\alpha}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Для решения задачи (20), (21) с однородными краевыми условиями при достаточно малом  $\tau \leq \tau_0(c_1)$ , где  $\tau_0 < 1/(4c_1)$ , справедлива оценка

$$\|y(t + \tau)\|_{A(t)} \leq M_1 \|y(0)\|_{A(0)} + M_2 \left[ \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right]^{1/2}, \quad (34)$$

где

$$\|y(t + \tau)\|_{A(t)} = (a_1(x, \bar{t}), (y_{\bar{x}_1}(t + \tau))^2)_1 + (a_2(x, \bar{t}), (y_{\bar{x}_2}(t + \tau))^2)_2, \quad (35)$$

$$(y, v)_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2} h_1 h_2, \quad (y, v)_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} y_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2} h_1 h_2. \quad (36)$$

Оценки такого типа можно найти, например, в работе Е. Г. Дьяконова [4]. Из (34), очевидно, следует сходимость схемы со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ . Заметим, что требование достаточной малости шага по времени  $\tau \leq \tau_0(c_1)$ , при котором верна оценка (34), является весьма жестким, так как в случае сильно меняющихся по  $x_1$  и  $x_2$  коэффициентов  $k_\alpha(x, t)$  величина  $\tau_0$  может оказаться столь малой, что условие  $\tau \leq \tau_0$  не выполняется при практически допустимых значениях  $\tau$ , обеспечивающих требуемую точность решения задачи. Оказывается, однако, что требование малости  $\tau$  связано с методом исследования устойчивости. Ниже будет показано, что схема (9), (10) в случае не зависящих от  $t$  коэффициентов  $k_\alpha = k_\alpha(x)$  абсолютно устойчива (при любых  $\tau > 0$  и  $h_\alpha > 0$ ) в другой норме. Если  $k_\alpha(x, t)$  зависят от  $t$ , то этим свойством абсолютной устойчивости обладает

несколько измененная схема

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{y} - y}{0,5\tau} &= \Lambda_1(\bar{t}) \bar{y} + \Lambda_2(t) y + \varphi, \\ \frac{\hat{y} - \bar{y}}{0,5\tau} &= \Lambda_1(\bar{t}) \bar{y} + \Lambda_2(t + \tau) \hat{y} + \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

при однородных краевых условиях

$$\hat{y}|_{V_h} = 0, \quad \bar{y}|_{V_h} = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

Рассмотрим операторно-разностный аналог задачи (37):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{y} - y}{0,5\tau} &= -A_1 \bar{y} - A_2 y + \varphi_1, \quad 0 \leq t = n\tau < t_0, \\ \frac{\hat{y} - \bar{y}}{0,5\tau} &= -A_1 \bar{y} - \hat{A}_2 \hat{y} + \varphi_2, \quad y(0) = y_0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где  $A_1 = A_1(\bar{t})$ ,  $A_2 = A_2(t + \tau)$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — линейные операторы, заданные на  $H$ . Пусть  $(\cdot, \cdot)$  и  $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$  — скалярное произведение и норма в  $H$ . Будем предполагать, что  $A_1$  и  $A_2$  неотрицательные (несамосопряженные, вообще говоря) операторы.

*Лемма 1. Если  $A \geq 0$  — линейный оператор в  $H$ , то*

$$\|(E - (1 - \sigma)\tau A)y\| \leq \|(E + \sigma\tau A)y\| \quad \text{при } \sigma \geq 0,5. \quad (39)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|(E + \sigma\tau A)y\|^2 - \|(E - (1 - \sigma)\tau A)y\|^2 &= \\ &= 2\tau(Ay, y) + 2(\sigma - 0,5)\tau^2\|Ay\|^2 \geq 0 \quad \text{при } \sigma \geq 0,5, \end{aligned}$$

откуда и следует (39).

Перепишем (38) в виде

$$(E + 0,5\tau A_1) \bar{y} = (E - 0,5\tau A_2) y + 0,5\tau \varphi_1,$$

$$(E + 0,5\tau \hat{A}_2) \hat{y} = (E - 0,5\tau A_1) \bar{y} + 0,5\tau \varphi_2.$$

Воспользуемся неравенством треугольника и леммой 1:

$$\|(E + 0,5\tau A_1) \bar{y}\| \leq \|(E - 0,5\tau A_2) y\| + 0,5\tau \|\varphi_1\|,$$

$$\|(E + 0,5\tau \hat{A}_2) \hat{y}\| \leq \|(E - 0,5\tau A_1) \bar{y}\| + 0,5\tau \|\varphi_2\|.$$

Отсюда находим

$$\|y(t + \tau)\|_{(2, t+\tau)} \leq \|y(t)\|_{(2, t)} + 0,5\tau (\|\varphi_1(t)\| + \|\varphi_2(t)\|),$$

где

$$\|y(t)\|_{(2, t)} = \|(E + 0,5\tau A_2(t)) y(t)\| \geq \|y(t)\| \quad \text{при } A_2 \geq 0. \quad (40)$$

Суммирование по  $t = 0, 1, \dots, (n-1)\tau = t_n - \tau$  дает

$$\|y(t)\|_{(2, t)} \leq \|y(0)\|_{(2, 0)} + 0,5 \sum_{t'=0}^{t-\tau} \tau (\|\varphi_1(t')\| + \|\varphi_2(t')\|). \quad (41)$$

Нетрудно убедиться в том, что априорная оценка (41) сохраняет силу, если норму  $\|\cdot\|_{(2)}$  заменить нормой  $\|\cdot\|_{(2^*)}$ , где

$$\|y\|_{(2^*)}^2 = \|y\|^2 + \frac{\tau^2}{4} \|A_2 y\|^2. \quad (42)$$

Тем самым доказана

**Теорема 3.** *Схема (37) абсолютно устойчива (при любых  $\tau > 0$ ,  $h_1 > 0$ ,  $h_2 > 0$ ) и для нее верна оценка (41) с  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , в которой норма  $\|\cdot\|_{(2)}$  дается формулой (40) и  $A_2 = -\Lambda_2$ .*

Однако априорная оценка (41) сама по себе не позволяет доказать сходимость схемы (37) со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ . Этот вопрос будет рассмотрен в § 3. Отметим, что оценка (41) верна и в том случае, когда  $\bar{G}$  есть ступенчатая область (со сторонами, параллельными осям координат).

## § 2. Экономичные факторизованные схемы

**1. Схемы с факторизованным оператором.** Рассмотрим двухслойную разностную схему

$$By_t + Ay = \varphi, \quad 0 \leq t = j\tau < t_0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

Пусть известно значение  $y = y^j$  на  $j$ -м слое, требуется найти  $y^{j+1}$ . Для него получаем уравнение

$$By^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A)y^j + \tau\varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где  $F^j$  известная правая часть. Пусть для вычисления  $F^j$  затрачивается число  $O(N)$  действий, пропорциональное числу  $N$  узлов сетки  $\omega_h$  (это имеет место для всех разностных схем с шаблоном, не зависящим от сетки  $\omega_h$ ). Из (2) видно, что устойчивая схема (1) экономична, если для решения уравнения (2) затрачивается число действий  $O(N)$ .

Пусть  $B_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — «экономичные» операторы, т. е. такие операторы, что для вычисления решения уравнения

$$B_\alpha v = F \quad (3)$$

требуется  $O(N)$  действий. Тогда схема (1) с факторизованным оператором  $B$  вида

$$B = B_1 B_2 \dots B_p \quad (4)$$

будет также экономичной, так как для решения уравнения (2) с оператором (4) потребуется  $O(N)$  действий. В самом деле, решение уравнения

$$B_1 B_2 \dots B_p y^{j+1} = F^j \quad (5)$$

может быть найдено в результате последовательного решения  $p$  уравнений вида (3), точнее

$$B_1 y_{(1)} = F^j, \quad B_\alpha y_{(\alpha)} = y_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (6)$$



так что  $y^{j+1} = y_{(p)}$ . Здесь  $y_{(1)} = y^{j+1/p}$ , ...,  $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$ , ...,  $y_{(p-1)} = y^{j+(p-1)/p}$  — промежуточные значения.

Из предыдущего следует, что устойчивая схема (1) с факторизованным оператором  $B$ , являющимся произведением конечного числа «экономичных» операторов  $B_1, \dots, B_p$ , является экономичной. Схемы с факторизованным оператором  $B$  будем называть *факторизованными схемами*.

В § 1 было показано, что неявная экономичная схема переменных направлений (продольно-поперечная схема) эквивалентна факторизованной схеме с оператором

$$B = B_1 B_2, \quad B_\alpha = E - 0,5\tau\Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Рассматривались (см. В. К. Саульев [1]) также факторизованные схемы с

$$B = B_1 B_2, \quad B_\alpha = E + \tau R_\alpha, \quad R_1 y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{\bar{x}_\alpha}}{h_\alpha}, \quad R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{y_{x_\alpha}}{h_\alpha}, \quad (8)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — «треугольные» операторы (соответствующие им матрицы являются треугольными, так называемая, «явная схема переменных направлений»). Для решения уравнения (3) в этом случае получаются формулы явного («бегущего») счета. Заметим, что  $R_1$  и  $R_2$  не являются самосопряженными, а сопряжены друг другу.

Часто используются «одномерные» разностные операторы  $B_\alpha$  вида  $B_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha$ , где  $\Lambda_\alpha$  — разностная аппроксимация дифференциального оператора  $L_\alpha$ , содержащего производные только по одному аргументу  $x_\alpha$ . Так, например, если  $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$ , то

$\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$  — есть трехточечный оператор и уравнение (3) решается методом прогонки.

Отметим, что для факторизованных схем (с одномерными в некотором специальном смысле операторами  $B_\alpha$ ) используется также название «схемы с расщепляющимся оператором» (см. Е. Г. Дьяконов [3]).

Одну и ту же факторизованную схему можно свести к последовательности простых схем несколькими способами. Укажем еще один способ. Из (1) найдем

$$y^{j+1} = y^j + \tau\omega^j,$$

где  $\omega^j$  — решение уравнения

$$B_1 B_2 \dots B_p \omega = \Phi^j, \quad \Phi^j = \Phi^j - A y^j. \quad (9)$$

Для определения  $\omega^j$  можно воспользоваться системой  $p$  уравнений

$$B_1 \omega_{(1)} = \Phi^j, \quad B_\alpha \omega_{(\alpha)} = \omega_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (10)$$

полагая затем

$$\omega^j = \omega_{(p)}. \quad (11)$$

Интересно отметить, что первые экономичные схемы (см. Писмен, Рэкфорд [1], Дуглас [1], Дуглас, Рэкфорд [1]) составлялись так, чтобы можно было легко исключить промежуточные значения; это приводило к факторизованной схеме «в целых шагах», связывающей значения  $y^j$  и  $y^{j+1}$ .

**2. Краевые условия.** Требования устойчивости и аппроксимации предъявляются к факторизованной схеме (1). Уравнения (6) или (10), (11) можно трактовать как вычислительный алгоритм для факторизованной схемы (1). Такая эквивалентность, как было отмечено в работе Е. Г. Дьяконова [3], имеет место лишь при согласованном задании краевых условий.

Поясним это на примере. Пусть требуется решить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике  $\bar{G}_0 = (0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2)$  с границей  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (L_1 + L_2)u + f(x, t), \quad u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (12)$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Пусть  $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$  — прямоугольная сетка в  $\bar{G}_0$  с шагами  $h_1$  и  $h_2$ ,  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ :

Напишем факторизованную схему (1)

$$B_1 B_2 y_t = \Lambda y + \Phi, \quad y^j|_{\gamma_h} = \mu^j, \quad y^0 = u_0(x), \quad (13)$$

где  $B_\alpha = E - \sigma \tau \Lambda_\alpha$ ,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,  $\gamma_h$  — граница сетки  $\omega_h$ . Для решения задачи (13) при переходе со слоя на слой воспользуемся алгоритмом (6):

$$\left. \begin{aligned} B_1 y_{(1)} &= F^j, & F^j &= (B_1 B_2 + \tau \Lambda) y^j + \tau \Phi^j, \\ B_2 y^{j+1} &= y_{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

с краевыми условиями  $y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu^{j+1}$ .

Так как оператор  $B_1 B_2$  определен на  $\bar{\omega}_h$  (включая границу  $x_1 = 0$  и  $x_1 = l_1$ ), то уравнение  $B_2 y^{j+1} = y_{(1)}$  должно удовлетворяться не только при  $0 < x_1 < l_1$ , но и на границе при  $x_1 = 0, l_1$ . Поскольку  $y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu^{j+1}$  известно, то отсюда следует, что

$$y_{(1)} = (E - \sigma \tau \Lambda_2) \mu^{j+1} = \mu^{j+1} - \sigma \tau \Lambda_2 \mu^{j+1} \quad \text{при } x_1 = 0, l_1. \quad (15)$$

Если  $y_{(1)}$  при  $x_1 = 0$ ,  $l_1$  определяется по этой формуле, то задачи (13) и (14), (15) эквивалентны, в чем легко убедиться исключением  $y_{(1)}$  из (14). Для второго алгоритма

$$B_1 \omega_{(1)} = \Phi^j, \quad \Phi^j = \Lambda y^j + \varphi^j, \quad B_2 \omega_{(2)} = \omega_{(1)}, \quad y^{j+1} = y^j + \tau \omega_{(2)} \quad (16)$$

краевые условия задаются так

$$\left. \begin{aligned} \omega_{(1)} &= (E - \sigma \tau \Lambda_2) \frac{\mu^{j+1} - \mu^j}{\tau} && \text{при } x_1 = 0, l_1, \\ \omega_{(2)} &= \frac{\mu^{j+1} - \mu^j}{\tau} && \text{при } x_2 = 0, l_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(т. е.  $\omega_{(1)} = 0$ ,  $\omega_{(2)} = 0$  на  $\gamma_h$ , если  $\mu$  не зависит от  $t$ ).

Отметим, что при записи схемы (1) в матричной (операторной) форме краевые условия можно считать однородными, изменяя соответствующим образом правую часть  $\varphi$  в приграничных узлах. Для факторизованной схемы получим также однородные краевые условия ( $y_{(1)} = y^j = 0$ ,  $\omega_{(1)} = \omega_{(2)} = 0$  при  $x \in \gamma_h$ ), однако для сохранения порядка аппроксимации в правую часть факторизованной схемы в приграничных узлах при  $i_1 = 1$  и  $i_1 = N_1 - 1$  надо внести поправки  $-\sigma^2 \tau^2 h_1^{-2} \Lambda_2 \mu_t$ .

**3. Построение экономических факторизованных схем.** В литературе описан ряд способов получения экономических факторизованных схем.

1) Метод расщепляющегося оператора (см. Е. Г. Дьяконов [3]).

Строится факторизованный оператор  $B = B_1 \dots B_p$ , например,  $B_\alpha = E - \sigma \tau \Lambda_\alpha$ , где  $\Lambda_\alpha$  одномерные операторы, и рассматривается факторизованная схема

$$B y^{j+1} = C y^j + \tau \varphi^j. \quad (18)$$

Оператор  $C$  выбирается так, чтобы схема (18) была устойчивой и обладала аппроксимацией.

2) Метод приближенной факторизации (см. Н. Н. Яненко [6], Г. И. Марчук и Н. Н. Яненко [1]).

Пусть дана схема с весами

$$B y^{j+1} = C y^j, \quad \text{где } B = E - \sigma \tau \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha, \quad C = E + (1 - \sigma) \tau \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha. \quad (19)$$

Заменяя  $B$  и  $C$  факторизованными операторами

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= B_1 \dots B_p, \quad \tilde{C} = C_1 \dots C_p, \quad B_\alpha = E - \sigma \tau \Lambda_\alpha, \\ C_\alpha &= E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_\alpha, \end{aligned}$$

перейдем от схемы (19) к факторизованной схеме

$$\tilde{B} y^{j+1} = \tilde{C} y^j. \quad (20)$$

Эта схема аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если схема (19) обладала этим свойством (порядок аппроксимации при переходе от (19) к (20) может измениться).

Оба предыдущих подхода характеризуются тем, что сначала пишется схема сложной структуры, а затем устанавливается ее устойчивость.

Наличие теорем гл. VI об устойчивости двухслойных схем позволяет формулировать общий метод построения устойчивых экономических факторизованных схем (*метод регуляризации*, А. А. Самарский [8], [16], [20], [26], [27]).

Пусть дана схема (1) с оператором

$$B = E + \tau R.$$

Достаточное условие устойчивости для нее имеет вид

$$B \geq 0,5\tau A. \quad (21)$$

Пусть схема (1) устойчива (т. е. выполнено условие (21)) и  $\tilde{B}$  — некоторый оператор, такой, что

$$\tilde{B} \geq B.$$

Тогда и схема (1) с оператором  $\tilde{B}$  устойчива.

Пусть  $R$  есть сумма конечного числа «экономических» операторов

$$R = R_1 + \dots + R_p.$$

Факторизуем оператор  $B = E + \tau(R_1 + \dots + R_p)$ , т. е. заменим его факторизованным оператором

$$\tilde{B} = B_1 \dots B_p, \quad B_\alpha = E + \tau R_\alpha$$

и перейдем от исходной схемы (1) к факторизованной схеме

$$B_1 \dots B_p y_t + Ay = \tilde{\varphi} \quad (22)$$

(при этом может оказаться необходимым для сохранения аппроксимации заменить  $\varphi$  на  $\tilde{\varphi}$  вблизи границы сеточной области).

Если схема (1) устойчива и  $R_1, \dots, R_p$  являются самосопряженными ( $R_\alpha = R_\alpha^*$ ), неотрицательными ( $R_\alpha \geq 0$ ) и попарно перестановочными ( $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$ ) операторами, то факторизованная схема (22) также устойчива.

Для простоты положим  $p = 2$ . Тогда  $\tilde{B} = B_1 B_2 = E + \tau R + \tau^2 R_1 R_2 = B + \tau^2 R_1 R_2$ , т. е.  $\tilde{B} \geq B \geq 0,5\tau A$ , так как  $R_1 R_2 \geq 0$  (это следует из сделанных выше предположений относительно  $R_\alpha$ ).

Таким образом,  $\tilde{B} \geq 0,5\tau A$ , т. е. факторизованная схема (22) устойчива.

Операторы  $R_\alpha$  следует выбирать так, чтобы выполнялось и условие аппроксимации,

Пример 1. Пусть требуется решить задачу (12) для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами так, что

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2. \quad (23)$$

Соответствующий разностный оператор  $\Lambda_\alpha$  имеет вид

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad 0 < c_1 \leq a_\alpha \leq c_2.$$

Обозначим  $\Lambda_\alpha^0 y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ .

В пространстве  $\Omega_h$  (см. гл. V, § 1) сеточных функций, заданных на  $\omega_h$ , имеем

$$A_\alpha \leq c_2 A_\alpha^0, \quad \text{где} \quad A_\alpha = -\tilde{\Lambda}_\alpha, \quad A_\alpha^0 = -\tilde{\Lambda}_\alpha^0. \quad (24)$$

В качестве  $R_\alpha$  возьмем операторы

$$R_\alpha = \sigma c_2 A_\alpha^0, \quad (25)$$

так что  $R_\alpha y = -\sigma c_2 y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ , где  $y \in \Omega_h$ .

Условие устойчивости (21) будет выполнено, если взять  $\sigma \geq 0,5$  (и даже  $\sigma \geq 0,5 - 1/(\tau \|A\|)$ ). Таким образом,  $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$  — трехточечные разностные операторы с постоянными коэффициентами. Факторизованная схема имеет, по крайней мере, первый порядок точности по  $\tau$ .

Пример 2. Пусть требуется решить первую краевую задачу для параболического уравнения со смешанными производными в параллелепипеде  $\bar{G}_0 = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p)$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ Lu &= \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \\ 0 < c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 &\leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В качестве  $R_\alpha$  снова выбираем операторы (25). Эти операторы в  $\Omega_h$  являются самосопряженными, положительными (при  $\sigma > 0$ ) и попарно-перестановочными (так как область  $\bar{G}_0$  — параллелепипед). Полученная схема устойчива при условии  $\sigma \geq 0,5$ . Так как  $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — трехточечные разностные операторы с постоянными коэффициентами, то алгоритм определения  $y^{j+1}$  при заданном  $y^j$  тот же, что и в предыдущем примере.

Пример 3. Схема повышенного порядка точности для двумерного уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу (12). Нетрудно убедиться в том, что схема

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1 - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda' y + \varphi, \quad y|_{V_h} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x),$$

где  $\Lambda' = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2$ ,  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \varphi = \varphi^j = f^{j+1/2} + \frac{h_1^2}{12} L_1 f^{j+1/2} + \frac{h_2^2}{12} L_2 f^{j+1/2}$$

или

$$\varphi^j = f^{j+1/2} + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f^{j+1/2} + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f^{j+1/2}, \quad (27)$$

имеет в классе решений уравнения (12) погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + |h|^4)$ ,  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ .

Факторизованная схема, очевидно, имеет вид

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1)(E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda' y + \varphi. \quad (28)$$

Покажем, что она абсолютно устойчива по начальным данным и по правой части и, следовательно, экономична.

При изучении устойчивости предполагаем, что  $y|_{V_h} = 0$ . Вводя как обычно операторы  $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , перепишем (28) в виде

$$\tilde{B} y_t + A' y = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad (29)$$

где

$$A' = A_1 + A_2 - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2, \quad \kappa_\alpha = h_\alpha^2/12, \quad A_1 + A_2 = A,$$

$$\sigma_\alpha = 0,5 - \kappa_\alpha/\tau, \quad \tilde{B} = (E + \sigma_1 \tau A_1)(E + \sigma_2 \tau A_2) = \\ = E + 0,5\tau A - \kappa_1 A_1 - \kappa_2 A_2 + (0,5\tau - \kappa_1)(0,5\tau - \kappa_2) A_1 A_2.$$

Так как область  $\bar{G}_0$  — прямоугольник, то  $A_1$  и  $A_2$  перестановочны. Кроме того,  $A_\alpha = A_\alpha^* > 0$ . Проверим условие  $\tilde{B} \geq 0,5\tau A'$ . Сначала заметим, что  $\|A_\alpha\| < 4/h_\alpha^2$  и  $\kappa_\alpha \|A_\alpha\| < 1/3$ . Учитывая неравенство  $A_\alpha \leq \|A_\alpha\| E$ , получим

$$\tilde{B} - 0,5\tau A' = E - \kappa_1 A_1 - \kappa_2 A_2 + 0,5\tau(\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 + \\ + (0,5\tau - \kappa_1)(0,5\tau - \kappa_2) A_1 A_2 = E - \kappa_1 A_1 - \kappa_2 A_2 + \\ + \left(\frac{\tau^2}{4} + \kappa_1 \kappa_2\right) A_1 A_2 > E - \kappa_1 \|A_1\| E - \kappa_2 \|A_2\| E > \frac{1}{3} E,$$

т. е.

$$\tilde{B} > 0,5\tau A' + \frac{1}{3} E. \quad (30)$$

Тем самым доказана устойчивость (29) в  $H_{A'}$ .

В частности, в силу теоремы 8 из гл. VI, § 1 имеет место априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_{A'} \leq \|y_0\|_{A'} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \sum_{j'=0}^j \tau \|\Phi^{j'}\|^2 \right)^{1/2}. \quad (31)$$

Для погрешности  $z^j = y^j - u^j$  ( $u$  — решение задачи (12)) верна оценка

$$\|z^{j+1}\|_A \leq \frac{3}{2} \left( \sum_{j'=0}^j \tau \|\Psi^{j'}\|^2 \right)^{1/2}, \quad (32)$$

где  $\psi^j$  — погрешность аппроксимации на решении для факторизованной схемы (28). При переходе от (31) к (32) мы воспользовались тем, что  $z^0 = 0$  и

$$A' = A - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2 > A - \kappa_1 \|A_1\| A_2 - \kappa_2 \|A_2\| A_1 > \frac{2}{3} A,$$

так что

$$\|z\|_{A'} > \sqrt{2/3} \|z\|_A.$$

Из (32) следует, что схема (28) сходится в  $H_A$  со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^4)$ .

**4. Схемы расщепления как факторизованные схемы.** Рассмотрим схему с весами для однородного уравнения теплопроводности

$$y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y), \quad \Lambda = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_p, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}. \quad (33)$$

Н. Н. Яненко [1] предложил аппроксимировать ее системой  $p$  одномерных схем с весами

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} &= \Lambda_\alpha(\sigma y_{(\alpha)} + (1 - \sigma)y_{(\alpha-1)}), \quad \alpha = 1, \dots, p, \\ y_{(0)} &= y^j, \quad y_{(p)} = y^{j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где  $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$ ;  $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(p-1)}$  — промежуточные значения. Систему уравнений (34) можно записать в виде

$$B_\alpha y_{(\alpha)} = C_\alpha y_{(\alpha-1)}, \quad (35)$$

где  $B_\alpha = E - \sigma \tau \Lambda_\alpha$ ,  $C_\alpha = E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Полагая  $\alpha = 1$ , решаем уравнение  $B_1 y_{(1)} = C_1 y^j$  и находим  $y_{(1)}$ . Полагая затем  $\alpha = 2, 3, \dots$ , определим  $y_{(2)}, \dots, y_{(p-1)}$  и, наконец,  $y_{(p)} = y^{j+1}$ .

Для выяснения вопроса об устойчивости и аппроксимации был предложен переход от (35) к схеме «в целых шагах», свя-

зываются  $y^j$  и  $y^{j+1}$ . Исключая  $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(p-1)}$  из (35), получим факторизованную схему

$$B_1 \dots B_p y^{j+1} = C_1 \dots C_p y^j. \quad (36)$$

Она не совпадает с исходной схемой (33). Заметим, что исключение  $y_{(1)}, \dots, y_{(p-1)}$  возможно только при попарной перестановочности операторов  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ . В самом деле, пусть  $p = 2$  и

$$B_1 y_{(1)} = C_1 y^j, \quad B_2 y^{j+1} = C_2 y_{(1)}. \quad (37)$$

Действуя на первое уравнение оператором  $C_2$ , а на второе — оператором  $B_1$ , получим

$$B_1 B_2 y^{j+1} = (B_1 C_2 - C_2 B_1) y_{(1)} + C_2 C_1 y^j. \quad (38)$$

Отсюда видно, что член с  $y_{(1)}$  равен нулю, если  $B_1 C_2 = C_2 B_1$ , т. е.  $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \Lambda_1$ . Тогда получим

$$B_1 B_2 y^{j+1} = C_1 C_2 y^j. \quad (39)$$

Однако эквивалентность (35) и (36) имеет место не всегда. Это связано с тем, что для  $y_{(1)}$  надо для эквивалентности ставить граничное условие специального типа.

Поясним это на примере. Рассмотрим задачу (12) с  $f = 0$ . Напомним, что область  $\bar{G}_0 = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$  — прямоугольник. Схемы (35) и (36) эквивалентны, если уравнение

$$B_2 y^{j+1} = C_2 y_{(1)} \quad \text{или} \quad (E - \sigma \tau \Lambda_2) y^{j+1} = (E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_2) y^{j+1/2} \quad (40)$$

выполняется не только при  $0 < x_1 < l_1$ , но и на границе, при  $x_1 = 0, x_1 = l_1$ . Определить  $y^{j+1/2}|_{\gamma_h}$  из (40) можно только при достаточно малом  $\tau$ . Кроме того, существует вторая трудность: как определить правые части в уравнениях

$$B_1 y_{(1)} = C_1 y^j + \tau \varphi_1^j, \quad B_2 y^{j+1} = C_2 y_{(1)} + \tau \varphi_2^j, \quad (41)$$

чтобы эти уравнения были эквивалентны уравнению

$$B_1 B_2 y^{j+1} = C_1 C_2 y^j + \tau \varphi^j, \quad y^j = \mu^j \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h, \quad (42)$$

которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение. Исключая из (41)  $y_{(1)}$ , получим

$$B_1 B_2 y^{j+1} = C_1 C_2 y^j + \tau (C_2 \varphi_1^j + B_1 \varphi_2^j). \quad (43)$$

Требование  $\varphi^j = C_2 \varphi_1^j + B_1 \varphi_2^j$  будет выполнено, если  $\varphi_1^j = 0$ , а  $\varphi_2^j$  удовлетворяет уравнению  $B_1 \varphi_2 = (E - \sigma \tau \Lambda_1) \varphi_2 = \varphi$ . При  $x_1 = 0, x_1 = l_1$  вместо (40) должно выполняться условие  $B_2 y^{j+1} = C_2 y_{(1)} + \tau \varphi_2^j$ , а при  $x_2 = 0, x_2 = l_2$  — условие  $B_1 y_{(1)} = C_1 y^j + \tau \varphi_1^j$ . Полагая  $y_{(1)} = y^{j+1}$  при  $x_1 = 0, x_1 = l_1$ , получаем краевые условия для  $\varphi_2^j = -\Lambda_2 \mu^{j+1}$  при  $x_1 = 0, x_1 = l_1$ .



В результате мы получаем эквивалентную (42) систему одномерных схем:

$$\left. \begin{aligned} B_1 y_{(1)} &= C_1 y^j, & B_2 y^{j+1} &= C_2 y_{(1)} + \tau \varphi_2^j, \\ y_{(1)} &= \mu^{j+1} & \text{при } x_1 &= 0, \quad x_1 = l_1, \\ B_1 \varphi_2^j &= \varphi^j & \text{при } 0 < x_1 < l_1, & \quad 0 < x_2 < l_2, \\ \varphi_2^j &= -\Lambda_2 \mu^{j+1} & \text{при } x_1 &= 0, \quad x_1 = l_1, \\ y^{j+1} |_{V_h} &= \mu^{j+1}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Её можно записать также в виде

$$\left. \begin{aligned} (E - \sigma \tau \Lambda_1) \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} &= \Lambda_1 y^j & \text{при } 0 < x_1 < l_1, & \quad 0 \leq x_2 \leq l_2, \\ y^{j+1/2} &= \mu^{j+1} & \text{при } x_1 &= 0, \quad x_1 = l_1, \\ (E - \sigma \tau \Lambda_2) \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 y^{j+1/2} + \varphi_2^j & \text{при } 0 < x_1 < l_1, & \quad 0 < x_2 < l_2, \\ y^{j+1} &= \mu^{j+1} & \text{при } x_2 &= 0, \quad x_2 = l_2, \\ (E - \sigma \tau \Lambda_1) \varphi_2^j &= \varphi^j, & x &\in \omega_h, \\ \varphi_2^j &= -\Lambda_2 \mu^{j+1} & \text{при } x_1 &= 0, \quad x_1 = l_1. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Обращаясь к факторизованной схеме (39) и приводя ее к каноническому виду, замечаем, что при  $\sigma = 0,5$  она совпадает с факторизованной схемой для продольно-поперечной схемы, рассмотренной в § 1, и потому имеет точность  $O(\tau^2 + |h|^2)$ . Если  $B_\alpha$  и  $C_\alpha$  вычислять по формулам  $B_\alpha = E - \sigma_\alpha \tau \Lambda_\alpha$ ,  $C_\alpha = E + (1 - \sigma_\alpha) \tau \Lambda_\alpha$ , то при  $\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}$ ,  $\alpha = 1, 2$  получаем схему  $O(\tau^2 + |h|^4)$  при условии, что  $\varphi$  определяется по формуле (27).

Подводя итоги, следует отметить, что факторизованные схемы применимы лишь для областей специального типа, точнее, для прямоугольников и для параллелепипедов. Исключение представляет лишь случай  $B = B_1 B_2$ ,  $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$ , где  $R_1$  и  $R_2$  — треугольные операторы. Однако, при этом понижается порядок аппроксимации (которая имеет место лишь при условии  $\tau = O(h^2)$ ).

**5. Трехслойные факторизованные схемы.** Рассмотрим экономичные трехслойные схемы. Пусть дана схема

$$B y_\tau + \tau^2 R y_{\tau\tau} + A y = \varphi, \quad 0 < t = j\tau < t_0, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (46)$$

Разрешая ее относительно  $y^{j+1}$ , находим

$$(B + 2\tau R) y^{j+1} = 2\tau(2R - A) y^j + (B - 2\tau R) y^{j-1} + 2\tau \varphi^j,$$

Отсюда видно, что для экономичности трехслойной схемы надо, чтобы оператор  $B + 2\tau R$  на верхнем слое был факторизован.

Рассмотрим в качестве исходной схемы схему с весами

$$y_t^o + A(\sigma_1 \dot{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \ddot{y}) = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1. \quad (47)$$

Запишем ее в каноническом виде (см. гл. VI, § 2):

$$(E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A)y_t + 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)\tau^2 Ay_{tt} + Ay = \varphi \quad (48)$$

и найдем оператор  $B + 2\tau R = E + 2\sigma_1\tau A$ . Пусть  $A = A_1 + A_2$ . Заменяем  $B + 2\tau R$  факторизованным оператором

$$\tilde{B} + 2\tau\tilde{R} = (E + 2\sigma_1\tau A_1)(E + 2\sigma_1\tau A_2) = E + 2\sigma_1\tau A + 4\sigma_1^2\tau^2 A_1 A_2.$$

Поскольку имеется одно условие для двух операторов  $\tilde{B}$  и  $\tilde{R}$ , то можно построить ряд факторизованных схем.

Перепишем (48) в виде

$$(B + 2\tau R)y_t + (B - 2\tau R)y_t + 2Ay = 2\varphi.$$

Заменяем  $B + 2\tau R$  факторизованным оператором  $\tilde{B} + 2\tau\tilde{R}$  и приведем полученную схему к каноническому виду, учитывая при этом, что

$$y_t = y_t^o + 0,5\tau y_{tt}, \quad y_t = y_t^o - 0,5\tau y_{tt}.$$

В результате получим

$$E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A + 2\sigma_1^2\tau^2 A_1 A_2 y_t^o + \tau^2 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} A + \sigma_1^2\tau A_1 A_2 \right) y_{tt} + Ay = \varphi, \quad y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_1, \quad (49)$$

так что

$$\tilde{B} = B + 2\sigma_1^2\tau^2 A_1 A_2, \quad \tilde{R} = R + \sigma_1^2\tau A_1 A_2$$

(ср. с (48)).

Для определения  $y^{j+1}$  при заданных  $y^j$  и  $y^{j-1}$  можно воспользоваться следующим алгоритмом

$$B_1 \omega_{(1)} = F^j, \quad F^j = (2\tau R - B)y_t^j - 2Ay^j + 2\varphi^j,$$

$$B_2 \omega_{(2)} = \omega_{(1)}, \quad y^{j+1} = y^j + \tau \omega_{(2)},$$

$$B_1 = E + 2\sigma_1\tau A_1, \quad B_2 = E + 2\sigma_1\tau A_2.$$

Вопрос о краевых условиях для  $\omega_{(1)}$  решается так же, как и в случае двухслойной факторизованной схемы.

Для исследования устойчивости факторизованной схемы (49) надо воспользоваться общими теоремами из гл. VI, § 2. Достаточными условиями устойчивости являются условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5; \quad A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Если  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$ ,  $A_\alpha = A_\alpha^* > 0$ , то исходная схема устойчива, так как

$$B \geq E, \quad 4R > A.$$

В силу перестановочности  $A_1$  и  $A_2$ ,  $A_1 A_2 > 0$ , т. е.  $\tilde{B} > B$ ,  $\tilde{R} > R$ . Отсюда и из устойчивости исходной схемы следует устойчивость факторизованной схемы (49).

Мы рассмотрели частный случай, когда  $R = \sigma A$ ,  $\sigma = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$ . Укажем общий метод построения трехслойных экономических факторизованных схем, основанный на принципе регуляризации разностных схем (см. гл. VI, § 2, п. 9). Рассмотрим некоторую исходную разностную схему

$$y_t + \tau^2 R y_{tt} + Ay = \varphi, \quad 0 < t = j\tau < t_0, \quad y(0) = u_0, \quad y(\tau) = \bar{u}_0 \quad (50)$$

(значение  $y(\tau) = \bar{u}_0$  при  $t = \tau$  выбирается так, чтобы обеспечить второй по  $\tau$  порядок аппроксимации). Оператор  $R$  выбирается так, чтобы схема (50) была устойчивой.

Запишем исходную схему в виде

$$(E + 2\tau R) y_t = -F, \quad F = (2\tau R - E) y_t - 2Ay + 2\varphi. \quad (51)$$

Пусть  $R$  есть сумма экономических операторов,  $R = R_1 + R_2 + \dots + R_p$ . Заменим в (51)  $E + 2\tau R = E + 2\tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$  факторизованным оператором

$$E + 2\tau \tilde{R} = \prod_{\alpha=1}^p (E + 2\tau R_\alpha) = E + 2\tau R + 4\tau^2 Q_p, \quad \tilde{R} = R + 2\tau Q_p,$$

где  $Q_p = R_1 R_2$  при  $p=2$ ,  $Q_p = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + 2\tau R_1 R_2 R_3$  при  $p=3$  и т. д., и вместо (51) рассмотрим факторизованную схему

$$B_1 \dots B_p y_t = -F, \quad B_\alpha = E + 2\tau R_\alpha. \quad (52)$$

Приведем (52) к каноническому виду

$$B y_t + \tau^2 \bar{R} y_{tt} + Ay = \varphi, \quad (53)$$

где  $B = E + 2\tau^2 Q_p$ ,  $\bar{R} = R + \tau Q_p$ .

Пусть  $\psi_0(u)$  — погрешность аппроксимации (в классе решений  $u = u(x, t)$  непрерывной задачи) для исходной схемы (50),  $\psi_1(u)$  — для факторизованной схемы (53). Нетрудно заметить, что

$$\psi_1(u) = \psi_0(u) + \psi^*, \quad \psi^* = 2\tau^2 Q_p u_t.$$

Если  $\|Q_p u_t\|_{(2^*)} = O(1)$ , где  $\|\cdot\|_{(2^*)}$  — некоторая сеточная норма (фигурирующая в теоремах об устойчивости), то

$\|\psi^*\|_{(2^*)} = O(\tau^2)$  и при переходе от исходной схемы к экономической факторизованной схеме (52) погрешность аппроксимации меняется на величину  $O(\tau^2)$ . Таким образом, указанный процесс позволяет получать экономичные факторизованные схемы с сохранением второго порядка точности по  $\tau$  (за счет, вообще говоря, некоторого повышения требования гладкости решения  $u$ ).

Чтобы исследовать устойчивость (50) и (53), нужно рассматривать операторы  $R$  и  $A$  как линейные операторы из  $H = \Omega_h$  в  $H$  (это значит, например, для (26), что краевые условия на  $\gamma_h$  однородны).

Пусть выполнены условия

$$A = A^* > 0, \quad R_\alpha = R_\alpha^* > 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (54)$$

Тогда исходная схема (50) устойчива при

$$R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A, \quad \varepsilon > 0. \quad (55)$$

В случае переменного  $A = A(t)$  требуется, кроме того, чтобы  $A(t)$  был липшиц-непрерывен по  $t$ . Оператор  $R$  мы будем выбирать постоянным.

Если операторы  $R_\alpha$  попарно перестановочны, то из устойчивости исходной схемы следует устойчивость факторизованной схемы (53), так как  $Q_p > 0$ ,  $B = E + 2\tau^2 Q_p > E$ ,  $\bar{R} = R + \tau Q_p > R$ , т. е.  $\bar{R} > \frac{1+\varepsilon}{4} A$ .

Выбор регуляризатора  $R$  как для двухслойных, так и для трехслойных схем проводится по одному и тому же принципу. Важно отметить, что одним и тем же регуляризатором  $R$  можно пользоваться для различных операторов  $A$ .

Рассмотрим задачу (12) с операторами (23) (пример 1). В этом случае

$$R_\alpha y = -\sigma c_2 \Lambda_\alpha^0 y, \quad \Lambda_\alpha^0 y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad 4\sigma \geq 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad Ay = -\Lambda y.$$

Оператор  $A = A(t)$  липшиц-непрерывен, если  $|(k_\alpha)_t| \leq c_2 k_\alpha$ .

При решении системы разностных уравнений (52) можно воспользоваться алгоритмом

$$B_1 w_{(1)} = -F, \quad x \in \omega_h, \quad w_{(1)} = B_2 \mu_t \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad l_1,$$

$$B_2 w_{(2)} = w_{(1)}, \quad x \in \omega_h, \quad w_{(2)} = \mu_t \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad l_2,$$

$$y^{l+1} = y^l + \tau w_{(2)},$$

где

$$B_\alpha = E + 2\tau R_\alpha = E - 2\tau \sigma c_2 \Lambda_\alpha^0.$$

Для задачи (26) оператор  $L$  аппроксимируем разностным оператором (см. гл. IV, § 2):

$$\Lambda(t)y = 0,5 \sum_{\alpha, \beta=1}^p \left[ (k_{\alpha\beta}(x, t) y_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}(x, t) y_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right],$$

$$Ay = -\Lambda(t)y.$$

Операторы  $R_\alpha$  — те же, что и для предыдущей задачи,

$$R = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha, \quad R_\alpha y = -\sigma c_2 \Lambda_\alpha^0 y, \quad \Lambda_\alpha^0 y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Липшиц-непрерывность оператора  $A$  в  $H = \Omega_h$  обеспечивается требованиями

$$|(k_{\alpha\beta})_t| \leq c_3, \quad c_1 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^p \xi_\alpha^2,$$

где  $c_2 \geq c_1 > 0$ ,  $c_3 > 0$ .

Аналогично проводится построение факторизованной схемы для исходной схемы вида

$$(E + \tau^2 R) y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi, \quad R = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha.$$

Рассмотрим конкретный пример.

Для уравнения гиперболического типа в прямоугольнике  $\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (L_1 + L_2)u + f(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad x \in G, \quad t \in (0, T],$$

$$u|_\Gamma = \mu, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{G},$$

выберем исходную схему с весами

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, \quad t = j\tau, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad 4\sigma \geq 1 + \epsilon,$$

$$y|_\Gamma = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x) = \bar{u}_0 + 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0)).$$

Записываем эту схему в каноническом виде

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda) y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \varphi \quad (56)$$

и переходим от нее к экономичной факторизованной схеме, например,

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_1)(E - \sigma\tau^2\Lambda_2) y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \varphi. \quad (57)$$

Если исходную схему записать иначе

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda) y_t = F, \quad F = (E - \sigma\tau^2\Lambda) y_t + \tau(\Lambda y + \varphi),$$

то после факторизации получим экономичную факторизованную схему

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda_1)(E - \sigma\tau^2\Lambda_2) y_t = F$$

или

$$\left(E - \sigma\tau^2\Lambda + \frac{\sigma^2\tau^4}{2} \Lambda_1\Lambda_2\right) y_{tt} + \sigma^2\tau^3\Lambda_1\Lambda_2 y_t^0 = \Lambda y + \varphi. \quad (58)$$

Обе полученные факторизованные схемы (57) и (58) имеют второй порядок точности по  $\tau$  при любом  $\sigma$  и устойчивы при  $4\sigma \geq 1 + \varepsilon$ .

Нетрудно построить экономичные факторизованные схемы для случая, когда  $L_\alpha$  определяется формулой (23).

В этом случае в качестве исходной выбираем схему

$$(E + \tau^2 R) y_{tt} = \Lambda y + \varphi,$$

где

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^2 (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad R y = -\sigma \dot{\Lambda} y, \quad \dot{\Lambda} y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}.$$

Параметр  $\sigma$  выберем так, чтобы выполнялось условие устойчивости  $(Ry, y) \geq \frac{1}{4}(-\Lambda y, y)$  при любом  $y \in \dot{\Omega}$ , где  $\dot{\Omega}$  — множество функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе сетки  $\gamma_h$ . Для этого, очевидно, достаточно положить  $\sigma = c_2/4$ .

Заменяя оператор  $E + \tau^2(R_1 + R_2)$  факторизованным оператором  $(E + \tau^2 R_1)(E + \tau^2 R_2)$ , где  $R_\alpha y = -\sigma y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , получаем экономичную схему

$$(E + \tau^2 R_1)(E + \tau^2 R_2) y_{tt} = \Lambda y + \varphi,$$

$$y|_\gamma = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x),$$

где  $\tilde{u}_0 = \bar{u}_0 + 0,5\tau(Lu + f)|_{t=0}$ .

Эта схема абсолютно устойчива и имеет второй порядок точности по  $\tau$  и  $|h|$ .

**6. Схема повышенного порядка точности для уравнения параболического типа с эллиптическим оператором, содержащим смешанные производные.** Пусть  $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  — прямоугольник с границей  $\Gamma$ . Рассмотрим в цилиндре  $\bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$  первую краевую задачу для параболического уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, t) &= \mu(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где

$$Lu = L_1u + 2a_{12}L_{12}u + L_2u,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad L_{12}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Условие параболичности имеет вид

$$|a_{12}| < 1.$$

Напишем для задачи (59) экономичную факторизованную схему, имеющую точность  $O(\tau^2 + h^4)$ , где  $\tau$  — шаг сетки

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots\}$$

и  $h$  — шаг квадратной сетки

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h), \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad hN_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Пусть  $\gamma$  — граница сетки  $\bar{\omega}_h$ ,  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma$ .

В гл. IV, § 2, п. 5 для стационарной задачи

$$Lu = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_\Gamma = \mu(x)$$

была построена схема, имеющая точность  $O(h^4)$ . Эта схема имеет вид

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_\gamma = \mu(x), \quad (60)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda' y &= \Lambda y + \frac{h^2 b}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 y, \quad \Lambda y = \Lambda_1 y + 2a_{12} \Lambda_{12} y + \Lambda_2 y, \\ \Lambda_\alpha y &= y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|, \\ \Lambda_{12} y &= \begin{cases} \Lambda_{12}^- y = 0,5 (y_{\bar{x}_1 x_2} + y_{x_1 \bar{x}_2}) & \text{при } a_{12} < 0, \\ \Lambda_{12}^+ y = 0,5 (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + y_{x_1 x_2}) & \text{при } a_{12} > 0, \end{cases} \\ \varphi &= f + \frac{h^2}{12} \Lambda f. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Было показано, что оператор  $A' = -\Lambda'$  энергетически эквивалентен оператору  $\dot{A} = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ :

$$c_1 (\dot{A}y, y) \leq (A'y, y) \leq c_2 (\dot{A}y, y), \quad y \in \dot{\Omega}, \quad c_2 > c_1 > 0. \quad (62)$$

Для получения схемы повышенного порядка точности, аппроксимирующей нестационарную задачу (59), применим следующий формальный прием. Заменим в уравнении (60)

функцию  $\varphi(x)$  выражением

$$\tilde{\varphi} = \tilde{f} + \frac{h^2}{12} \Lambda \tilde{f} = \tilde{f} + \frac{h^2}{12} L \tilde{f} + O(h^4),$$

где  $\tilde{f} = f - \frac{\partial u}{\partial t}$  и  $u$  — решение уравнения (59).

В результате получим

$$\tilde{\varphi} = \left( f + \frac{h^2}{12} L f \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{12} L \frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(h^4).$$

Подставим сюда  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - f$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{12} L \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial f}{\partial t}$$

и заменим производные по  $t$  разностными отношениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\circ} + O(\tau^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{it} + O(\tau^2).$$

Отбрасывая слагаемые  $O(\tau^2 + h^4)$ , получим

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \left( u_{\circ} + \frac{h^2}{12} u_{it} \right), \quad \varphi = f + \frac{h^2}{12} (\Lambda f + f_{\circ}).$$

Произведем, наконец, замену  $u$  на  $y = y^j$  и подставим функцию  $\tilde{\varphi}$  в правую часть уравнения (60). Тогда получим трехслойную схему

$$\left. \begin{aligned} y_i + \frac{h^2}{12} y_{it} &= \Lambda' y + \varphi, \\ \varphi &= f + \frac{h^2}{12} (\Lambda f + f_{\circ}). \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Из построения следует, что погрешность аппроксимации равна

$$\psi = \Lambda' u + \varphi - u_{\circ} - \frac{h^2}{12} u_{it} = O(\tau^2 + h^4). \quad (64)$$

Схема (63), как следует из общей теории устойчивости трехслойных схем (см. гл. VI, § 2) устойчива при условии

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\sqrt{6c_2}}.$$

Напишем безусловно устойчивую схему с тем же порядком аппроксимации. Для этого выберем регуляризатор

$$Ry = (R_1 + R_2)y = \kappa \dot{A}y, \quad \kappa = \frac{1+\varepsilon}{4} c_2, \quad \varepsilon > 0,$$

где  $R_{\alpha}y = -\kappa \Lambda_{\alpha}y$ ,  $y \in \dot{\Omega}$  и  $c_2$  — постоянная из (62). Отсюда и из (62) видно, что  $R \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A'$ .



Отправляясь от (63), напишем схему

$$y_t^2 + \left( \frac{h^2}{12} E + \tau^2 R \right) y_{tt} = \Lambda' y + \varphi. \quad (65)$$

Безусловная устойчивость этой схемы следует из того, что для нее при любых  $\tau$  и  $h$  выполнено достаточное условие устойчивости

$$\frac{h^2}{12\tau^2} E + R > \frac{1+\varepsilon}{4} A', \quad A'y = -\Lambda'y, \quad y \in \mathring{\Omega}.$$

В самом деле,

$$\frac{h^2}{12\tau^2} E + R - \frac{1+\varepsilon}{4} A' \geq \frac{h^2}{12\tau^2} E + R - \frac{c_2}{4} \mathring{A} > \frac{h^2}{12\tau^2} E > 0.$$

Погрешность аппроксимации схемы (65)

$$\psi = \left[ \Lambda'u + \varphi - \left( u_t^2 + \frac{h^2}{12} u_{tt} \right) \right] - \tau^2 R u_{tt}. \quad (66)$$

Из (64) следует, что  $\psi = O(\tau^2 + h^4)$ .

Перейдем теперь к построению факторизованной схемы. Перепишем исходную схему (65) в виде:

$$\left[ \left( 1 + \frac{h^2}{6\tau} \right) E + 2\tau R \right] y_t + \left[ \left( 1 - \frac{h^2}{6\tau} \right) E - 2\tau R \right] y_t = 2(\Lambda'y + \varphi) \quad (67)$$

и заменим оператор при  $y_t$

$$\left( 1 + \frac{h^2}{6\tau} \right) E + 2\tau R = \frac{2}{\sigma} (E + \sigma\tau(R_1 + R_2)), \quad \sigma = \frac{2}{1 + h^2/(6\tau)}$$

факторизованным оператором

$$\frac{2}{\sigma} (E + \sigma\tau R_1)(E + \sigma\tau R_2) = \frac{2}{\sigma} (E + \sigma\tau R) + 2\sigma\tau^2 R_1 R_2.$$

Тогда вместо (67) получим

$$\left. \begin{aligned} (E + \sigma\tau R_1)(E + \sigma\tau R_2) y_t &= F, \\ F &= \sigma(\Lambda'y + \varphi) + \frac{\sigma}{2} \left( 1 - \frac{h^2}{6\tau} \right) y_t + \sigma\tau R y_t. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Это уравнение выполняется во всех внутренних узлах  $x \in \omega_h$  и всех  $t = j\tau > 0$ . К нему надо присоединить граничное условие

$$y|_{\gamma} = \mu(x, t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau$$

и начальные условия

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x),$$

$$\bar{u}_0(x) = Lu_0(x) + f(x, 0) + \frac{\tau}{2} \left( L^2 u_0(x) + Lf(x, 0) + \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \right).$$

Первое начальное условие является естественным, второе условие строится по правилу, указанному в гл. I, § 1, п. 6.

Задача (68) может быть решена при помощи следующего алгоритма переменных направлений

$$\begin{aligned} (E + \sigma\tau R_1) \omega_{(1)} &= F, \quad x \in \omega_h, \\ \omega_{(1)} &= (E + \sigma\tau R_2) \mu_t, \quad x_1 = 0, \quad x_1 = l_1, \\ (E + \sigma\tau R_2) \omega_{(2)} &= \omega_{(1)}, \quad x \in \omega_h, \\ \omega_{(2)} &= \mu_t, \quad x_2 = 0, \quad x_2 = l_2, \\ \hat{y} &= y + \tau \omega_{(2)}. \end{aligned}$$

Функции  $\omega_{(1)}$  и  $\omega_{(2)}$  находятся по формулам прогонки вдоль строк и столбцов соответственно.

Запишем задачу (68) в каноническом виде

$$\left. \begin{aligned} (E + \sigma\tau^2 R_1 R_2) y_{\bar{t}} + \left( \frac{h^2}{12} E + \tau^2 R + \frac{\sigma\tau^3}{2} R_1 R_2 \right) y_{\bar{t}t} &= \Lambda' y + \Phi, \\ y|_{\bar{v}} = \mu(x, t), \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \bar{u}_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Пусть  $y = y^j$  — решение задачи (69), а  $u = u(x, t)$  — решение исходной задачи (59),  $z^j = y^j - u^j$  — погрешность схемы. Подставляя  $y = z + u$  в (69), получаем для  $z$  следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} Bz_{\bar{t}} + Dz_{\bar{t}t} + A'z &= \Psi, \\ z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = v(x), \quad z|_{\bar{v}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A'z &= -\Lambda z, \quad B = E + \sigma\tau^2 R_1 R_2, \\ D &= \frac{h^2}{12} E + \tau^2 R + \frac{\sigma\tau^3}{2} R_1 R_2, \quad \sigma = \frac{2}{1 + h^2/(6\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Очевидно, что  $B$ ,  $D$  и  $A'$  можно рассматривать как линейные операторы, определенные в пространстве  $H = \bar{\Omega}$  сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль на ее границе. Правая часть  $\Psi$  уравнения (70) есть погрешность аппроксимации уравнения (1) факторизованной схемой (69):

$$\Psi = \psi - \sigma\tau^2 R_1 R_2 u_t, \quad (72)$$

где  $\psi$  — погрешность аппроксимации схемы (65).

Из (66) и (72) следует, что

$$\Psi = O(h^4 + \tau^2) \quad (73)$$

в классе функций  $u(x, t)$ , имеющих непрерывные в  $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$  производные по  $x_1, x_2$  до шестого порядка, по  $t$  до третьего порядка включительно, а также смешанные

производные  $\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t}$ . Из выражения для  $y_t(x, 0)$  следует, что в этом же классе функций

$$v = Lu_0 + f(x, 0) + 0,5\tau \left( L^2 u_0(x) + Lf(x, 0) + \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \right) - u_t(x, 0) = O(\tau^2). \quad (74)$$

Регуляризатор  $R$  выбран так, что

$$R > \frac{1+\varepsilon}{4} A', \quad \varepsilon > 0.$$

Самосопряженные операторы  $R_1$  и  $R_2$  положительны и перестановочны, поэтому их произведение  $R_1 R_2$  есть самосопряженный положительный оператор,  $R_1 R_2 > 0$ . Отсюда следуют неравенства

$$D > \frac{\tau^2}{4} A' + \frac{h^2}{12} E + \frac{\sigma\tau^3}{2} R_1 R_2 > \frac{\tau^2}{4} A', \\ B = E + \sigma\tau^2 R_1 R_2 > E,$$

доказывающие устойчивость схемы (70). В силу теоремы 4 из гл. VI, § 2 для задачи (70) справедлива оценка

$$\|Z(t+\tau)\| \leq \|Z(\tau)\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{t'=\tau}^t \tau \|\Psi(t')\|^2 \right]^{1/2}, \quad (75)$$

где

$$\|Z(t+\tau)\|^2 = \frac{1}{4} (A'(\hat{z} + z), \hat{z} + z) + \left( \left( D - \frac{\tau^2}{4} A' \right) z_t, z_t \right).$$

Так как  $z(0) = 0$ , то оценку (75) можно переписать в виде

$$\|Z(t+\tau)\| \leq (Dz_t(0), z_t(0))^{1/2} + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{\tau \leq t' < T} \|\Psi(t')\|. \quad (76)$$

Оценим величину  $(Dz_t(0), z_t(0)) = (Dv, v)$ . Подставляя выражение (71) для оператора  $D$ , получим

$$(Dv, v) = \frac{h^2}{12} \|v\|^2 + \tau^2 (Rv, v) + \frac{\sigma\tau^3}{2} (R_1 R_2 v, v) = \\ = \frac{h^2}{12} \|v\|^2 - \frac{\tau^2 c_2}{4} ((\Lambda_1 + \Lambda_2)v, v) + \frac{c_2^2 \tau^4}{16(\tau + h^2/6)} (\Lambda_1 \Lambda_2 v, v) = \\ = \frac{h^2}{12} \|v\|^2 + \frac{\tau^2 c_2}{4} (\|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2) + \frac{c_2^2 \tau^4}{16(\tau + h^2/6)} \|v_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}\|^2. \quad (77)$$

Слагаемое  $h^2 \|v\|^2$  является величиной  $O(\tau^2 + h^4)^2$ , если ограничена производная  $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ . Действительно,

$$h \|v\| = O(h\tau^2) = O(\tau \cdot \tau h) = O(\tau^2 + \tau^2 h^2) = O(\tau^2 + \tau^4 + h^4) = O(\tau^2 + h^4).$$

Покажем, что и остальные слагаемые в (77) есть величины  $O(\tau^2 + h^4)^2$ , если существуют ограниченные в цилиндре  $\bar{Q}_T$  производные

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha \partial t^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial t^2}.$$

Подставляя в формулу

$$\begin{aligned} v &= (Lu_0(x) + f(x, 0)) + 0,5\tau \left( L^2 u_0(x) + Lf(x, 0) + \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} \right) - u_t = \\ &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + 0,5\tau \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} - u_t(x, 0) \end{aligned}$$

разложение

$$u_t(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + 0,5\tau \frac{\partial^2 u(x, \theta\tau)}{\partial t^2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

получаем

$$v(x) = 0,5\tau \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, \theta\tau)}{\partial t^2} \right) = O(\tau).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \tau^2 (\|v_{\bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|^2) &= O(\tau^4), \\ \frac{\tau^4}{\tau + h^2/6} \|v_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}\|^2 &= O(\tau^5) = O(\tau^4), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак,  $(Dz_t(0), z_t(0))^{1/2} = O(\tau^2 + h^4)$ . Отсюда, а также из (73) и (76) следует, что

$$\|Z(t + \tau)\| \leq M(\tau^2 + h^4). \quad (78)$$

Чтобы получить оценку  $z$  в  $H_{A'}$ , воспользуемся леммой 5 из гл. VI, § 2. Так как  $R = \frac{1+\varepsilon}{4} c_2 \hat{A} \geq \frac{1+\varepsilon}{4} A'$ , то

$$\|Z(t + \tau)\| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|z(t + \tau)\|_{A'} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{1+\varepsilon}} \|z(t + \tau)\|_{\hat{A}}.$$

Учитывая оценку (78), убеждаемся в том, что схема (69) сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h^4)$  в норме пространства  $H_{\hat{A}}$ , т. е. в сеточной норме  $\hat{W}_2^1$ :

$$\|z(t + \tau)\|_{\hat{A}} = O(\tau^2 + h^4).$$

**7. Экономичные схемы для систем уравнений параболического и гиперболического типов.** Пусть

$$\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

—  $p$ -мерный параллелепипед,

$$\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T], \quad Q_T = G \times (0 \leq t \leq T).$$

Пусть  $k = (k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta}^{sm})$ ,  $s, m = 1, 2, \dots, n$  — клеточная матрица  $p \times p$  с клетками  $n \times n$ , удовлетворяющая условию симметрии

$$k_{\alpha\beta}^{sm}(x, t) = k_{\beta\alpha}^{ms}(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \bar{Q}_T \quad (79)$$

и условию положительной определенности

$$c_1 \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^p (\xi_\alpha^s)^2 \leq \sum_{s,m=1}^n \sum_{\alpha,\beta=1}^p k_{\alpha\beta}^{sm}(x, t) \xi_\beta^m \xi_\alpha^s \leq c_2 \sum_{s=1}^n \sum_{\alpha=1}^p (\xi_\alpha^s)^2, \quad (80)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  положительные постоянные,  $\xi_\alpha = (\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^s, \dots, \xi_\alpha^n)$  произвольный вещественный вектор. Положительная определенность матрицы  $k$  является условием сильной эллиптичности оператора

$$Lu = \sum_{\alpha,\beta=1}^p L_{\alpha\beta} u, \quad L_{\alpha\beta} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right), \quad (81)$$

где  $u = (u^1, \dots, u^s, \dots, u^n)$  — вектор размерности  $n$ , т. е. условием выполнения неравенства

$$c_1 (-L^{(0)}u, u) \leq (-Lu, u), \quad (82)$$

где

$$(u, v) = \sum_{s=1}^n \int_G u^s(x) v^s(x) dx, \quad dx = dx_1 \dots dx_p,$$

$L^{(0)}u = \Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$ ,  $u$  — произвольная достаточно гладкая функция, равная нулю на границе  $\Gamma$ .

Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти непрерывное в  $\bar{Q}_T$  решение системы уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (83)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{G}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Пусть  $\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_p h_p)\}$  — сетка в  $\bar{G}$ ,  $0 \leq i_\alpha \leq N_\alpha$ ,  $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  и  $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$  — сетка на отрезке  $0 \leq t \leq T$ .

Оператор  $L_{\alpha\beta}$  аппроксимируем разностным оператором (см. гл. IV)

$$\Lambda_{\alpha\beta}u = 0,5 \left[ (k_{\alpha\beta}u_{\bar{x}\beta})_{x_\alpha} + (k_{\alpha\beta}u_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right] \quad (85)$$

и обозначим

$$\Lambda u = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \Lambda_{\alpha\beta}u. \quad (86)$$

При  $\beta = \alpha$  получаем

$$\Lambda_{\alpha\alpha}u = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad a_\alpha = 0,5 (k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1a)}).$$

Введем пространство  $\mathring{\Omega}$  — множество сеточных вектор-функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе  $\gamma_h$ . Скалярное произведение в  $\mathring{\Omega}$  определяется так:

$$(y, v) = \sum_{s=1}^n (y^s, v^s), \quad (y^s, v^s) = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} y^s(x) v^s(x) h_1 \dots h_p.$$

В силу (79) оператор  $\Lambda$  является самосопряженным оператором, так что  $(\Lambda y, v) = (y, \Lambda v)$ .

Из (80) следуют неравенства

$$c_1 (-\Lambda^{(0)}y, y) \leq (-\Lambda y, y) \leq c_2 (-\Lambda^{(0)}y, y), \quad y \in \mathring{\Omega}, \quad (87)$$

где

$$\Lambda^{(0)}y = \sum_{\alpha=1}^p y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad (-\Lambda^{(0)}y, y) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^n (1, (y_{\bar{x}_\alpha}^s)^2)$$

В качестве регуляризатора выберем оператор

$$R = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha, \quad R_\alpha y = -\sigma y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (88)$$

где  $\sigma$  — числовой параметр, который будет выбран из соображений устойчивости.

Напишем сначала двухслойную экономичную схему. Исходная схема имеет вид

$$(E + \tau R) y_t = \Lambda y + \varphi,$$

где  $\varphi = f^j + O(|h|^2 + \tau^2)$ .

Заменяя  $E + \tau R = E + \tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$  факторизованным оператором

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_\alpha) = E + \tau \tilde{R}, \quad \tilde{R} = R + \tau Q_p,$$

$$Q_p = \sum_{\alpha < \beta} R_\alpha R_\beta + \dots,$$

получаем экономичную факторизованную схему

$$\left. \begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau R_{\alpha}) y_t &= \Lambda y + \varphi, & x \in \omega_h, & t \in \omega_{\tau}, \\ y(x, t) &= \mu(x, t), & x \in \gamma_h, & t \in \bar{\omega}_{\tau}, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Для отыскания вектор-функции  $y^{j+1} = \hat{y}$  можно, например, воспользоваться таким алгоритмом:

$$(E + \tau R_1) \omega_{(1)} = \Lambda y + \varphi,$$

$$\omega_{(1)} = \prod_{\beta=2}^p (E + \tau R_{\beta}) \mu_t \quad \text{при } x_1 = 0, l_1,$$

$$(E + \tau R_{\alpha}) \omega_{(\alpha)} = \omega_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$\omega_{(\alpha)} = \prod_{\beta=\alpha+1}^p (E + \tau R_{\beta}) \mu_t \quad \text{при } x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}, \alpha = 2, 3, \dots, p-1.$$

Схема (89) абсолютно устойчива при  $\sigma \geq 0,5c_2$  и сходится со скоростью  $O(\tau + |h|^2)$ .

Второй порядок точности по  $\tau$  имеет трехслойная схема

$$y_{\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}} = \Lambda y + \varphi. \quad (90)$$

Перепишем ее в виде

$$(E + 2\tau R) y_t = F, \quad \text{где } F = 2(\Lambda y + \varphi) - (E - 2\tau R) y_{\bar{t}},$$

и заменим оператор  $E + 2\tau R = E + 2\tau \sum_{\alpha=1}^p R_{\alpha}$  факторизованным оператором

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + 2\tau R_{\alpha}) = E + 2\tau R + 4\tau^2 Q_p.$$

Тогда получим факторизованную экономичную схему

$$\prod_{\alpha=1}^p (E + 2\tau R_{\alpha}) y_t = F. \quad (91)$$

Запишем ее в каноническом виде

$$(E + 2\tau^2 Q_p) y_{\bar{t}} + \tau^2 (R + \tau Q_p) y_{\bar{t}} = \Lambda y + \varphi, \quad (92)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \mu \quad \text{при } x \in \gamma_h, & t \in \bar{\omega}_{\tau}, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где  $\tilde{u}_0(x) = L u_0 + f(x, 0)$ .

Для определения  $\hat{y} = y^{l+1}$  из (92) воспользуемся алгоритмом

$$(E + \tau R_1) \omega_{(1)}^s = F^s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

$$\omega_{(1)}^s = \prod_{\beta=2}^p (E + \tau R_\beta) \mu_i^s \quad \text{при } x_1 = 0, l_1,$$

$$(E + \tau R_\alpha) \omega_{(\alpha)}^s = \omega_{(\alpha-1)}^s, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$\omega_{(\alpha)}^s = \prod_{\beta=\alpha+1}^p (E + \tau R_\beta) \mu_i^s \quad x_\alpha = 0, l_\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p-1.$$

Компоненты  $\omega_{(\alpha)}^s$  находятся независимо.

Исходная схема (90) устойчива, если положить

$$\sigma = c_2(1 + \varepsilon)/4, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Операторы  $R_\alpha$  попарно перестановочны и положительны, поэтому  $Q_p > 0$  и регуляризатор  $\tilde{R}$  схемы (92), равный  $\tilde{R} = R + \tau Q_p > R$ . Отсюда следует, что схема (92) в  $\tilde{\Omega}$  абсолютно устойчива.

Пусть  $y$  — решение задачи (92), (93),  $u$  — решение исходной задачи (83), (84). Подставляя в (92), (93)  $y = z + u$ , получим для погрешности  $z$  условия

$$\left. \begin{aligned} (E + 2\tau^2 Q_p) z_{\bar{t}} + \tau^2 (R + \tau Q_p) z_{\bar{t}\bar{t}} &= \Lambda z + \psi, \\ z = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad z(x, 0) = 0 &\quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \\ z_t(x, 0) = v(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, & \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

где

$$\psi = \Lambda u + \varphi - u_{\bar{t}} - \tau^2 R u_{\bar{t}\bar{t}} - 2\tau^2 Q_p u_t = \psi_0 - 2\tau^2 Q_p u_t, \quad (95)$$

$\psi_0$  — погрешность аппроксимации исходной схемы (90),  $v = \tilde{u}_0 - u_t = O(\tau)$ .

Так как  $B = E + 2\tau^2 Q_p > E$ , то для схемы (94) верны теоремы 5 и 8 из гл. VI, § 2. Погрешность аппроксимации  $v$  второго начального условия оценивается в норме  $\|v\|_D$ , где

$$\|v\|_D^2 = (Dv, v) = \tau^2 (Rv, v) + \tau^3 (Q_p v, v) = O(\tau^4),$$

$$\|v\|_D = O(\tau^2), \quad \text{так как } v = O(\tau).$$

Из (95) видно, что  $\psi = O(\tau^2 + |h|^2)$ . Требования гладкости, при которых  $\psi = O(\tau^2 + |h|^2)$  и  $\|v\|_D = O(\tau^2)$ , возрастают с ростом числа измерений  $p$ . Эти требования можно ослабить, используя, например, при выводе априорных оценок для уравнения (94) с правой частью

$$\psi = \tau^2 Q_p v = \tau^2 \sum_{s=2}^p \tau^{s-2} Q_p^{(s)} v, \quad v = u_t,$$



следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 2\tau(\psi, z_i) &= 2\tau^3(Q_p v, z_i) = \\ &= 2\tau^3(Q_p^{(2)} v, z_i^0) + 2\tau^3 \sum_{s=3}^p \tau^{s-2} (Q_p^{(s)} v, z_i^0) \leq \\ &\leq \tau \|z_i^0\|^2 + \tau^5 \|Q_p^{(2)} v\|^2 + \sum_{s=3}^p \tau^s (Q_p^{(s)} z_i^0, z_i^0) + \sum_{s=3}^p \tau^{s+2} (Q_p^{(s)} v, v) \leq \\ &\leq \tau (Bz_i^0, z_i^0) + \tau^5 \|Q_p^{(2)} v\|^2 + \sum_{s=3}^p \tau^{s+2} (Q_p^{(s)} v, v). \end{aligned}$$

Два последних слагаемых в этом неравенстве есть величины  $O(\tau^5)$ ; они дают вклад в оценку погрешности  $z$ .

Таким образом, схема (92), (93) сходится в  $\dot{W}_2^1$  со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ .

Перейдем теперь к системе уравнений гиперболического типа. Требуется найти непрерывное в цилиндре  $\bar{Q}_T$  решение системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad L = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta}, \quad (96)$$

удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} u &= \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{G}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Оператор  $L = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta}$  определяется формулой (81).

Система уравнений теории упругости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + f, \quad \Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad (98)$$

где  $\lambda = \operatorname{const} > 0$  и  $\mu = \operatorname{const} > 0$  — коэффициенты Ламэ,  $u = (u^1, \dots, u^p)$  — вектор-функция размерности  $p$ , очевидно, является частным случаем системы (96) при  $n = p$  и

$$k_{\alpha\beta}^{sm} = \mu \delta_{\alpha\beta} \delta_{sm} + (\lambda + \mu) \delta_{\alpha s} \delta_{\beta m}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Условие (79) выполняется автоматически. Условие (80) также выполнено при

$$c_1 = \mu, \quad c_2 = \lambda + 2\mu.$$

Покажем, что  $c_1 = \mu$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s, m=1}^n \sum_{\alpha, \beta=1}^p k_{\alpha\beta}^{sm} \xi_{\alpha}^s \xi_{\beta}^m &= \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha, s=1}^p \xi_{\alpha}^{\alpha} \xi_s^s = \\ &= \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2 + (\lambda + \mu) \left( \sum_{\alpha=1}^p \xi_{\alpha}^{\alpha} \right)^2 \geq \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2. \end{aligned}$$

Нетрудно показать также, что  $c_2 = \lambda + 2\mu$ :

$$\begin{aligned} \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha, s=1}^p \xi_{\alpha}^{\alpha} \xi_s^s &\leq \\ &\leq \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2 + \frac{\lambda + \mu}{2} \left[ \sum_{\alpha=1}^p (\xi_{\alpha}^{\alpha})^2 + \sum_{s=1}^p (\xi_s^s)^2 \right] = \\ &= \mu \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2 + (\lambda + \mu) \sum_{\alpha=1}^p (\xi_{\alpha}^{\alpha})^2 \leq (\lambda + 2\mu) \sum_{\alpha, s=1}^p (\xi_{\alpha}^s)^2. \end{aligned}$$

В качестве регуляризатора  $R$  выберем тот же оператор что и ранее:

$$R = \sum_{\alpha=1}^p R_{\alpha}, \quad R_{\alpha} y = -\sigma y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}.$$

Исходная схема

$$y_{tt} + \tau^2 R y_{tt} = \Lambda y + \varphi \quad (99)$$

устойчива, если

$$\sigma = \frac{c_2(1 + \varepsilon)}{4}, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Заменяя  $E + \tau^2 R = E + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p R_{\alpha}$  факторизованным оператором  $D = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_{\alpha})$ , получим экономичную факторизованную схему

$$\left. \begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_{\alpha}) y_{tt} &= \Lambda y + \varphi \quad \text{при } x \in \omega_h, \quad t \in \omega_{\tau}, \\ y &= \mu \quad \text{при } x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_{\tau}, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x) \quad \text{при } x \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

где

$$\tilde{u}_0(x) = \tilde{u}_0 + 0,5\tau(Lu_0 + f(x, 0)).$$

Можно показать, что эта схема абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации,  $\psi = O(\tau^2 + |h|^2)$  и  $v = O(\tau^2)$ . Отсюда следует ее сходимость со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ .

Отыскание вектор-функции  $y^{j+1}$  сводится к последовательному от  $\alpha$  к  $\alpha + 1$  решению методом прогонки трехточечных уравнений вида  $(E + \tau^2 R_\alpha) \omega = F_\alpha$ .

Воспользуемся, например, следующим алгоритмом

$$(E + \tau^2 R_1) \omega_{(1)} = F, \quad F = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_\alpha) y_t + \tau(\Lambda y + \varphi),$$

$$(E + \tau^2 R_\alpha) \omega_{(\alpha)} = \omega_{(\alpha-1)}, \quad \alpha = 2, \dots, p, \quad y^{j+1} = y^j + \tau \omega_{(p)}.$$

Для функций  $\omega_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, p-1$  ставятся при  $x_\alpha = 0$ ,  $l_\alpha$  следующие краевые условия:

$$\omega_{(1)} = (E + \tau^2 R_2) \dots (E + \tau^2 R_p) \mu_t, \quad x_1 = 0, \quad l_1,$$

$$\omega_{(\alpha)} = \prod_{\beta=\alpha+1}^p (E + \tau^2 R_\beta) \mu_t \quad \text{при} \quad x_\alpha = 0, \quad l_\alpha.$$

Так как операторы  $D_\alpha = E + \tau^2 R_\alpha$  имеют диагональную матрицу коэффициентов с диагональными клетками, то компоненты вектора  $\omega_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  определяются независимо.

### § 3. Метод суммарной аппроксимации

**1. Составные схемы. Суммарная аппроксимация.** Экономические методы, рассмотренные в § 1 и § 2, характеризуются тем, что исходное многомерное дифференциальное уравнение аппроксимируется факторизованной разностной схемой. Решение разностной задачи для факторизованной схемы сводится к последовательному решению разностных задач более простой структуры. Так, в случае двух переменных применяются экономические схемы вида

$$\left. \begin{aligned} B_1 y^{j+1/2} &= C_1 y^j + \tau \varphi_1^j, \\ B_2 y^{j+1} &= C_2 y^{j+1/2} + \tau \varphi_2^j, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — экономические операторы (обычно это — одномерные операторы). Для продольно-поперечной схемы

$$B_1 = E - 0,5\tau\Lambda_1, \quad B_2 = E - 0,5\tau\Lambda_2,$$

$$C_1 = E + 0,5\tau\Lambda_2, \quad C_2 = E + 0,5\tau\Lambda_1,$$

для схемы расщепления

$$B_\alpha = E - \sigma\tau\Lambda_\alpha, \quad C_\alpha = E + (1 - \sigma)\tau\Lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Принципиальным является требование эквивалентности задачи (1) факторизованной схеме

$$B_1 B_2 y^{j+1} = C y^j + \tau \varphi^j. \quad (2)$$

Эта эквивалентность имеет место не всегда, а лишь при согласованном задании правых частей и краевых значений для  $y^{j+1/2}$ . Кроме того, иногда требуется попарная перестановочность  $B_\alpha$ ,  $C_\alpha$  (см. § 2). Устойчивость факторизованной схемы имеет место, если  $B_1$  и  $B_2$  перестановочны. Это выполняется только для областей специального типа.

Схемы, рассматриваемые в § 1 и § 2, применялись только для прямоугольных областей.

Между тем, очевидно, что схема расщепления и продольно-поперечная схема могут быть формально написаны для непрямоугольных областей сложной формы. Однако при этом возникают трудности с определением аппроксимации, заданием краевых условий и доказательством устойчивости. Чтобы преодолеть эти трудности (они, впрочем, как мы видели в § 2, имеются даже в случае прямоугольной области), оказалось необходимым провести пересмотр понятия разностной схемы и, прежде всего, отказаться от сведения системы уравнений (1) к факторизованной схеме (2) и от требования их эквивалентности. Это привело к новому понятию разностной схемы, к понятию аддитивной схемы (см. А. А. Самарский [4], [5], [7], [12], [19]).

Систему двух разностных уравнений (1), осуществляющих переход со слоя  $j$  к слою  $j+1$ , будем называть *составной схемой*. Для составной схемы следует прежде всего дать определение аппроксимации, выяснить, в каком смысле она аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение.

Пусть  $u$  — решение многомерного дифференциального уравнения. Вычислим погрешность аппроксимации  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на решении  $u$  для каждой из схем (1) соответственно. Назовем погрешностью аппроксимации составной схемы (1) сумму  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ . Требование аппроксимации для составной схемы (1) означает, что  $\|\psi\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма. При этом может оказаться, что  $\psi_1 = O(1)$ ,  $\psi_2 = O(1)$ .

Составные схемы, погрешность аппроксимации для которых понимается как сумма погрешностей аппроксимации для промежуточных схем, будем называть *аддитивными схемами*.

Дадим общее определение аддитивной схемы (А. А. Самарский [19], И. В. Фрязинов [4]).

В гл. V было введено понятие  $n$ -слойной разностной схемы как разностного (по переменному  $t$ ) уравнения  $(n-1)$ -го

порядка с операторными коэффициентами:

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} C_{\beta}(t_j) y(t_{j+1} - \beta\tau) = f(t_j), \quad (n-1)\tau \leq t_j \leq t_0,$$

где  $C_{\beta}$  — линейные операторы, заданные на линейном нормированном пространстве  $H_h$ . Для определения решения надо задать  $n-1$  начальных векторов  $y(0) = y_0, y(\tau) = y_1, \dots, y((n-2)\tau) = y_{n-2}$ .

Назовем  $n$ -слойной составной схемой с периодом  $m$  (порядка  $m$ ) систему разностных уравнений с операторными коэффициентами

$$\sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j + \beta\tau) = \sum_{\beta=0}^{n-2} D_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j - \beta\tau) + f_{\alpha}(t_j), \quad (*)$$

где  $\alpha = 1, 2, \dots, m, (n-1)\tau \leq t_j \leq t_0$ , с заданными начальными значениями  $y(k\tau), k = 0, 1, \dots, n-2$  (число слоев определяется числом начальных условий), причем  $t_j$  принимает значения, равные

$$t_j = (n-1)\tau + km\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Чтобы найти  $y(t_j + m\tau) = y_{j+m}$  по известным  $y_{j-\beta}, \beta = 0, 1, \dots, n-2$ , где  $t_j = (m+n-1)\tau$ , надо решить систему уравнений с операторной матрицей  $C = (C_{\alpha\beta})$  размером  $m \times m$ .

При  $m = 1$  составная схема (\*) переходит в написанную выше обычную  $n$ -слойную схему. При  $n = 2$  получаем *двухслойную составную схему с периодом  $m$* :

$$\sum_{\beta=1}^m C_{\alpha\beta}(t_j) y(t_j + \beta\tau) = D_{\alpha 0} y(t_j) + f_{\alpha}(t_j), \quad 1 \leq \alpha \leq m, y(0) = y_0.$$

Если для составной схемы (\*) погрешность аппроксимации  $\psi$  определяется как сумма погрешностей аппроксимации  $\psi_{\alpha}$  отдельных уравнений,  $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_m$ , то составная схема (\*) называется аддитивной схемой.

Двухслойная аддитивная схема может быть записана в каноническом виде:

$$B \frac{y^{j+\alpha/m} - y^{j+(\alpha-1)/m}}{\tau} + \sum_{\beta=0}^m A_{\alpha\beta} y^{j+\beta/m} = \varphi_{\alpha}^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где  $B, A_{\alpha\beta}$  — некоторые линейные операторы.

Экономичные аддитивные схемы характеризуются тем, что для них операторная матрица перехода  $S = (S_{\alpha\beta})$  является треугольной, так что систему уравнений (3) можно записать в виде:

$$y^{j+\alpha/m} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} S_{\alpha\beta} y^{j+\beta/m} + \tau \tilde{\varphi}_{\alpha}^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Схема (1) соответствует частному случаю, когда  $m = 2$  и  $S = (S_{\alpha\beta})$  — диагональная матрица.

Пусть  $\psi_\alpha$  — погрешность аппроксимации на решении  $u$  исходного уравнения для одного уравнения (3) номера  $\alpha$ . Погрешность аппроксимации для аддитивной схемы (3) определяется как сумма

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться в том, что все экономичные методы, записанные в виде (3) и трактуемые как аддитивные схемы, обладают *суммарной аппроксимацией*.

Мы рассмотрим лишь простейшие примеры аддитивных схем вида

$$B_\alpha y^{j+\alpha/p} = C_\alpha y^{j+(\alpha-1)/p} + \tau \varphi_\alpha^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (6)$$

**2. Методы построения аддитивных схем.** Пусть дано многомерное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (7)$$

где  $L$  — линейный дифференциальный оператор, действующий на  $u(x, t)$  как функцию  $x = (x_1, \dots, x_p)$  — точки  $p$ -мерной области  $G$  с границей  $\Gamma$ , на которой заданы некоторые граничные условия.

Для построения экономичных методов основную роль играет возможность представления оператора  $L$  в виде суммы операторов более простой структуры,

$$L = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha. \quad (8)$$

Естественно возникают вопросы:

1) Как построить экономичную аддитивную схему для уравнения (7)?

2) Как оценить порядок точности этой схемы?

Попытаемся ответить сначала на первый вопрос (А. А. Самарский [16]).

Укажем общий подход, позволяющий получать схемы, обладающие суммарной аппроксимацией.

Уравнение (7) или

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f(x, t) = 0$$

перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathcal{P}_\alpha u = 0, \quad \mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha(x, t),$$

где  $f_\alpha(x, t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , — произвольные функции (из того же класса гладкости, что и  $f(x, t)$ ), удовлетворяющие условию

$$\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f.$$

Введем на отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагом  $\tau$ . Каждый полуинтервал  $(t_j, t_{j+1}]$  разобьем на  $p$  частей, введя точки

$$t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha\tau/p, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Обозначим  $\Delta_\alpha$  полуинтервал  $t_{j+(\alpha-1)/p} < t \leq t_{j+\alpha/p}$  и будем последовательно, начиная с  $\alpha = 1$ , решать уравнения

$$\mathcal{P}_\alpha v_{(\alpha)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (9)$$

полагая

$$\left. \begin{aligned} v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \\ v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \\ j = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Каждое из уравнений (9) номера  $\alpha$  заменим разностной схемой

$$\Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p \quad (11)$$

(аппроксимируя  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $L_\alpha u$  соответствующими разностными выражениями). В простейшем случае (11) есть двухслойная схема, связывающая значения  $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$  и  $y_{(\alpha-1)} = y^{j+(\alpha-1)/p}$ .

Схема (11) аппроксимирует уравнение (9) номера  $\alpha$  в обычном смысле, так что, например,

$$\Psi_\alpha = \Pi_\alpha u_h^{j+\alpha/p} - (\mathcal{P}_\alpha u)_h^{j+\alpha/p} \quad (12)$$

стремится к нулю (в некоторой норме) при стремлении к нулю шагов  $\tau$  и  $h_\alpha$  сетки  $\omega_{h\tau}$ . Здесь  $u_h$  — «проекция»  $u$  на сетку; для упрощения записи индекс  $h$  в дальнейшем опускаем.

Система разностных уравнений (11) является аддитивной схемой для задачи (7). В самом деле, пусть  $\psi_\alpha$  — погрешность аппроксимации на решении уравнения  $\mathcal{P}u = 0$  для одной схемы (11) номера  $\alpha$ . Величина  $\psi_\alpha$  определяется как невязка

$$\psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\alpha/p}.$$

Представляя  $\psi_\alpha$  в виде суммы

$$\psi_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+\alpha/p} + \Psi_\alpha$$

и учитывая, что  $(\mathcal{P}_\alpha u)^{j+\alpha/p} = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2} + O(\tau)$ , получим

$$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \text{где } \overset{\circ}{\psi}_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2},$$

а  $\|\psi_\alpha^*\| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$  и  $|h| \rightarrow 0$ , где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма в пространстве сеточных функций, заданных на  $\omega_h$ . Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0, \quad \psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* \quad \text{и} \quad \|\psi\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0, \quad (13)$$

т. е. аддитивная схема (11) обладает суммарной аппроксимацией, если каждая из схем (11) номера  $\alpha$  аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (9).

Этот факт объясняется тем, что система дифференциальных уравнений (9) аппроксимирует многомерное уравнение (7), (8) или  $\mathcal{P}u = 0$  в суммарном (интегральном) смысле.

В самом деле, погрешность аппроксимации для уравнения  $\mathcal{P}_\alpha v_{(\alpha)} = 0$  номера  $\alpha$  на решении  $u = u(x, t)$  уравнения  $\mathcal{P}u = 0$  есть невязка  $\psi_\alpha(t) = \mathcal{P}_\alpha u(t)$ , где  $t \in \Delta_\alpha$ .

Так как  $\mathcal{P}_\alpha u = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2} + O(\tau)$  при  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ , то  $\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$ , где  $\overset{\circ}{\psi}_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha u)^{j+1/2}$ ,  $\psi_\alpha^* = O(\tau)$ . Отсюда следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0, \quad \psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* = O(\tau),$$

т. е. аддитивная система дифференциальных уравнений (9) аппроксимирует уравнение  $\mathcal{P}u = 0$  с первым порядком по  $\tau$ .

Суммарная погрешность аппроксимации для системы дифференциальных уравнений (9), (10) может быть определена также следующим образом:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \frac{p}{\tau} \int_{t_{j+(\alpha-1)/p}}^{t_{j+\alpha/p}} \psi_\alpha dt.$$

Нетрудно заметить, что при таком определении  $\psi$  в приведенных выше рассуждениях изменится лишь последняя формула:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \frac{p}{\tau} \int_{t_{j+(\alpha-1)/p}}^{t_{j+\alpha/p}} \psi_\alpha^* dt = O(\tau).$$

Из устойчивости системы (9) и суммарной аппроксимации следует сходимость решения задачи (9), (10) к  $u(x, t)$ .



Важно подчеркнуть, что суммарная аппроксимация для (9) и (11) на достаточно гладких решениях задачи (7), (8) гарантируется выполнением двух условий:

- 1) оператор  $L$  есть сумма  $L = L_1 + \dots + L_p$ ,
- 2) правая часть  $f$  есть сумма  $f = f_1 + \dots + f_p$ .

Эти условия, очевидно, можно ослабить, потребовав, чтобы

$$Lu - \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u = O(\tau), \quad f - \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = O(\tau).$$

Условие (8) используется при построении экономических методов всеми авторами.

Вопрос о близости решений задач (9), (10) и (7), (8) изучался Н. Н. Яненко [5]. Рассматривалась задача Коши в полупространстве  $|x| < \infty$ ,  $t > 0$  для системы уравнений

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L(x, t, D)u + f(x, t),$$

где  $u(x, t)$ ,  $f(x, t)$  — векторные функции векторного аргумента,  $L(x, t, D)$  — линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от  $x, t$ .

Предполагалось, что оператор  $L$  представим в виде (8). Задача Коши заменялась составной задачей Коши (9), (10) в предположении, что  $f_{\alpha} = f/p$ . Используя свойство суммарной аппроксимации (вытекающее из условия (8)), которое интерпретировалось как некоторое свойство слабой аппроксимации коэффициентов дифференциального уравнения, Н. Н. Яненко [5] доказал, что

$$\|v(x, t) - u(x, t)\| = O(\tau)$$

(при условии достаточной гладкости  $u(x, t)$ ).

Мы показали здесь один из простых способов получения аддитивных схем. Его удобство в том, что сначала многомерная задача заменяется цепочкой более простых задач для дифференциальных уравнений; при этом легко выясняется характер краевых условий для  $v_{(\alpha)}$ , вид правой части  $f_{\alpha}$  и т. д. Если  $L_{\alpha}$  содержит лишь производные по переменному  $x_{\alpha}$ , то такой оператор  $L_{\alpha}$  называют одномерным, а соответствующие уравнения  $\mathcal{P}_{\alpha}v_{(\alpha)} = 0$  — одномерными уравнениями. В этом случае говорят, что решение многомерной задачи (7) сводится к решению последовательности одномерных задач (9).

Прежде чем переходить к изучению сходимости и точности аддитивных схем, остановимся на вопросе о близости решений задач (7) и (9).

**3. Аппроксимация «многомерной» задачи Коши системой «одномерных» задач Коши.** Обратимся к задаче (7). Пусть на  $\Gamma$  заданы однородные граничные условия. Будем рассматри-

вать функцию  $u(x, t)$  как функцию  $x$  в качестве элемента некоторого линейного нормированного пространства  $H_0$ . Тогда  $L$  будет линейным оператором в этом пространстве, а  $u = u(t)$  — абстрактной функцией  $t$  со значениями в  $H_0$  ( $u(t) \in H_0$  для всех  $t \in [0, t_0]$ ). Вместо частной производной в (7) можно писать обыкновенную производную по  $t$ .

В результате мы приходим к абстрактной задаче Коши:

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(0) = u_0 \in H_0, \quad (14)$$

где  $\mathcal{A}$  — линейный оператор в банаховом пространстве  $H_0$ . Область определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H_0$  оператора  $\mathcal{A}$  является всюду плотной в  $H_0$  и состоит из функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям на  $\Gamma$ . Область значений  $\Delta(\mathcal{A})$  оператора  $\mathcal{A}$  принадлежит  $H_0$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  представлен в виде суммы

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^p \mathcal{A}_\alpha \quad (15)$$

линейных операторов  $\mathcal{A}_\alpha$ , пересечение областей определения которых есть  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

В этом случае решение задачи Коши (14) можно свести к последовательному решению задач Коши того же типа, но с операторами  $\mathcal{A}_\alpha$  вместо  $\mathcal{A}$ .

Остановимся на двух способах такого сведения.

Пусть на отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  введена сетка

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагом  $\tau$ . По аналогии с п. 2, представим  $f$  в виде суммы

$$f = \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha \quad \text{и перепишем (14) в виде}$$

$$\sum_{\alpha=1}^p \left( \frac{1}{p} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}_\alpha u - f_\alpha \right) = 0.$$

На отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$  введем промежуточные значения  $t_{(\alpha)} = t_{j+\alpha/p}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$ , и рассмотрим систему задач Коши

$$\frac{1}{p} \frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha v_{(\alpha)} = f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad t_{j+(\alpha-1)/p} \leq t \leq t_{j+\alpha/p} \quad (16)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} v_{(1)}(0) = u_0, \quad v_{(1)}(t_j) = v_{(p)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \\ v_{(\alpha)}(t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad j = 0, 1, \dots, \alpha = 2, 3, \dots, p, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

полагая  $v(t_j) = v_p(t_j)$ . Будем называть решением этой задачи при  $t = t_{j+1}$  функцию  $v(t_{j+1}) = v_p(t_{j+1})$ .

Эта конструкция (совпадающая с конструкцией из п. 2) была использована (см. А. А. Самарский [4]—[16], [19]) при построении экономических аддитивных схем для многих многомерных задач математической физики и, в частности, для параболического уравнения (см. п. 5). Исследование связи задач (14) и (16), (17) показало, что решение задачи (16), (17)  $v(t_j) = v_{(p)}(t_j)$  сходится при  $\tau \rightarrow 0$  к решению задачи (14), причем  $v(t_j) = u(t_j) + O(\tau)$ , точнее  $\|v(t_j) - u(t_j)\| \leq M\tau$ , где  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$ ,  $\|\cdot\|$  — норма в  $H_0$  (см. Н. Н. Яненко [5], Н. Н. Яненко, Г. В. Демидов [1]).

Если оператор  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$  зависит от  $t$  (является переменным), то более точным оказывается второй способ аппроксимации задачи (14) системой задач Коши (А. А. Самарский [15]).

На всем промежутке  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  последовательно решаются  $p$  задач Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{(1)}}{dt} + \mathcal{A}_1(t) v_{(1)}(t) &= f_1(t), & t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dv_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_\alpha(t) v_{(\alpha)}(t) &= f_\alpha(t), & t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dv_{(p)}}{dt} + \mathcal{A}_p(t) v_{(p)}(t) &= f_p(t), & t_j \leq t \leq t_{j+1}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

с начальными данными

$$\left. \begin{aligned} v_{(1)}(0) &= u_0, & v_{(1)}(t_j) &= v_{(p)}(t_j), & j &= 1, 2, \dots, \\ v_{(\alpha)}(t_j) &= v_{(\alpha-1)}(t_{j+1}), & \alpha &= 2, 3, \dots, p, & j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Решением задачи (18) при  $t = t_{j+1}$  является, по определению, элемент

$$v(t_{j+1}) = v_{(p)}(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

При  $t = 0$  полагаем

$$v_{(1)}(0) = u(0) = u_0. \quad (20)$$

Пусть известно  $v(t_j)$ . Из первого уравнения при  $v_{(1)}(t_j) = v(t_j)$  определяем  $v_{(1)}(t_{j+1})$ , которое затем используем в качестве начального значения при  $t = t_j$  для  $v_{(2)}(t)$ , решаем второе уравнение (при  $\alpha = 2$ ) и т. д. После решения всех  $p$  задач найдем  $v_{(p)}(t_{j+1}) = v(t_{j+1})$ . Это и есть решение системы уравнений (18)—(20) при  $t = t_{j+1}$ .

Если  $\mathcal{A}_\alpha$  не зависят от  $t$  и  $f = 0$ , то обе задачи (16), (17) и (18)—(20) эквивалентны.

Покажем, что задача (18), (19) аппроксимирует задачу (14) в суммарном смысле. Пусть  $u(t)$  — решение задачи Коши (14),  $v_{(\alpha)}(t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — решение задачи (18), (19). Рассмотрим их разность

$$z_{(\alpha)}(t) = v_{(\alpha)}(t) - u(t_{j+1}) \quad \text{при } \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$z_{(1)}(t) = v_{(1)}(t) - u(t) \quad \text{при } t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Подставляя  $v_{(\alpha)}(t) = z_{(\alpha)}(t) + u^{j+1}$ ,  $u^{j+1} = u(t_{j+1})$ ,  $\alpha = 2, \dots, p$  и  $v_{(1)}(t) = z_{(1)}(t) + u(t)$  в (18), (19), получаем

$$\frac{dz_{(\alpha)}}{dt} + \mathcal{A}_{\alpha}(t) z_{(\alpha)}(t) = \psi_{\alpha}(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad 1 \leq \alpha \leq p,$$

$$z_{(1)}(t_j) = z_{(p)}(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, z_{(1)}(0) = 0,$$

$$z_{(\alpha)}(t_j) = z_{(\alpha-1)}(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$z(t_{j+1}) = z_{(p)}(t_{j+1}),$$

где

$$\psi_{\alpha}(t) = -\mathcal{A}_{\alpha}(t) u^{j+1} + f_{\alpha}(t), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$\psi_{(1)}(t) = -\mathcal{A}_{(1)}(t) u(t) - \frac{du}{dt} + f_{(1)}(t), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Отсюда видно, что

$$\psi = \psi_{(1)}(t) + \dots + \psi_{(p)}(t) = f(t) - \frac{du}{dt} - \mathcal{A}_{(1)}(t) u(t) - \sum_{\alpha=2}^p \mathcal{A}_{\alpha}(t) u^{j+1}.$$

Учитывая, что  $u^{j+1} = u(t) + O(\tau)$  для любого  $\alpha = 2, \dots, p$ ,  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ , получаем

$$\psi_{\alpha} = \dot{\psi}_{\alpha} + \psi_{\alpha}^*, \quad \psi_{\alpha}^* = O(\tau),$$

$$\dot{\psi}_{\alpha} = f_{\alpha}(t) - \mathcal{A}_{\alpha}(t) u(t) - \delta_{\alpha,1} \frac{du}{dt},$$

где  $\delta_{\alpha,1}$  — символ Кронекера. Таким образом,

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha}(t) - \sum_{\alpha=1}^p \mathcal{A}_{\alpha}(t) u(t) - \frac{du}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha}^* = O(\tau),$$

т. е. система дифференциальных уравнений (18), (19) аппроксимирует задачу Коши (14) в суммарном смысле с первым

порядком (при этом требуется существование и ограниченность (в некоторой норме)  $\mathcal{A}_\alpha(t) \frac{d^2 u}{dt^2}$ ).

Представляет интерес сравнение решения  $v(t_j)$  задачи (18)–(20) с решением  $u(t_j)$  исходной задачи.

Приведем без доказательства некоторые результаты.

А. Пусть  $f = 0$  и все  $f_\alpha = 0$ .

Если постоянные операторы  $\mathcal{A}_\alpha$  попарно перестановочны,  $\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\beta \mathcal{A}_\alpha$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$ , то при любых  $\tau$  имеет место равенство

$$v(t_j) = u(t_j) \quad \text{для всех } j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (21)$$

где  $v$  — решение задачи (18)–(20), а  $u$  — решение задачи (14).

Если же  $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha(t)$  зависят от  $t$ , то (21) имеет место при перестановочности операторов  $\mathcal{A}_\alpha(t')$  и  $\mathcal{A}_\beta(t'')$ ,  $\alpha \neq \beta$ , взятых в разные моменты времени,  $t' \neq t''$ , так что

$$\mathcal{A}_\alpha(t') \mathcal{A}_\beta(t'') = \mathcal{A}_\beta(t'') \mathcal{A}_\alpha(t'), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p,$$

для любых  $t', t'' \in [0, t_0]$ .

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + au(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0,$$

где  $a > 0$  — число. Очевидно, что  $u(t) = u_0 e^{-at}$ .

Представим  $a$  в виде суммы  $a = a_1 + a_2$  и напишем задачу 18)–(20)

$$\frac{dv_{(1)}}{dt} + a_1 v_{(1)}(t) = 0, \quad v_{(1)}(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

$$\frac{dv_{(2)}}{dt} + a_2 v_{(2)}(t) = 0, \quad v_{(2)}(0) = v_{(1)}(t^*), \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

где  $t^* > 0$  — любое число. Решая эти уравнения, находим  $v_{(1)}(t) = u_0 e^{-a_1 t}$ ,  $v_{(2)}(t) = v_{(1)}(t^*) e^{-a_2 t} = u_0 e^{-a_2 t - a_1 t^*}$ . Отсюда видно, что

$$v_2(t^*) = u(t^*).$$

Пример 2 (В. Я. Гольдин, Г. В. Данилова, Н. Н. Калиткин [1]). Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_1 u + L_2 u = 0, \quad L_\alpha u = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\ -\infty < x_\alpha < \infty, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = \mu(x).$$

Решение этой задачи есть бегущая волна

$$u(x, t) = \mu(x_1 - t, x_2 - t),$$

если  $\mu(x)$  дважды дифференцируемая функция.

Так как операторы  $L_1$  и  $L_2$  перестановочны, то

$$u(x, t^*) = v_{(2)}(x, t^*),$$

где  $v_{(2)}(x, t^*)$  — решение системы уравнений

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial v_{(1)}}{\partial x_1} = 0, \quad 0 < t \leq t^*, \quad v_{(1)}(x, 0) = \mu(x),$$

$$\frac{\partial v_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x_2} = 0, \quad 0 < t \leq t^*, \quad v_{(2)}(x, 0) = v_{(1)}(x, t^*).$$

В самом деле, решение первого из этих уравнений имеет вид

$$v_{(1)}(x, t) = \mu(x_1 - t, x_2).$$

Из второго уравнения находим

$$v_{(2)}(x, t) = \mu(x_1 - t^*, x_2 - t),$$

т. е.  $v_{(2)}(x, t^*) = u(x, t^*)$ .

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$-\infty < x_\alpha < \infty, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Ее решение дается формулой

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2, t) u_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где  $G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2, t)$  — функция источника, равная

$$G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2, t) = G_1(x_1, \xi_1, t) G_2(x_2, \xi_2, t),$$

$$G_\alpha(x_\alpha, \xi_\alpha, t) = \frac{e^{-(x_\alpha - \xi_\alpha)^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Напишем систему уравнений, соответствующую (18)–(20). Нетрудно заметить, что

$$v_{(1)}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x_1, \xi_1, t) u_0(\xi_1, x_2) d\xi_1, \quad (22)$$

$$v_{(2)}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x_2, \xi_2, t) v_{(1)}(x_1, \xi_2, t^*) d\xi_2. \quad (23)$$

Подставляя  $v_{(1)}(x, t^*)$  из (22) в (23), получим

$$v_{(2)}(x, t^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x_2, \xi_2, t^*) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x_1, \xi_1, t^*) u_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right] d\xi_2 = \\ = u(x, t^*)$$

при любом  $t^* > 0$ .

Б. Пусть операторы  $\mathcal{A}_\alpha(t)$  и  $\mathcal{A}_\beta(t)$  неперестановочны. Тогда справедлива оценка

$$\|v(t_j) - u(t_j)\| = O(\tau), \quad j = 1, 2, \dots \quad (24)$$

при дополнительном условии «гладкости»

$$\|\mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta u\| \leq M, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p.$$

Возникает вопрос, нельзя ли повысить точность по  $\tau$  без существенного усложнения составной задачи Коши?

Составную задачу Коши (18) схематически запишем следующим образом

$$\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}_p.$$

Рассмотрим симметризованную составную задачу Коши, представляющую собой цепочку  $2p$  задач Коши

$$0,5\mathcal{A}_1 \rightarrow 0,5\mathcal{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow 0,5\mathcal{A}_p \rightarrow 0,5\mathcal{A}_p \rightarrow 0,5\mathcal{A}_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow 0,5\mathcal{A}_1,$$

что соответствует представлению оператора  $\mathcal{A}$  в виде суммы

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^{2p} \mathcal{A}'_\alpha, \quad \text{где } \mathcal{A}'_\alpha = \begin{cases} 0,5\mathcal{A}_\alpha & \text{при } 1 \leq \alpha \leq p, \\ 0,5\mathcal{A}_{2p-\alpha+1} & \text{при } p < \alpha \leq 2p. \end{cases}$$

Эта задача имеет второй порядок точности по  $\tau$ :

$$\|v^j - u^j\| = O(\tau^2)$$

при некотором дополнительном требовании гладкости начального вектора  $u_0$  вида  $\|\mathcal{A}'_\alpha \mathcal{A}'_\beta u_0\| \leq M$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p$  и условиях гладкости  $\mathcal{A}_\alpha(t)$  по  $t$ .

Идея симметризации была развита И. В. Фрязиновым [4]—[6], который построил и исследовал ряд аддитивных схем повышенного порядка точности для уравнений параболического типа в ступенчатых областях, составленных из  $p$ -мерных параллелепипедов. При этом оказалось, что для выполнения требования суммарной аппроксимации  $O(\tau^2)$  требуется вводить поправки к естественным краевым значениям.

Итак, решение задачи (14) сводится к решению последовательности более простых задач (18)—(20). Для их решения

можно использовать как аналитические, так и приближенные методы, в частности, метод конечных разностей.

В случае, когда  $\mathcal{A}_\alpha$  попарно перестановочны, точность приближенного метода решения задачи (14) целиком зависит от того, с какой точностью мы решаем каждую из промежуточных задач (18) номера  $\alpha$ . Следует подчеркнуть, что проведенное выше изложение справедливо для случая однородных краевых условий. Если краевые условия неоднородны, то точность составной задачи Коши (18)—(20) существенно зависит от способа задания краевых условий для  $v_{(\alpha)}$ . Это же замечание относится и к разностным аналогам задачи (18)—(20).

Разностная аппроксимация каждой из задач (18), например, простейшей двухслойной схемой с весами приводит к аддитивной разностной схеме. Она является экономичной, если экономична каждая из промежуточных схем номера  $\alpha$ . Таким способом можно, в частности, получить схему, формально совпадающую при  $f_\alpha = 0$  со схемой расщепления Н. Н. Яненко [1] (схема (34) из § 2), но трактуемую как аддитивная схема. При этом не возникает никаких трудностей ни с постановкой краевых условий для  $y^{j+\alpha/p}$ , ни с заданием правых частей

$$\varphi_\alpha = \varphi^{j+\alpha/p}.$$

Если  $\mathcal{A}_\alpha$  — одномерные дифференциальные операторы, то соответствующую аддитивную схему мы называем *локально-одномерной схемой*. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности исследуется ниже.

**4. Методы оценки сходимости аддитивной схемы.** Напомним второй вопрос, который был поставлен в п. 2.

Как доказать сходимость аддитивной схемы?

Мы неоднократно убеждались в том, что из аппроксимации и устойчивости схемы следует ее сходимость.

Для аддитивных схем устойчивость по правой части должна быть такой, чтобы из условия суммарной аппроксимации  $\left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha \right\| \rightarrow 0$  следовало стремление к нулю решения разностной задачи (с нулевым начальным условием). Такие априорные оценки, ориентированные на использование свойства суммарной аппроксимации, имеют место для аддитивных схем в случае систем параболических и гиперболических уравнений.

Рассмотрим аддитивную схему общего вида в гильбертовом пространстве  $H_h$ :

$$\left. \begin{aligned} B \frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} z^{j+\beta/p} = \psi_\alpha^j, \\ \alpha = 1, 2, \dots, p, j = 0, 1, \dots, z^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$



Теорема 1. Если  $B = B^*$  — положительно определенный постоянный оператор и матрица-оператор  $A = (A_{\alpha\beta}) \geq 0$  неотрицательна, т. е. для любых векторов  $\xi_\alpha, \xi_\beta \in H$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^p (A_{\alpha\beta} \xi_\alpha, \xi_\beta) \geq 0, \quad (26)$$

то для решения задачи (25) справедлива априорная оценка

$$\|z^j\|_B \leq \max_{0 \leq k \leq j} \left\{ \sqrt{c} t_j \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^k \right\|_{B^{-1}} + p \sqrt{\tau} t_j \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha^k\|_{B^{-1}} \right\}. \quad (27)$$

Доказательство. Перепишем уравнение (25) в виде

$$Bz_{\bar{t}_\alpha} + \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} z_\beta = \psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$z_\alpha = z^{j+\alpha/p}, \quad z_{\bar{t}_\alpha} = (z_\alpha - z_{\alpha-1})/\tau, \quad z_p = z^{j+1}, \quad z_0 = z^j.$$

Умножим обе части уравнения (25) скалярно на  $z_\alpha$  и просуммируем по  $\alpha$ . Учитывая, что

$$(Bz_{\bar{t}_\alpha}, z_\alpha) = 0,5 (Bz_\alpha, z_\alpha)_{\bar{t}_\alpha} + 0,5\tau (Bz_{\bar{t}_\alpha}, z_{\bar{t}_\alpha}),$$

получаем энергетическое тождество

$$(Bz^{j+1}, z^{j+1}) + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p (Bz_{\bar{t}_\alpha}, z_{\bar{t}_\alpha}) + 2\tau \sum_{\alpha=1}^p \left( \sum_{\beta=1}^p A_{\alpha\beta} z_\beta, z_\alpha \right) =$$

$$= 2\tau \sum_{\alpha=1}^p (\psi_\alpha, z_\alpha) + (Bz^j, z^j). \quad (28)$$

Преобразуем сумму  $J = 2\tau \sum_{\alpha=1}^p (\psi_\alpha, z_\alpha)$ . Для этого представим  $z_\alpha$  в виде

$$z_\alpha = z^j + \sum_{\beta=1}^{\alpha} \tau z_{\bar{t}_\beta}.$$

Тогда

$$J = 2\tau \left( \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha, z^j \right) + 2\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \left( \psi_\alpha, \sum_{\beta=1}^{\alpha} z_{\bar{t}_\beta} \right).$$

Воспользуемся обобщенным неравенством Коши — Буняковского и  $\varepsilon$ -неравенством

$$\begin{aligned} J &\leq 2\tau \left( \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha, z^j \right) + \varepsilon\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \alpha \|\psi_\alpha\|_{B^{-1}}^2 + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha} \|z_{\bar{\tau}_\beta}\|_B^2 \leq \\ &\leq \frac{\tau}{\varepsilon_0} \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha \right\|_{B^{-1}}^2 + \varepsilon_0\tau \|z^j\|_B^2 + \frac{\tau^2 p}{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^p \|z_{\bar{\tau}_\alpha}\|_B^2 + \\ &+ \varepsilon\tau^2 p \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha\|_{B^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Положим  $\varepsilon = p$ :

$$J \leq \varepsilon_0\tau \|z^j\|_B^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha \right\|_{B^{-1}}^2 + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \|z_{\bar{\tau}_\alpha}\|_B^2 + p^2\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha\|_{B^{-1}}^2.$$

Подставим эту оценку в правую часть тождества (28) и учтем (26):

$$\|z^{j+1}\|_B^2 \leq (1 + \varepsilon_0\tau) \|z^j\|_B^2 + \frac{\tau}{\varepsilon_0} \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^j \right\|_{B^{-1}}^2 + p^2\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha^j\|_{B^{-1}}^2,$$

где  $\psi_\alpha^j = \psi_\alpha^{j+\alpha/p}$ . В силу замечания к лемме 5 из § 1 гл. VI имеем

$$\|z^{j+1}\|_B^2 \leq e^{\varepsilon_0 t_j} \left[ \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{k=0}^j \tau \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^k \right\|_{B^{-1}}^2 + p^2 \sum_{k=0}^j \tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha^k\|_{B^{-1}}^2 \right].$$

Из условия минимума первого слагаемого выбираем  $\varepsilon_0 = 1/t_j$ . В результате получаем оценку

$$\|z^{j+1}\|_B^2 \leq e \left[ t_j \sum_{k=0}^j \tau \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^k \right\|_{B^{-1}}^2 + p^2 \tau \sum_{k=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha^k\|_{B^{-1}}^2 \right]$$

ИЛИ

$$\|z^{j+1}\|_B \leq \sqrt{e} t_j \max_{0 \leq k \leq j} \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^k \right\|_{B^{-1}} + p \sqrt{\tau t_j} \max_{0 \leq k \leq j} \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_\alpha^k\|_{B^{-1}}.$$

Отсюда видно, что из суммарной аппроксимации в  $H_{B^{-1}}$  следует сходимость в  $H_B$ , т. е. из условий

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha} \right\|_{B^{-1}} = \|\psi\|_{B^{-1}} \rightarrow 0, \quad \|\psi_{\alpha}\|_{B^{-1}} = O(1), \quad \tau \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0,$$

следует, что  $\|z^j\|_B \rightarrow 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots$

Отметим, что оценка (27) получена при весьма слабых ограничениях: оператор  $B$  положительно определен и самосопряжен, матрица-оператор  $A = (A_{\alpha\beta})$  — неотрицательна.

Если схема (25) рассматривается в банаховом пространстве  $H_h$ , то применяется другой метод построения априорных оценок.

Пусть схема (25) устойчива, так что

$$\|z^j\|_{(1)} \leq M \max_{0 \leq k < j} \sum_{\alpha=1}^p \|\psi_{\alpha}^k\|_{(2)}, \quad (29)$$

где  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  — некоторые нормы на  $H_h$ .

Предположим, что  $\psi_{\alpha}$  можно представить в виде суммы

$$\psi_{\alpha} = \overset{\circ}{\psi}_{\alpha} + \psi_{\alpha}^*, \quad \text{так что} \quad \sum_{\alpha=1}^p \overset{\circ}{\psi}_{\alpha} = 0. \quad (30)$$

Положим  $z^{j+\alpha/p} = \eta^{j+\alpha/p} + v^{j+\alpha/p}$ , где  $\eta^{j+\alpha/p}$  определяется из условий

$$B \frac{\eta^{j+\alpha/p} - \eta^{j+(a-1)/p}}{\tau} = \overset{\circ}{\psi}_{\alpha}^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \eta^0 = 0.$$

Отсюда следует:

$$B\eta^{j+\alpha/p} = B\eta^j + \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} \overset{\circ}{\psi}_{\beta}^j, \quad B\eta^{j+1} = B\eta^j = \dots = B\eta^0 = 0,$$

т. е.  $\eta^j = 0$ ,  $z^j = v^j$  для всех  $j = 1, 2, \dots$ ,

$$\eta^{j+\alpha/p} = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} B^{-1} \overset{\circ}{\psi}_{\beta}^j = -\tau \sum_{\beta=\alpha+1}^p B^{-1} \overset{\circ}{\psi}_{\beta}^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Для  $v^{j+\alpha/p}$ , очевидно, получим уравнение (25) с правой частью

$$\tilde{\psi}_{\alpha}^j = \psi_{\alpha}^{*j} + \tau \sum_{\beta=1}^p A_{\alpha\beta} \sum_{\beta'=\beta+1}^p B^{-1} \overset{\circ}{\psi}_{\beta'}^j$$

и начальным условием  $v^0 = 0$ . Из (29) следует

$$\|z^j\|_{(1)} = \|v^j\|_{(1)} \leq M \max_{0 \leq j' < j} \sum_{\alpha=1}^p \|\tilde{\psi}_{\alpha}^{j'}\|_{(2)}.$$

Условие суммарной аппроксимации означает, что 1)  $\psi_{\alpha}$  можно представить в виде (30), 2)  $\|\tilde{\psi}_{\alpha}^j\|_{(2)} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $|h| \rightarrow 0$ . Второе

требование будет выполнено, если  $\|\Psi_{\alpha}^*\|_{(2)} \rightarrow 0$  и  $\|A_{\alpha\beta} B^{-1} \Psi_{\beta}^*\| = O(1)$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $|h| \rightarrow 0$ .

Проиллюстрируем второй метод исследования сходимости аддитивной схемы (мы будем им пользоваться в п.п. 7, 8) на простом примере.

Пример 1. Пусть дана задача Коши

$$\frac{du}{dt} + (a_1 + a_2)u = f(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad u(0) = u_0, \quad (31)$$

где  $a_1 \geq 0$ ,  $a_2 \geq 0$  — числа.

Напишем простейшую аддитивную схему, соответствующую задаче (31). Для этого заменим (31) системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{(1)}}{dt} + a_1 v_{(1)} &= f_1(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad v_{(1)}(t_j) = v(t_j), \\ \frac{dv_{(2)}}{dt} + a_2 v_{(2)} &= f_2(t), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad v_{(2)}(t_j) = v_{(1)}(t_{j+1}), \\ f_1 + f_2 &= f. \end{aligned} \right\}$$

Аддитивная схема имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{(1)}^{j+1} - y_{(1)}^j}{\tau} + a_1 y_{(1)}^{j+1} &= f_1(t_{j+1/2}), \quad y_{(1)}^j = y^j, \\ \frac{y_{(2)}^{j+1} - y_{(2)}^j}{\tau} + a_2 y_{(2)}^{j+1} &= f_2(t_{j+1/2}), \quad y_{(2)}^j = y_{(1)}^{j+1}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Подставляя сюда  $y_{(1)}^j = y^j$ ,  $y_{(2)}^j = y_{(1)}^{j+1} = y^{j+1/2}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} + a_1 y^{j+1/2} &= f_1(t_{j+1/2}), \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} + a_2 y^{j+1} &= f_2(t_{j+1/2}), \quad y^0 = u_0. \end{aligned} \right\}$$

Найдем погрешность аппроксимации для каждой из схем. Представим  $y^{j+s/2} = u^{j+s/2} + z^{j+s/2}$ ,  $s = 0, 1, 2$ , тогда для  $z^{j+s/2}$  получим условия

$$\left. \begin{aligned} \frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau} + a_1 z^{j+1/2} &= \psi_1^j, \\ \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau} + a_2 z^{j+1} &= \psi_2^j, \quad z^0 = 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $\psi_\alpha^j$  — погрешность аппроксимации (на решении  $u$ ) уравнением номера  $\alpha$  исходного уравнения (31):

$$\begin{aligned}\psi_1^j &= f_1^{j+1/2} - \frac{u^{j+1/2} - u^j}{\tau} - a_1 u^{j+1/2} = \overset{\circ}{\psi}_1^j + \psi_1^{*j}, \\ \psi_2^j &= f_2^{j+1/2} - \frac{u^{j+1} - u^{j+1/2}}{\tau} - a_2 u^{j+1} = \overset{\circ}{\psi}_2^j + \psi_2^{*j}, \\ \psi_1^* &= O(\tau), \quad \psi_2^* = O(\tau).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\psi}_1^j &= \left( f_1 - 0,5 \frac{du}{dt} - a_1 u \right)^{j+1/2}, \\ \overset{\circ}{\psi}_2^j &= \left( f_2 - 0,5 \frac{du}{dt} - a_2 u \right)^{j+1/2}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 = 0, \quad \psi_1 + \psi_2 = \psi_1^* + \psi_2^* = O(\tau).$$

Положим  $z^{j+s/2} = \eta^{j+s/2} + v^{j+s/2}$ ,  $s = 0, 1, 2$ , где

$$\frac{\eta^{j+1/2} - \eta^j}{\tau} = \overset{\circ}{\psi}_1^j, \quad \frac{\eta^{j+1} - \eta^{j+1/2}}{\tau} = \overset{\circ}{\psi}_2^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \eta^0 = 0,$$

так что  $\eta^j = 0$  для всех  $j = 0, 1, 2, \dots$ , а

$$\eta^{j+1/2} = \tau \overset{\circ}{\psi}_1^j = -\tau \overset{\circ}{\psi}_2^j.$$

Для  $v$  получаем условия

$$\begin{aligned}\frac{v^{j+1/2} - v^j}{\tau} + a_1 v^{j+1/2} &= \tilde{\psi}_1^j, \quad \tilde{\psi}_1^j = \psi_1^{*j} + a_1 \tau \overset{\circ}{\psi}_2^j, \\ \frac{v^{j+1} - v^{j+1/2}}{\tau} + a_2 v^{j+1} &= \tilde{\psi}_2^j, \quad \tilde{\psi}_2^j = \psi_2^{*j}, \quad v^0 = 0.\end{aligned}$$

Так как  $a_1 \geq 0$ ,  $a_2 \geq 0$ , то

$$\begin{aligned}|v^{j+1/2}| &= \frac{1}{1+a_1\tau} |v^j + \tau \tilde{\psi}_1^j| \leq |v^j| + \tau |\tilde{\psi}_1^j|, \\ |v^{j+1}| &= \frac{1}{1+a_2\tau} |v^{j+1/2} + \tau \tilde{\psi}_2^j| \leq |v^{j+1/2}| + \tau |\tilde{\psi}_2^j|, \\ |v^{j+1}| &\leq |v^j| + \tau (|\tilde{\psi}_1^j| + |\tilde{\psi}_2^j|) \leq \tau \sum_{j'=0}^j (|\tilde{\psi}_1^{j'}| + |\tilde{\psi}_2^{j'}|).\end{aligned}$$

Замечая, что  $z^j = v^j$ ,  $|\tilde{\psi}_\alpha^j| = O(\tau)$ , получаем  $|z^j| = O(\tau)$ , т. е. аддитивная схема (32) имеет первый порядок точности при любых  $f_1$  и  $f_2 = f - f_1$ .

Подчеркнем, что при изучении сходимости аддитивных схем мы предполагаем (как и всюду в теории разностных схем)

единственность, существование и достаточную гладкость решения исходной многомерной задачи.

Пусть, например,  $u$  — решение задачи Коши (14),  $y = y_h$  — решение аддитивной схемы,  $y_h \in H_h$ , где  $H_h$  — пространство сеточных функций. Следуя § 1 гл. I и § 1 гл. V, мы должны оценить разность  $z_h^i = y_h^i - u_h^i$ , где  $u_h = \mathcal{P}_h u$ ,  $\mathcal{P}_h$  — линейный оператор из  $H_0$  в  $H_h$  ( $u \in H_0$ ,  $u_h \in H_h$ ), точнее, величину  $\|y_h^i - u_h^i\|_{(1_h)}$ , где  $\|\cdot\|_{(1_h)}$  — некоторая норма на  $H_h$ . Эта оценка производится непосредственно: пишется задача для  $z_h$ , вычисляются погрешности аппроксимации  $\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$  и используется один из указанных в этом пункте методов оценки  $z_h$ .

Возможен другой способ оценки  $z_h$ . Пусть  $v \in H_0$  — решение составной задачи Коши (18) (или (16)),  $v_h = \mathcal{P}_h v \in H_h$ . В силу неравенства треугольника

$$\|z_h^i\|_{(1_h)} = \|y_h^i - u_h^i\|_{(1_h)} \leq \|y_h^i - v_h^i\|_{(1_h)} + \|v_h^i - u_h^i\|_{(1_h)}.$$

Оценка близости  $y_h$  и  $u_h$  сводится к оценке близости  $y_h$  и  $v_h$ ,  $v$  и  $u$ . При оценке  $\|v_h - u_h\|_{(1_h)}$  требуется информация о гладкости  $u$ , при оценке  $\|y_h - v_h\|_{(1_h)}$  о гладкости  $v$ . Таким образом, при этом способе оценки порядка точности аддитивной схемы надо сначала установить (либо предположить) гладкость нужного порядка функции  $v$ . Это требует дополнительного исследования дифференциальных свойств решения составной задачи Коши и является, вообще говоря, трудной задачей.

В случае А из п. 3, когда  $\mathcal{A}_\alpha$  попарно перестановочны,  $v^j = u^j$  и поэтому

$$\|z_h^i\|_{(1_h)} = \|y_h^i - v_h^i\|_{(1_h)},$$

т. е. сходимость аддитивной схемы следует из устойчивости и аппроксимации для каждой из промежуточных схем.

В п. 3 было показано, что составная задача Коши также обладает свойством суммарной аппроксимации. Поэтому при оценке  $\|v - u\|_{(1_0)}$  работают те же методы, что и при оценке  $\|y_h - u_h\|_{(1_h)}$ .

**5. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности в произвольной области.** Пользуясь методом суммарной аппроксимации, нетрудно построить экономичные аддитивные схемы для параболических уравнений в области сложной формы. Мы проведем детальное исследование локально-одномерной схемы для уравнения теплопроводности в  $p$ -мерной области  $\bar{G} = G + \Gamma$  сложной формы. Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  — точка  $p$ -мерного евклидова пространства  $R_p$ .

Рассмотрим в цилиндре  $\bar{Q}_h = \bar{G} \times [0 \leq t \leq t_0]$  следующую задачу для уравнения теплопроводности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}, \quad (x, t) \in Q_h, \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Здесь  $\Gamma$  — граница области  $G$ ,  $L$  — эллиптический оператор второго порядка. Для упрощения изложения считаем, что  $L = \Delta$  — оператор Лапласа, т. е.  $L_{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Предположим, что задача (33) имеет единственное достаточно гладкое решение.

Относительно области  $\bar{G}$  конструктивно используются два предположения: 1) пересечение области  $G$  любой прямой  $S_{\alpha}$ , параллельной оси координат  $Ox_{\alpha}$ , может состоять лишь из конечного числа интервалов, 2) возможно построение в области  $\bar{G}$  связанной сетки  $\bar{\omega}_h$ , описанной в гл. IV, § 1, с шагами  $h_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Напомним обозначения:

$\omega_{h, \alpha}^*$  — множество приграничных по направлению  $Ox_{\alpha}$  узлов;

$\gamma_{h, \alpha}$  — множество граничных по направлению  $Ox_{\alpha}$  (по  $x_{\alpha}$ ) узлов;

$\omega_h^* = \bigcup_{\alpha=1}^p \omega_{h, \alpha}^*$  — множество всех приграничных узлов;

$\gamma_h$  — множество всех граничных узлов;

$\omega_{h, \alpha}^{\circ}$  — дополнение  $\omega_{h, \alpha}^*$  до  $\omega_{h, \alpha}$ ,  $\omega_{h, \alpha}^{\circ} = \omega_{h, \alpha} + \omega_{h, \alpha}^*$ ;

$\omega_h^{\circ}$  — дополнение  $\omega_h^*$  до  $\omega_h$ ,  $\omega_h^{\circ} = \omega_h + \omega_h^*$ ;

$\omega_{h, \alpha}^{**}$  — множество приграничных узлов, нерегулярных по  $x_{\alpha}$ .

Для разностной аппроксимации оператора  $L_{\alpha}$  в узле  $x$  выбираем трехточечный шаблон, состоящий из точек  $x^{(-1\alpha)}$ ,  $x$ ,  $x^{(+1\alpha)}$ . Разностный оператор  $\Lambda_{\alpha} \sim L_{\alpha}$  имеет вид:

а) В регулярных узлах

$$\Lambda_{\alpha} y = y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}} = \frac{1}{h_{\alpha}^2} (y^{(+1\alpha)} - 2y + y^{(-1\alpha)}).$$

б) В нерегулярных узлах

$$\Lambda_{\alpha} y = y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha}} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha}^*} \right), & x^{(-1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}, \\ \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left( \frac{y^{(+1\alpha)} - y}{h_{\alpha}^*} - \frac{y - y^{(-1\alpha)}}{h_{\alpha}} \right), & x^{(+1\alpha)} \in \gamma_{h, \alpha}, \end{cases}$$

где  $h_\alpha = 0,5(h_\alpha + h_\alpha^*)$ ,  $h_\alpha^*$  — расстояние от нерегулярного узла  $x$  до граничного узла  $x^{(+1_\alpha)}$  или  $x^{(-1_\alpha)}$ . Если  $x \in \omega_{h_\alpha}^*$  и  $x^{(-1_\alpha)} \in \gamma_{h_\alpha}$ ,  $x^{(+1_\alpha)} \in \gamma_{h_\alpha}$ , то

$$\Lambda_\alpha u = y_{\bar{x}_\alpha} \bar{x}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_{\alpha+}^*} - \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_{\alpha-}^*} \right),$$

где  $h_{\alpha+}^*$  — расстояние между  $x$  и  $x^{(+1_\alpha)}$ ,  $h_{\alpha-}^*$  — расстояние между  $x$  и  $x^{(-1_\alpha)}$ ,  $h_{\alpha\pm}^* \leq h_\alpha$ .

В регулярных узлах  $\Lambda_\alpha$  имеет второй порядок аппроксимации  $\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2)$ , в нерегулярных узлах — первый порядок:  $\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha)$ .

Перейдем к написанию локально-одномерной схемы. Приведем сначала наводящие соображения, в основном повторяющие рассуждения п. 3. На отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  введем сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагом  $\tau = t_0/j_0$ . Пусть  $f_\alpha$  — произвольные функции, такие, что

$$\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f.$$

В слое  $(t_j, t_{j+1})$  вместо (33) будем решать последовательно уравнения

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha(x, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in G, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad (34)$$

с начальными условиями

$$v_1(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(j)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$v_{(\alpha)}(x, t_j) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

полагая

$$v(x, t_{j+1}) = v_{(p)}(x, t_{j+1}).$$

Краевые условия для  $v_{(\alpha)}$ , очевидно, достаточно задавать не на всей границе  $\Gamma$ , а на ее части  $\Gamma_\alpha$ , состоящей из точек пересечения  $\Gamma$  со всевозможными прямыми  $C_\alpha$ , параллельными  $Ox_\alpha$  и проходящими через любую внутреннюю точку  $x \in G$  (см. гл. IV, § 1). Узлы  $x \in \gamma_{h_\alpha}$  лежат на  $\Gamma_\alpha$ .

Если, например,  $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha\}$  — параллелепипед, то  $\Gamma_\alpha$  состоит из граней  $x_\alpha = 0$  и  $x_\alpha = l_\alpha$ . Пусть  $\Delta_\alpha$  — пересечение  $C_\alpha$  с  $\bar{G}$ . По предположению 1) относительно области  $\bar{G}$  множество  $\Delta_\alpha$  состоит из конечного числа отрезков, параллельных  $Ox_\alpha$ , с концами на  $\Gamma_\alpha$ .



Заменяем каждое из одномерных уравнений теплопроводности (34) двухслойной чисто неявной схемой

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{(\alpha)}^{j+1} - y_{(\alpha)}^j}{\tau} &= \Lambda_{\alpha} y_{(\alpha)}^{j+1} + \Phi_{\alpha}^{j+1}, \quad x \in \omega_h, \\ \alpha &= 1, 2, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

с начальными данными

$$\left. \begin{aligned} y_{(1)}^0 &= u_0(x), \quad y_{(1)}^j = y_{(p)}^j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ y_{(\alpha)}^j &= y_{(\alpha-1)}^{j+1}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Граничное значение  $y_{(\alpha)}^j|_{\gamma_{h,\alpha}}$  и правую часть  $\Phi_{\alpha}^{j+1}$  можно выражать через  $\mu$  и  $f_{\alpha}$ , взятые в произвольные моменты  $t_{\alpha}^*$  и  $t_{\alpha}^{**}$  на отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$ :

$$y_{(\alpha)}^j|_{\gamma_{h,\alpha}} = \mu(x, t_{\alpha}^*), \quad \Phi_{\alpha}^{j+1} = f(x, t_{\alpha}^{**}).$$

Из пп. 7 и 8 следует, что схемы, получающиеся при различных  $t_{\alpha}^*$  и  $t_{\alpha}^{**}$ , имеют один и тот же порядок точности. Для определенности полагаем

$$y_{(\alpha)}^{j+1}|_{\gamma_{h,\alpha}} = \mu(x, t_{j+1}), \quad \Phi_{\alpha}^{j+1} = f(x, t_{j+1/2}), \quad 1 \leq \alpha \leq p. \quad (36')$$

Значение  $y_{(p)}^{j+1}$  и будем называть решением разностной задачи при  $t = t_{j+1}$  и обозначать  $y^{j+1} = y_{(p)}^{j+1}$ . Учитывая начальные условия (36), перепишем (35) в виде

$$\begin{aligned} \frac{y_{(\alpha)}^{j+1} - y_{(\alpha-1)}^{j+1}}{\tau} &= \Lambda_{\alpha} y_{(\alpha)}^{j+1} + \Phi_{\alpha}^{j+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ y_{(p)}^{j+1} &= y^{j+1}, \quad y_{(0)}^{j+1} = y^j. \end{aligned}$$

Введем безындексные обозначения  $y_{(\alpha)} = y_{(\alpha)}^{j+1}$ ,  $\Phi_{\alpha} = \Phi_{\alpha}^{j+1}$ . Тогда локально-одномерная схема может быть записана в виде

$$\frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} y_{(\alpha)} + \Phi_{\alpha}, \quad x \in \omega_h, \quad 0 < t = j\tau \leq t_0, \quad (37)$$

$$y_{(\alpha)} = \mu, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad y_{(0)} = y^j, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (38)$$

Для каждого уравнения номера  $\alpha$  мы получаем одномерную первую краевую задачу. Решаются эти задачи последовательно в порядке возрастания  $\alpha$ . Для решения каждой из задач

$$y_{(\alpha)}/\tau - \Lambda_{\alpha} y_{(\alpha)} = y_{(\alpha-1)}/\tau + \Phi_{\alpha}, \quad y_{(\alpha)}|_{\gamma_{h,\alpha}} = \mu$$

вдоль отрезков, параллельных  $Ox_{\alpha}$  с концами на  $\gamma_{h,\alpha}$ , применяется алгоритм прогонки. Алгоритм решения задачи (37), (38) похож на все остальные экономичные методы — последователь-

но меняются направления прогонки ( $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ). Чтобы найти значения  $y$  на шаге  $t_{j+1}$  по данным на шаге  $t_j$ , надо поэтапно решить  $p$  одномерных задач по всем координатным направлениям.

### 6. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы.

Пусть  $u = u(x, t)$  — решение задачи (33) с  $L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$  и  $y_{(\alpha)}$  — решение разностной задачи (37), (38). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность  $y^j - u^j = z^j$ .

Промежуточные значения  $y_{(\alpha)}^{j+1}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$  будем сравнивать с  $u(x, t_\alpha^*)$ , где  $t_\alpha^*$  — любое значение на отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$ . В выборе  $t_\alpha^*$  есть большой произвол. Для определенности будем полагать

$$z_{(\alpha)}^{j+1} = y_{(\alpha)}^{j+1} - u^{j+1}, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

так, что  $z_{(0)}^{j+1} = z^j = y^j - u^j$ ,  $z_{(p)}^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}$ . Подставим  $y_{(\alpha)} = z_{(\alpha)} + \hat{u}$  в (37), (38):

$$\frac{z_{(\alpha)} - z_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha z_{(\alpha)} + \psi_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad 0 < t = j\tau \leq t_0, \quad (39)$$

$$z_{(\alpha)}|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Здесь  $\psi_\alpha$  — погрешность, с которой аппроксимирует уравнение (37) номера  $\alpha$  многомерное уравнение (33) на его решении  $u$ :

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha \hat{u} + \Phi_\alpha - \frac{\hat{u} - u}{\tau} \delta_{\alpha,1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \hat{u} = u^{j+1}, \quad u = u^j,$$

$$\delta_{\alpha,1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Вводя обозначения

$$\dot{\psi}_\alpha = L_\alpha u + f_\alpha - \delta_{\alpha,1} \frac{\partial u}{\partial t}$$

(так что  $\dot{\psi}_1 = L_1 u + f_1 - \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\dot{\psi}_\alpha = L_\alpha u + f_\alpha$ ,  $\alpha = 2, 3, \dots, p$ ), перепишем  $\psi_\alpha$  в виде

$$\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*. \quad (40)$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0, \quad (41)$$

если  $\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f$ . Оценим величину  $\psi_{\alpha}^*$ :

$$\psi_{\alpha}^* = \psi_{\alpha} - \overset{\circ}{\psi}_{\alpha} = (\Lambda_{\alpha} \hat{u} + \varphi_{\alpha}) - (L_{\alpha} u + f_{\alpha}) - \left( (\hat{u} - u) / \tau - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta_{\alpha, 1}.$$

Из п. 5 следует, что

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha}^* &= O(h_{\alpha}^2 + \tau) \text{ в регулярном узле,} \\ \psi_{\alpha}^* &= O(h_{\alpha} + \tau) \text{ в нерегулярном узле.} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Так как  $\overset{\circ}{\varphi}_{\alpha} = O(1)$ , то каждое из уравнений номера  $\alpha$  не аппроксимирует многомерное уравнение (33). Однако, в силу (40)–(42), аддитивная схема (37), (38) аппроксимирует уравнение в суммарном смысле, так как

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha}^* = O(|h|^2 + \tau)$$

в регулярных узлах,  $\psi = O(|h| + \tau)$  — в нерегулярных узлах.

Таким образом, локально-одномерная схема (37), (38) обладает свойством суммарной аппроксимации уравнения (33).

Наша задача — показать, что из суммарной аппроксимации следует равномерная сходимость локально-одномерной схемы со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ .

Необходимо сначала доказать принцип максимума для локально-одномерной схемы и получить априорные оценки в равномерной метрике для решения задачи (37), (38), выражающие устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным, по правой части и по граничным данным.

**7. Устойчивость локально-одномерной схемы.** В гл. IV § 1, п. 5 был доказан принцип максимума для уравнения, которое мы запишем в виде

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \mathcal{M}'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega, \quad Q \in \bar{\Omega}, \quad (43)$$

где  $P, Q$  — узлы связной сетки  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ ,  $y(Q)$  задана на  $\bar{\Omega}$ , уравнение пишется в  $\Omega$ ,  $A(P)$ ,  $B(P, Q)$  и  $F(P)$  — заданные числовые функции точек  $P, Q$ ;  $S$  — граница сетки,  $\mathcal{M}'(P)$  — окрестность узла  $P$ .

В главе IV рассматривался случай, когда  $P = x \in \bar{\omega}_h$ , где  $\bar{\omega}_h$  — сетка в области  $G$   $p$ -мерного пространства. Установленный там принцип максимума и вытекающие из него следствия сохраняют, очевидно, силу для уравнения (43).

Будем предполагать, что

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0. \quad (44)$$

Обозначим

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{M}'(P)} B(P, Q).$$

Принцип максимума для (43) имеет место при

$$D(P) \geq 0, \quad P \in \Omega. \quad (45)$$

В этом случае для решения однородного уравнения  $L[y(P)] = 0$ , где

$$L[y(P)] = A(P)y(P) - \sum_{Q \in \mathcal{M}'(P)} B(P, Q)y(Q), \quad P \in \Omega,$$

справедлива оценка

$$\max_{P \in \Omega} |y(P)| \leq \max_{Q \in S} |y(Q)|. \quad (46)$$

Если выполнено условие

$$D(P) > 0 \quad \text{для } P \in \Omega, \quad (47)$$

то для решения уравнения (43) с однородным условием  $y|_S = 0$  имеет место оценка

$$\max_{P \in \bar{\Omega}} |y(P)| \leq \max_{P \in \Omega} \left| \frac{F(P)}{D(P)} \right|. \quad (48)$$

Если хотя бы один узел  $Q \in \mathcal{M}'(P)$  является граничным,  $Q \in S$ , то узел  $P \in \Omega$  назовем приграничным. Обозначим  $\Omega^*$  множество приграничных узлов, а  $\overset{\circ}{\Omega}$  — дополнение  $\Omega^*$  до  $\Omega$ , так что  $\overset{\circ}{\Omega} + \Omega^* = \Omega$ . Предположим, что

$$\left. \begin{aligned} D(P) \geq 0 \quad \text{при } P \in \overset{\circ}{\Omega}, \quad D(P) \geq \frac{1}{\delta(P)} > 0 \quad \text{при } P \in \Omega^*, \\ F(P) = 0 \quad \text{при } P \in \overset{\circ}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Тогда для решения уравнения (43) верна оценка

$$\max_{P \in \bar{\Omega}} |y(P)| \leq \max_{P \in \Omega^*} \left| \frac{F(P)}{D(P)} \right| \leq \max_{P \in \Omega^*} |\delta(P) F(P)|. \quad (50)$$

Применим неравенства (46) и (50) для оценки решения нашей задачи (37), (38). Для этого запишем разностное уравнение (37) в канонической форме (43).

Для удобства изложения введем сетку

$$\bar{\omega}'_{\tau} = \{0, t_{j+\alpha/p} = (j + \alpha/p)\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

содержащую не только узлы  $t_j = j\tau$  сетки  $\bar{\omega}'_{\tau}$ , но и фиктивные узлы  $t_{j+\alpha/p}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$ . Отнесем формально  $y_{\alpha}^{l+1}$  к моменту  $t_{j+\alpha/p}$ , полагая  $y_{(\alpha)}^{l+1} = y^{l+\alpha/p}$ ,  $\varphi_{\alpha}^{l+1} = \varphi^{l+\alpha/p}$ . Пусть  $\omega'_{\tau} = \{t_{j+\alpha/p}\}$ ,

$\omega_h$  — множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h(\bar{G})$ . Обозначим через  $P(x, t)$ , где  $x \in \omega_h$ ,  $t \in \omega'_\tau$ , узел  $(p+1)$ -мерной сетки

$$\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau = \{P(x, t), x \in \omega_h, t \in \omega'_\tau\}$$

в цилиндре  $Q_{t_0}$ ,

$$S_\alpha = \{P(x, t_{j+a/p}), x \in \gamma_{h,\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

$$S_0 = \{P(x, 0), x \in \bar{\omega}_h\},$$

$$S = S_0 + S_1 + \dots + S_p$$

— граница области  $\Omega$ , так что  $\bar{\Omega} = \Omega + S$ . Пусть

$$\Omega_\alpha^* = \{P(x, t_{j+a/p}), x \in \omega_{h,\alpha}^*\}$$

множество узлов, для которых  $x \in \omega_{h,\alpha}^*$  есть приграничный

по  $x_\alpha$  узел сетки  $\bar{\omega}_h$ ,  $\dot{\Omega}_\alpha^*$  — дополнение  $\Omega_\alpha^*$  до  $\Omega$ ,  $\Omega^* = \bigcup_{\alpha=1}^p \Omega_\alpha^*$ .

$\dot{\Omega}$  — дополнение  $\Omega^*$  до  $\Omega$ ,  $\Omega = \dot{\Omega} + \Omega^*$ .

Обозначим  $P_\alpha = P(x, t_{j+a/p})$ ,  $P_\alpha^{(\pm 1\alpha)} = P(x^{(\pm 1\alpha)}, t_{j+a/p})$  и запишем уравнение (37) в виде

$$\left. \begin{aligned} A(P_\alpha) y(P_\alpha) &= \frac{1}{\tau} y(P_{\alpha-1}) + B(P_\alpha, P_\alpha^{(+1\alpha)}) y(P_\alpha^{(+1\alpha)}) + \\ &+ B(P_\alpha, P_\alpha^{(-1\alpha)}) y(P_\alpha^{(-1\alpha)}) + \varphi(P_\alpha), \quad P_\alpha \in \Omega, \\ y(P_\alpha) &= \mu(P_\alpha), \quad P_\alpha \in S_\alpha; \quad y(P) = u_0(x), \quad P \in S_0. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Окрестность  $III'(P_\alpha)$  узла  $P_\alpha$  состоит из трех точек  $P_{\alpha-1}$ ,  $P_\alpha^{(+1\alpha)}$  и  $P_\alpha^{(-1\alpha)}$ . Если  $x$  — регулярный узел сетки  $\omega_h$ , то

$$A(P_\alpha) = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h_\alpha^2}, \quad B(P_\alpha, P_\alpha^{(+1\alpha)}) = B(P_\alpha, P_\alpha^{(-1\alpha)}) = \frac{1}{h_\alpha^2}. \quad (52)$$

Если  $x$  — нерегулярный узел, то

$$A(P_\alpha) = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h_{\alpha+} h_{\alpha-}}, \quad B(P_\alpha, P_\alpha^{(\pm 1\alpha)}) = \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha\pm}}, \quad (53)$$

где  $h_{\alpha\pm}$  — расстояние между узлами  $x^{(\pm 1\alpha)}$  и  $x$ ,  $h_\alpha = 0,5(h_{\alpha+} + h_{\alpha-})$ .

Из (52), (53) и (51) видно, что (при  $y|_S \neq 0$ )

$$D(P_\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad P_\alpha \in \Omega, \quad A > 0, \quad B > 0. \quad (54)$$

Пусть  $y|_{\gamma_h} = 0$  или  $y(P_\alpha) = 0$  при  $P_\alpha \in S_\alpha$ . Если  $P_\alpha \in \Omega_\alpha^*$ , а  $P_\alpha^{(+1\alpha)} \in S_\alpha$  — граничный узел,  $P_\alpha^{(-1\alpha)} \in \Omega_\alpha$  — внутренний узел,

то  $y(P_\alpha^{(+1\alpha)}) = 0$  и (51) принимает вид

$$A(P_\alpha)y(P_\alpha) = \frac{1}{\tau}y(P_{\alpha-1}) + B(P_\alpha, P_\alpha^{(-1\alpha)})y(P_\alpha^{(-1\alpha)}) + \varphi(P_\alpha), \quad P_\alpha \in \Omega_\alpha^*.$$

Отсюда и из (53) следует, что (при  $y|_{S_0} \neq 0$ )

$$D(P_\alpha) = 0, \quad P_\alpha \in \dot{\Omega}_\alpha; \quad D(P_\alpha) = \frac{1}{h_\alpha h_{\alpha+}}, \quad P_\alpha \in \Omega_\alpha^*.$$

Если оба узла  $P_\alpha^{(+1\alpha)}, P_\alpha^{(-1\alpha)} \in S_\alpha$  являются граничными, то

$$A(P_\alpha)y(P_\alpha) = \frac{1}{\tau}y(P_{\alpha-1}) + \varphi(P_\alpha), \quad P_\alpha \in \Omega_\alpha^*$$

и  $D(P_\alpha) = \frac{2}{h_{\alpha+}h_{\alpha-}}$  при  $P_\alpha \in \Omega_\alpha^*$ ,  $y|_{S_0} \neq 0$ . Если  $x$  — регулярный приграничный узел, то  $h_{\alpha+} = h_{\alpha-} = h_\alpha = h_\alpha$ . Таким образом, если  $y(P)$  обращается в нуль на границе

$$y(P_\alpha) = 0, \quad P_\alpha \in S_\alpha, \quad \text{то} \quad D(P_\alpha) \geq 1/(\delta(P_\alpha)) \quad \text{при} \quad P_\alpha \in \Omega_\alpha^*, \quad (55)$$

где  $\delta(P_\alpha) = \delta_\alpha$  — одно из чисел

$$h_\alpha h_{\alpha\pm}, \quad 0,5h_{\alpha+}h_{\alpha-}, \quad h_\alpha^2, \quad 0,5h_\alpha^2. \quad (56)$$

Решение уравнения (51) представим в виде суммы

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где  $\bar{y}$  — решение однородного уравнения (51) при  $\varphi(P) = 0$  и  $\bar{y}(P_\alpha) = \mu(P_\alpha)$ ,  $P_\alpha \in S_\alpha$ ,  $\bar{y}(P) = u_0(P)$ ,  $P \in S_0$ , а  $\tilde{y}$  — решение неоднородного уравнения (51) при условии  $\tilde{y}(P) = 0$ ,  $P \in S$ . Так как условия (44) и (45) выполнены, то

$$\max_{P \in \Omega} |\bar{y}(P)| \leq \max_{P \in S} |\bar{y}(P)|.$$

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|y\|_C = \max_{x \in \dot{\omega}_h} |y(x)|,$$

$$\|y\|_{C^*} = \max_{x \in \omega_h^*} |y(x)|, \quad \|\mu\|_{C_Y} = \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|.$$

Имея в виду, что  $\bar{y}(P_\alpha) = \mu(P_\alpha)$  при  $P_\alpha \in S_\alpha$ ,  $\bar{y}(P) = u_0(P)$  при  $P \in S_0$ ,

$$\max_{P \in S} |\bar{y}(P)| = \max(\|u_0\|_C, \max_{t_{k'} \in \dot{\omega}'_\tau} \|\mu^{k'}\|_{C_Y}) \leq \|u_0\|_C + \max_{t_{k'} \in \dot{\omega}'_\tau} \|\mu^{k'}\|_{C_Y},$$

получаем

$$\|\bar{y}^j\|_C \leq \|u_0\|_C + \max_{0 \leq t' \leq t_0\tau} \|\mu(x, t')\|_{C_Y}, \quad j = 1, 2, \dots, j_0.$$

Рассматривая вместо  $\bar{\Omega}(j_0) = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}'_\tau$  сетку

$$\bar{\Omega}(j) = \{P(x, t'), x \in \bar{\omega}_h, 0 \leq t' = (j' + \alpha/p)\tau \leq j\tau\},$$

будем иметь

$$\|\bar{y}^j\|_C \leq \|u_0\|_C + \max_{0 \leq t' \leq j\tau} \|\mu(x, t')\|_{C_Y}. \quad (57)$$

Перейдем теперь к оценке  $\bar{y}$ . Представим сначала  $\varphi$  в виде  $\varphi(P_\alpha) = \overset{\circ}{\varphi}(P_\alpha) + \varphi^*(P_\alpha)$ , где

$$\overset{\circ}{\varphi}(P_\alpha) = \begin{cases} \varphi(P_\alpha), & P_\alpha \in \overset{\circ}{\Omega}_\alpha, \\ 0, & P_\alpha \in \Omega_\alpha^*, \end{cases} \quad \varphi^*(P_\alpha) = \begin{cases} 0, & P_\alpha \in \overset{\circ}{\Omega}_\alpha, \\ \varphi(P_\alpha), & P_\alpha \in \Omega_\alpha^*. \end{cases}$$

В соответствии с этим положим

$$\bar{y}(P) = v(P) + w(P),$$

где  $v(P)$  — решение уравнения (51) с правой частью  $\varphi^*(P)$  и  $v(P)|_S = 0$ , а  $w(P)$  — решение той же задачи с правой частью  $\overset{\circ}{\varphi}(P)$ . Принимая во внимание (55) и (50), сразу получаем оценку для  $v(P)$ :

$$\max_{P \in \Omega} |v(P)| \leq \max_{P \in \Omega^*} |\delta(P) \varphi(P)|$$

или

$$\|v^j\|_C \leq \max_{1 \leq \alpha \leq p, 0 \leq j' \leq j-1} \|\delta_\alpha \varphi_\alpha^{j'+\alpha/p}\|_{C^*}, \quad (58)$$

где  $\delta_\alpha$  — одно из чисел (56).

Для оценки  $w(x, t_{j+\alpha/p})$  запишем разностную схему (37)

$$\begin{aligned} w_{(\alpha)}/\tau &= \Lambda_\alpha w_{(\alpha)} + F_\alpha(x), \quad F_\alpha = w_{(\alpha-1)}/\tau + \overset{\circ}{\varphi}_\alpha, \\ w_{(\alpha)}|_{V_h} &= 0, \quad w(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

где  $w_{(\alpha)} = w(x, t_{j+\alpha/p})$ ,  $w_{(\alpha-1)} = w(x, t_{j+(\alpha-1)/p})$ , в канонической форме (43) с  $P = x \in \omega_h$ .

В строго внутреннем узле  $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$  имеем

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h_\alpha^2}\right) w_{(\alpha)} = \frac{1}{h_\alpha^2} (w_{(\alpha)}^{(+1\alpha)} + w_{(\alpha)}^{(-1\alpha)}) + F_\alpha,$$

т. е.  $D(x) = 1/\tau$ . В приграничных узлах, очевидно,  $D(x) > 1/\tau$ . Поэтому, в силу (48), верна оценка

$$\begin{aligned} \|w_{(\alpha)}\|_C &\leq \left\| \frac{F_\alpha}{D} \right\|_C \leq \tau \|F_\alpha\|_C \leq \|w_{(\alpha-1)}\|_C + \tau \|\overset{\circ}{\varphi}_\alpha\|_C = \\ &= \|w_{(\alpha-1)}\|_C + \tau \|\varphi_\alpha\|_C \end{aligned}$$

или

$$\|w^{j+\alpha/p}\|_C \leq \|w^{j+(\alpha-1)/p}\|_C + \tau \|\varphi^{j+\alpha/p}\|_C^{\circ}.$$

После суммирования по  $\alpha$  и  $j$  получаем

$$\|w^j\|_C \leq \sum_{j'=1}^{j-1} \sum_{\alpha=1}^p \tau \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_C^{\circ}. \quad (59)$$

Пользуясь неравенством треугольника

$$\|y\|_C = \|\bar{y} + v + w\|_C \leq \|\bar{y}\|_C + \|v\|_C + \|w\|_C$$

и оценками (57) – (59), убеждаемся в том, что верна

**Теорема 2.** Локально-одномерная схема (37), (38) равномерно (в метрике  $C$ ) устойчива по начальным и граничным данным и по правой части, так что для решения задачи (37), (38) при любых  $\tau$  и  $h$  справедлива оценка

$$\|y^j\|_C \leq \|u_0\|_C + \sum_{j'=1}^{j-1} \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_C^{\circ} + \\ + \max_{0 \leq t' \leq j\tau} \|\mu(x, t')\|_{C_V} + \max_{\substack{1 \leq \alpha \leq p \\ 0 \leq j' < j}} \|\delta_{\alpha} \varphi^{j'+\alpha/p}\|_{C^{**}},$$

где  $\delta_{\alpha}$  — одно из чисел (56).

### 8. Равномерная сходимость локально-одномерной схемы.

Докажем следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть задача (33) имеет единственное непрерывное в  $Q_{t_0}$  решение  $u = u(x, t)$  и существуют непрерывные в  $Q_{t_0}$  производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_{\alpha}^2 \partial x_{\beta}^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_{\alpha}^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq p.$$

Тогда схема (37), (38) равномерно сходится со скоростью  $O(h^2 + \tau)$  (имеет первый порядок точности по  $\tau$  и второй порядок точности по  $h$ ), так что

$$\|y^j - u^j\|_C \leq M(h^2 + \tau), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где  $h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_{\alpha}$ ,  $M = \text{const} > 0$  не зависит от  $\tau$  и  $h_{\alpha}$ .

**Доказательство.** Представим решение  $z_{(\alpha)} = y_{(\alpha)} - u$  задачи (39) в виде суммы  $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$ , где  $\eta_{(\alpha)}$  определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\psi}_{\alpha}, \quad x \in \omega_h, \quad \eta_{(\alpha)} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Upsilon_{h, \alpha}, \\ \eta(x, 0) = 0.$$



Отсюда находим  $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\dot{\psi}_1 + \dots + \dot{\psi}_p) = \eta^j = 0$  для всех  $j = 0, 1, \dots$ , так как  $\eta^0 = 0$ . Для  $\eta_{(a)}^{j+1} = \eta^{j+\alpha/p}$  получаем

$$\eta^{j+\alpha/p} = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} \dot{\psi}_{\beta} = -\tau \sum_{\beta=a+1}^p \dot{\psi}_{\beta}.$$

Для  $v_{(a)}$  получаем задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{(a)} - v_{(a-1)}}{\tau} &= \Lambda_{\alpha} v_{(a)} + \tilde{\psi}_{\alpha}, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ v_{(a)}|_{\gamma_{h,\alpha}} &= 0, \quad v(x, 0) = 0, \end{aligned} \right\} (60)$$

где  $\tilde{\psi}_{\alpha} = \psi_{\alpha}^* + \Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}$ .

Воспользуемся теперь теоремой 2 для оценки решения задачи (60). Так как  $v = 0$  при  $t = 0$  и при  $x \in \gamma_h$ , то

$$\|v^j\|_C \leq \max_{\substack{0 \leq j' \leq j-1 \\ 1 \leq \alpha \leq p}} \|\delta_{\alpha} \tilde{\psi}^{j'+\alpha/p}\|_{C^*} + \sum_{j'=1}^{j-1} \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\tilde{\psi}^{j'+\alpha/p}\|_C.$$

Рассмотрим  $\Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}$ . В строго внутренних узлах ( $x \in \overset{\circ}{\omega}_{h,\alpha}$ )

$$\Lambda_{\alpha} \eta_{(a)} = -\tau \sum_{\beta=a+1}^p \Lambda_{\beta} \dot{\psi}_{\beta} = O(\tau),$$

если существуют непрерывные производные  $\frac{\partial^4 u}{\partial x_{\alpha}^2 \partial x_{\beta}^2}$ ,  $\alpha \neq \beta$ .

В приграничных узлах  $x \in \omega_{h,\alpha}^*$  имеем (для определенности считаем, что  $x^{(-1\alpha)} \in \gamma_{h,\alpha}$ , а  $x^{(+1\alpha)} \in \overset{\circ}{\omega}_{h,\alpha}$ ):

$$\Lambda_{\alpha} \eta_{(a)} = \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{\eta_{(a)}^{(+1\alpha)} - \eta_{(a)}}{h_{\alpha}} - \frac{\eta_{(a)}}{h_{\alpha-}} \right).$$

В п. 7 было показано, что в таком узле  $\delta_{\alpha} = h_{\alpha} h_{\alpha-}$  и, следовательно,

$$|\delta_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}| = |h_{\alpha} h_{\alpha-} \Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}| \leq |\eta_{(a)}^{(+1\alpha)}| + 2 |\eta_{(a)}|,$$

т. е.  $\|\delta_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}\|_{C^*} = O(\tau)$ ,

$$\|\delta_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha}\|_{C^*} \leq \|\delta_{\alpha} \psi_{\alpha}^*\|_{C^*} + \|\delta_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}\|_{C^*} \leq M(h_{\alpha}^3 + \tau).$$

Учитывая затем, что

$$\|\tilde{\psi}_{\alpha}\|_C \leq \|\psi_{\alpha}^*\|_C + \|\Lambda_{\alpha} \eta_{(a)}\|_C \leq M(h_{\alpha}^2 + \tau)$$

и  $z^j = v^j$ , получаем  $\|z^j\|_C = \|y^j - u^j\|_C \leq M(h^2 + \tau)$ ,  $h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha$ , что и требовалось доказать. Из устойчивости по краевым данным и по правой части следует произвол в выборе  $t_\alpha^*$  и  $t_\alpha^{**}$  (см. стр. 416).

Таким образом, мы провели исчерпывающее исследование локально-одномерной схемы.

**З а м е ч а н и е.** Схема (37), (38) была исследована в работе автора [7]. В приграничных узлах  $\omega_{h,\alpha}^*$  значение  $y_{(\alpha)}$  можно определять при помощи интерполяции по направлению  $x_\alpha$  (ср. А. А. Самарский [4]), что соответствует требованию

$$\Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = 0 \quad \text{при } x \in \omega_{h,\alpha}^*, \quad y_{(\alpha)} = 0 \quad \text{при } x \in \gamma_{h,\alpha}.$$

Принцип максимума верен и в этом случае; имеет место теорема 2.

При оценке скорости сходимости локально-одномерной схемы функцию  $\eta_{(\alpha)}$  определяем так же, как и выше, полагая  $z_{(\alpha)} = \eta_{(\alpha)} + v_{(\alpha)}$  во всех внутренних узлах  $x \in \omega_h$ , где

$$\eta_{(\alpha)} = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha} \overset{\circ}{\psi}_\beta = -\tau \sum_{\beta=\alpha+1}^p \overset{\circ}{\psi}_\beta,$$

$$\overset{\circ}{\psi}_\beta = \left( f_\beta + L_\beta u - \frac{\partial u}{\partial t} \delta_{\beta,1} \right)^{j+1}.$$

Тогда для  $v_{(\alpha)}$  получаем задачу

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{(\alpha)}, \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_{h,\alpha},$$

$$0 = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha^*, \quad x \in \omega_{h,\alpha}^*,$$

где

$$\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^* - \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}, \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_{h,\alpha},$$

$$\tilde{\psi}_\alpha^* = -\Lambda_\alpha u^{j+1} - \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}, \quad x \in \omega_{h,\alpha}^*.$$

Дальнейшие рассуждения практически совпадают с рассуждениями, проведенными выше. В результате убеждаемся, что и в этом случае верна теорема 3, т. е. локально-одномерная схема равномерно сходится со скоростью  $O(\tau + h^2)$ , где  $h = \max_{\alpha} h_\alpha$ .

**9. Локально-одномерная схема для уравнений с переменными коэффициентами.** Укажем, как применяется локально-одномерная схема для уравнений с переменными коэффициентами. При этом достаточно указать лишь изменения в формулах для операторов  $L_\alpha$  и  $\Lambda_\alpha$ , считая, что рассматривается задача (33). Локально-одномерная схема всегда записывается в виде (37), (38).

1) Линейное уравнение параболического типа. Пусть в задаче (33)

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha \leq c_2.$$

В задаче (37), (38) меняется лишь формула для  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = \left( a_\alpha(x, \bar{t}) y_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha}, \quad 0 < c_1 \leq a_\alpha \leq c_2, \quad \bar{t} = t_{l+1/2}.$$

Коэффициент  $a_\alpha$  выбирается так, чтобы  $\Lambda_\alpha$  имел второй порядок аппроксимации на регулярном шаблоне,

$$\Lambda_\alpha \bar{u} - L_\alpha u = O(h_\alpha^2),$$

например, можно взять

$$a_\alpha = 0,5(k_\alpha(x, \bar{t}) + k_\alpha(x^{(-1)_\alpha}, \bar{t})).$$

Теоремы 2 и 3 сохраняют силу.

2) Квазилинейное уравнение параболического типа. Пусть в задаче (33)

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha, \quad \frac{\partial k_\alpha}{\partial u} \geq c_0 > 0.$$

Возможны два способа аппроксимации оператора  $L_\alpha$ :

$$а) \Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = \left( a_\alpha(x, \bar{t}, 0,5(y_{(\alpha)} + y_{(\alpha)}^{(-1)_\alpha})) y_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha}, \quad \bar{t} = t_{l+1/2}.$$

Для определения  $y_{(\alpha)}$  получается нелинейное уравнение, которое решается тем или иным итерационным методом; каждая итерация находится при помощи прогонки.

$$б) \Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = \left( a_\alpha(x, \bar{t}, 0,5(y_{(\alpha-1)} + y_{(\alpha-1)}^{(-1)_\alpha})) y_{\bar{x}_\alpha} \right)_{x_\alpha}.$$

Для  $y_{(\alpha)}$  получаем линейные уравнения, решаемые методом прогонки. Что касается устойчивости и сходимости, то при дополнительных предположениях относительно ограниченности производных  $\frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial u^2}$ ,  $\frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial u}$ ,  $\frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_\alpha^2}$  имеет место равномерная сходимость со скоростью  $O(\tau + h^2)$ .

Локально-одномерные схемы можно применять и в случае третьей краевой задачи. Если, например, область  $G$  есть прямоугольник со сторонами  $l_1$  и  $l_2$  (или ступенчатая область), то уравнения (37) пишутся не только во внутренних узлах сетки, но и на соответствующих границах. Так, например, если на стороне  $x_1 = 0$  прямоугольника ( $0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ) задано краевое условие  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sigma_1^{(-)} u + \nu_1^{(-)}$ , то при  $\alpha = 1$  уравнение (37)

пишется и при  $x_1 = 0$ , причем в узле  $x_1 = 0$  полагаем

$$\Lambda_1 y_{(1)} = \frac{y_{(1)} x_1 - \sigma_1^{(-)} y_{(1)}}{0,5h_1}, \quad \Phi_1 = \frac{v_1^{(-)}}{0,5h_1}.$$

Этот алгоритм предложен И. В. Фрязиновым [2], который показал, что полученная локально-одномерная схема сходится равномерно со скоростью  $O(\tau + |h|^2)$ .

**10. Продольно-поперечная схема как аддитивная схема.** Метод суммарной аппроксимации позволяет формулировать краевые условия для схемы переменных направлений в случае ступенчатой области, эти условия обеспечивают точность  $O(\tau^2 + |h|^2)$ . Итак, пусть  $\bar{G}$  составлена из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Если отрезки, из которых составлена граница  $\Gamma$  области  $\bar{G}$ , параллельные оси  $Ox_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , соизмеримы, то можно ввести равномерную по  $x_\alpha$  сетку с шагами  $h_\alpha$ . Будем считать, что сетка  $\bar{\omega}_h(\bar{G})$  равномерна по  $x_1$  и  $x_2$ . Рассмотрим задачу (32) из § 1. Схему переменных направлений, следуя § 1, возьмем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^{j+1/2} - y^j}{0,5\tau} &= \Lambda_1(t_{j+1/2}) y^{j+1/2} + \Lambda_2(t_j) y^j + \Phi^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{0,5\tau} &= \Lambda_1(t_{j+1/2}) y^{j+1/2} + \Lambda_2(t_{j+1}) y^{j+1} + \Phi^j, \\ y^{j+1} |_{v_{h,2}} &= \mu^{j+1}, \quad y^{j+1/2} |_{v_{h,1}} = \bar{\mu}^{j+1/2}, \quad y(x, 0) = u_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где  $\bar{\mu}$  — выражение, определяемое по формуле

$$\bar{\mu}^{j+1/2} = 0,5(\mu^j + \mu^{j+1}) - \frac{\tau}{4} [(L_2\mu)^{j+1} - (L_2\mu)^j].$$

Таким образом, и в этом случае вводится поправка в краевое условие при  $x \in v_{h,1}$ . Здесь  $\Lambda_1(t_{j+1/2}) y^{j+1/2} = (a_1(x, t_{j+1/2}) y_{x_1}^{j+1/2})_{x_1}$ ,

$$\Lambda_2(t_j) y^j = (a_2(x, t_j) y_{x_2}^j)_{x_2}, \quad \Phi^j = f^{j+1/2}.$$

Пусть  $u = u(x, t)$  — решение исходной задачи (32) из § 1,  $y^j$ ,  $y^{j+1/2}$  — решение задачи (61). Полагая  $z^j = y^j - u^j$ ,  $z^{j+1/2} = y^{j+1/2} - 0,5(u^j + u^{j+1})$ , получим для  $z$  задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{z^{j+1/2} - z^j}{0,5\tau} &= \Lambda_1(t_{j+1/2}) z^{j+1/2} + \Lambda_2(t_j) z^j + \Psi_1^j, \\ \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{0,5\tau} &= \Lambda_1(t_{j+1/2}) z^{j+1/2} + \Lambda_2(t_{j+1}) z^{j+1} + \Psi_2^j, \\ z^{j+1} |_{v_{h,2}} &= 0, \quad z^{j+1/2} |_{v_{h,1}} = v^{j+1/2}, \quad z(x, 0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — погрешности аппроксимации для промежуточных схем:

$$\begin{aligned}\psi_1^j &= \Lambda_1(t_{j+1/2}) \frac{u^j + u^{j+1}}{2} + \Lambda_2(t_j) u^j - \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \varphi^j, \\ \psi_2^j &= \Lambda_1(t_{j+1/2}) \frac{u^j + u^{j+1}}{2} + \Lambda_2(t_{j+1}) u^{j+1} - \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \varphi^j, \\ v^{j+1/2} &= -\frac{\tau}{4} ((L_2 u)^{j+1} - (L_2 u)^j).\end{aligned}$$

Так как  $\Lambda_\alpha u = L_\alpha u + O(h_\alpha^2)$ , то  $\psi_1^j = \dot{\psi}_1^j + \psi_1^{*j}$ ,  $\psi_2^j = \dot{\psi}_2^j + \psi_2^{*j}$ , где  $\psi_\alpha^{*j} = O(h_\alpha^2 + \tau^2)$ ,

$$\dot{\psi}_1^j = -\frac{1}{2} [(L_2 u)^{j+1} - (L_2 u)^j] = -\frac{\tau}{2} (L_2 u)_t^j, \quad \dot{\psi}_2^j = \frac{\tau}{2} (L_2 u)_t^j.$$

Отсюда видно, что  $\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = 0$  и

$$\psi_1 + \psi_2 = O(\tau^2 + |h|^2),$$

т. е. схема обладает суммарной аппроксимацией второго порядка по  $\tau$ .

Положим  $z^j = v^j$ ,  $z^{j+1} = v^{j+1}$ ,  $z^{j+1/2} = v^{j+1/2} + \eta^{j+1/2}$ , где  $\eta^{j+1/2} = -\frac{\tau^2}{4} (L_2 u)_t^j$  при  $0 \leq x_1 \leq l_1$ ,  $0 < x_2 < l_2$ . Тогда для  $v$  получим задачу (62) с однородными граничными и начальными значениями  $v^j|_{V_{h,2}} = 0$ ,  $v^{j+1/2}|_{V_{h,1}} = 0$ ,  $v(x, 0) = 0$  и правыми частями

$$\tilde{\psi}_1^j = \psi_1^{*j} + \Lambda_1(t_{j+1/2}) \eta^{j+1/2}, \quad \tilde{\psi}_2^j = \psi_2^{*j} + \Lambda_1(t_{j+1/2}) \eta^{j+1/2}.$$

Так как  $\eta^{j+1/2}$  определена и при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ , то  $\|\Lambda_1(t_{j+1/2}) \eta^{j+1/2}\| = O(\tau^2 + h^2)$ , если существует непрерывная в  $\bar{Q}_{t_0}$  производная  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( k_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( k_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right) = L_1 L_2 u$ . Для  $v^{j+1}$  воспользуемся полученной в § 1 априорной оценкой (41) и учтем, что  $z^{j+1} = v^{j+1}$ :

$$\|z^{j+1} - \tau \Lambda_2(t_{j+1}) z^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau (\|\tilde{\psi}_1^{j'}\| + \|\tilde{\psi}_2^{j'}\|).$$

Отсюда и следует сходимость со скоростью  $O(\tau^2 + |h|^2)$ , в частности, в сеточной норме  $L_2$ , т. е.  $\|z^{j+1}\| \leq M(\tau^2 + |h|^2)$  (так как  $\|z - \tau \Lambda_2 z\| > \|z\|$ ). Если  $k_\alpha = \text{const} = 1$ , то при этом достаточно, чтобы существовали непрерывные в  $\bar{Q}_{t_0}$  производные  $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ ,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4}, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t}.$$

**11. Локально-одномерные схемы для многомерного гиперболического уравнения второго порядка.** Метод суммарной аппроксимации позволяет получить абсолютно устойчивые сходящиеся локально-одномерные схемы для уравнений гиперболического типа (см. А. А. Самарский [10], [12]).

Рассмотрим уравнение

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u + f(x, t), & L_{\alpha} u &= \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \\ k_{\alpha}(x, t) &\geq c_1 > 0, & c_1 &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_p)$  — точка  $p$ -мерного пространства с координатами  $x_1, \dots, x_p$ . Пусть  $G$  — произвольная  $p$ -мерная область с границей  $\Gamma$ ,  $\bar{G} = G + \Gamma$ ,

$$\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T], \quad Q_T = G \times (0 < t \leq T).$$

Требуется найти непрерывное в цилиндре  $\bar{Q}_T$  решение уравнения (63), удовлетворяющее краевому условию

$$u = \mu(x, t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (64)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \bar{G}. \quad (65)$$

Как обычно, предполагается, что эта задача имеет единственное решение  $u = u(x, t)$ , обладающее всеми требуемыми по ходу изложения производными.

Относительно  $G$  остаются в силе те же конструктивные предположения, что и в случае параболического уравнения (см. п. 5).

На отрезке  $0 \leq t \leq T$  построим равномерную сетку  $\omega_{\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$  с шагом  $\tau$ . В  $\bar{G}$  выбирается такая же сетка  $\omega_h$ , что и в п. 5.

Если  $G$  —  $p$ -мерный параллелепипед, то для численного решения задачи (63) — (65) можно построить экономичную факторизованную схему, имеющую точность  $O(\tau^2 + |h|^2)$ . Такая схема была исследована в § 2.

При построении локально-одномерной схемы поступаем по аналогии с п. 5: аппроксимируем с шагом  $\tau/p$  последовательно операторы

$$\mathcal{P}_{\alpha} u = \frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (L_{\alpha} u + f_{\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (66)$$

где  $f_{\alpha}$  удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f.$$

Для аппроксимации производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  с шагом  $\tau/p$  используются выражения

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{u_{(\alpha)} - 2u_{(\alpha-1)} + \check{u}_{(\alpha)}}{\tau^2} \sim \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{j+(\alpha-1)/2}, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 1, 2 \text{ при } p = 2, \end{array} \right\} \quad (67)$$

где  $u_{(\alpha)} = u^{j+\alpha/2}$ ,  $\check{u}_{(\alpha)} = u^{j-1+\alpha/2}$ ,  $u_{(0)} = \check{u} = u^{j-1}$ ,  $u_{(2)} = u^j$ ,

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{u_{(\alpha)} - u_{(\alpha-1)} - u_{(\alpha-2)} + \check{u}_{(\alpha)}}{\tau^2} \sim \frac{2}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, 3 \text{ при } p = 3, \end{array} \right\} \quad (68)$$

где  $u_{(-1)} = \check{u}_{(2)} = u^{(j-1)+2/3}$ ,  $u_{(-2)} = \check{u}_{(1)} = u^{j-2/3}$ .

Для аппроксимации  $L_\alpha u + \check{f}_\alpha$  на пространственной сетке  $\omega_h$  воспользуемся однородным разностным оператором второго порядка аппроксимации  $\Lambda_\alpha u + \varphi_\alpha$ .

Коэффициент оператора  $\Lambda_\alpha$  и правая часть  $\varphi_\alpha$  берутся в момент

$$t'_\alpha = 0,5(t_{j+\alpha/p} + t_{j-1+\alpha/p}) = t_{j+\alpha/p-0,5} = t_j + (\alpha/p - 0,5)\tau,$$

так что  $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(t'_\alpha)$ ,  $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x, t'_\alpha)$ .

Напишем теперь локально-одномерные схемы для гиперболических уравнений:

$$y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \sigma_p \Lambda_\alpha(y_{(\alpha)} + \check{y}_{(\alpha)}) + 2\sigma_p \varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad p = 2, 3, \quad (69)$$

где

$$\sigma_p = \begin{cases} 1/4 & \text{при } p = 2, \\ 1/3 & \text{при } p = 3, \end{cases}$$

а  $y_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha}$  дается формулой (67) при  $p = 2$  и формулой (68) при  $p = 3$ . При  $p = 2$  получаем трехслойную аддитивную схему, при  $p = 3$  — четырехслойную схему. В этом отличие от параболических уравнений, для которых вид локально-одномерных схем не зависит от числа измерений  $p$ .

Уравнение (69) можно записать в виде

$$(E - \sigma_p \tau^2 \Lambda_\alpha)(y_{(\alpha)} + \check{y}_{(\alpha)}) = \begin{cases} 2y_{(\alpha-1)} + 2\sigma_2 \tau^2 \varphi_\alpha & \text{при } p = 2, \\ y_{(\alpha-1)} + y_{(\alpha-2)} + 2\sigma_3 \tau^2 \varphi_\alpha & \text{при } p = 3. \end{cases} \quad (70)$$

Определение  $y_{(\alpha)}$  сводится к решению трехточечного уравнения  $(E - \sigma_p \tau^2 \Lambda_\alpha)y_{(\alpha)} = F_\alpha$  вдоль отрезков, параллельных оси  $Ox_\alpha$ ,

что можно сделать методом прогонки, пользуясь краевым условием

$$y_{(a)} = \mu(x, t_{j+a}p) \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h^a. \quad (71)$$

Первое из начальных условий  $u(x, 0) = u_0(x)$  аппроксимируется точно:

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (72)$$

Для вычисления промежуточных значений  $y^{1/2} = y(x, \tau/2)$  при  $p=2$  и  $y^{1/3} = y(x, \tau/3)$ ,  $y^{2/3} = y(x, 2\tau/3)$  при  $p=3$  применим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} & \left( E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) y^{1/2} = F_1, \\ & F_1 = u_0 + \frac{\tau}{2} \bar{u}_0 + \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 u_0 + \tau^2 \left( f_1 - \frac{1}{8} (\Lambda u + f) \right)_{t=0}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

если  $p=2$ ;

$$\left. \begin{aligned} & \left( E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) y^{1/3} = F_1, \quad \left( E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \right) (y^{2/3} + u_0) = 2y^{1/3} + F_2, \\ & F_1 = u_0 + \frac{\tau}{3} \bar{u}_0 + \tau^2 \Lambda_1 u_0 + \tau^2 \left( \frac{2}{3} f_1 - \frac{1}{6} (\Lambda u + f) \right)_{t=0}, \\ & F_2 = \tau^2 \left( \frac{2}{3} f_2 - \frac{1}{9} (\Lambda u + f) \right)_{t=0}, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

если  $p=3$ .

Остановимся более подробно на локально-одномерной схеме для случая двух измерений ( $p=2$ ):

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad \left( E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \right) y^{1/2} = F_1 \quad \text{при} \quad t = 0,5\tau, \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{y^{j+1/2} - 2y^j + y^{j-1/2}}{\tau^2} = \frac{1}{4} \Lambda_1 (y^{j+1/2} + y^{j-1/2}) + \frac{1}{2} \Phi_1^j, \\ & \frac{y^{j+1} - 2y^{j+1/2} + y^j}{\tau^2} = \frac{1}{4} \Lambda_2 (y^{j+1} + y^j) + \frac{1}{2} \Phi_2^j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Краевые условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} & y^{j+1/2} = \mu(x, t_{j+1/2}) \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h^1, \\ & y^{j+1} = \mu(x, t_{j+1}) \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h^2. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Функция  $y^{j+1/2}$  находится из уравнения

$$y^{j+1/2} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 y^{j+1/2} = \Phi_1^j,$$



где  $\Phi_1^j$  — известная правая часть, с краевыми условиями (77), а  $y^{j+1}$  — из уравнения

$$y^{j+1} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 y^{j+1} = \Phi_2^{j+1/2},$$

где  $\Phi_2^{j+1/2}$  известна, с краевыми условиями (77). Каждое из уравнений решается методом одномерной прогонки.

Рассмотрим погрешность  $z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/2} = y^{j+\alpha/2} - u(x, t_{j+\alpha/2})$  схемы (75)–(77), где  $u$  — решение задачи (63)–(65),  $y$  — решение задачи (75)–(77). Подставляя  $y_{(\alpha)} = z_{(\alpha)} + u^{j+\alpha/2}$  в уравнение (76), получим

$$\left. \begin{aligned} z_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} &= \frac{1}{4} \Lambda_\alpha (z_{(\alpha)} + \check{z}_{(\alpha)}) + \psi_\alpha && \text{при } t \geq \tau, \\ \left(E - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1\right) \frac{z^{j/2}}{\tau^2} &= \psi_1 && \text{при } t = 0,5\tau, \\ z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad z_{(\alpha)} &= z^{j+\alpha/2} = 0 && \text{при } x \in \Upsilon_h^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

где

$$\psi_\alpha = \frac{1}{4} \Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) - u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} + 0,5\varphi_\alpha \quad (79)$$

— погрешность аппроксимации для одного уравнения (66) номера  $\alpha = 1, 2$ .

Погрешность аппроксимации для локально-одномерной схемы (75)–(77) определяется как сумма

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (80)$$

Покажем, что схема (76) аппроксимирует задачу (63)–(65) в суммарном смысле,  $\psi = O(\tau + |h|^2)$ .

В самом деле, учитывая, что

$$0,5\Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) = (L_\alpha u)^{j+(\alpha-1)/2} + O(h_\alpha^2) \quad \text{при } x \in \overset{\circ}{\omega}_{h,\alpha},$$

$$0,5\Lambda_\alpha (u_\alpha + \check{u}_\alpha) = (L_\alpha u)^{j+(\alpha-1)/2} + O(h_\alpha) \quad \text{при } x \in \omega_{h,\alpha}^*,$$

$$u_{\bar{t}_\alpha \bar{t}_\alpha} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^{j+(\alpha-1)/2} + O(\tau^2), \quad \varphi_\alpha = f_\alpha^{j+(\alpha-1)/2} + O(\tau^2),$$

получаем

$$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*,$$

где

$$\overset{\circ}{\psi}_\alpha = 0,5 \left( L_\alpha u - 0,5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_\alpha \right)^{j+(\alpha-1)/2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau^2) \quad \text{при } x \in \overset{\circ}{\omega}_{h,\alpha},$$

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha + \tau^2) \quad \text{при } x \in \omega_{h,\alpha}^*.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1^j + \dot{\psi}_2^{j+1/2} &= 0,5 (L_1 u - 0,5\ddot{u} + f_1)^j + 0,5 (L_2 u - 0,5\ddot{u} + f_2)^{j+1/2} = \\ &= 0,5 ((L_1 + L_2)u - \ddot{u} + f_1 + f_2)^j + 0,5\tau\dot{\psi}_{2\bar{t}_1}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое, в силу уравнения (63), равно нулю:

$$(L_1 + L_2)u - \ddot{u} + f = 0, \quad f = f_1 + f_2.$$

Поэтому

$$\dot{\psi}_1^j + \dot{\psi}_2^j = 0. \quad (81)$$

т. е. схема (75)–(77) обладает суммарной аппроксимацией.

Рассмотрим теперь сумму

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_2 + 2\dot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2 &= 0,5 [(L_2 u - \ddot{u} + f_2)^{j+1/2} + (L_2 u - \ddot{u} + f_2)^{j-1/2}] + \\ &+ (L_1 u - \ddot{u} + f_1)^j = ((L_1 + L_2)u - \ddot{u} + f_1 + f_2)^j + \\ &+ (\dot{\psi}_2^{j+1/2} - 2\dot{\psi}_2^j + \dot{\psi}_2^{j-1/2}) = \tau^2 (\ddot{\psi}_2)_{\bar{t}_1 \bar{t}_1}^j, \end{aligned}$$

т. е.

$$\dot{\psi}_2 + 2\dot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2 = \tau^2 (\ddot{\psi}_2)_{\bar{t}_1 \bar{t}_1} = O(\tau^2). \quad (82)$$

Дальнейшие рассуждения, для упрощения изложения, проведем в предположении, что область  $G$  — прямоугольник,

$$\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2)$$

и сетка  $\bar{\omega}_h$  равномерна по каждому направлению:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha\}.$$

В пространстве  $\bar{\Omega}$  сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на ее границе  $\gamma_h$ , введем скалярные произведения

$$\begin{aligned} (y, v) &= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y_i v_i h_1 h_2, \quad (y, v]_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y_i v_i h_1 h_2, \\ (y, v]_2 &= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} y_i v_i h_1 h_2. \end{aligned}$$

Покажем, что схема (75)–(77) абсолютно устойчива и сходится, по крайней мере, со скоростью  $O(\tau + |h|^2)$ .

Решение задачи (78) представим в виде  $z = \xi + v$ , где  $\xi$  — решение задачи (78) с правой частью  $\psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha$ , а  $v$  — решение задачи (78) с правой частью  $\psi_\alpha = \ddot{\psi}_\alpha$ .

Найдем априорную оценку для  $\xi$ , учитывающую свойство суммарной аппроксимации (81).

Умножим уравнение (78) для  $\xi_\alpha$  скалярно на  $\xi_\alpha - \check{\xi}_\alpha = \tau(\xi_\alpha)_f$ . Учтем, что

$$\xi_1 - \check{\xi}_1 = (\xi_1 - \check{\xi}_2) + (\check{\xi}_2 - \check{\xi}_1) = \tau(\xi_{f_1} + \check{\xi}_{f_2}),$$

$$\begin{aligned} \xi_2 - \check{\xi}_2 &= \tau(\xi_{f_2} + \xi_{f_1}), \quad (\Lambda_\alpha(\xi_\alpha + \check{\xi}_\alpha), \xi_\alpha - \check{\xi}_\alpha) = \\ &= (a_\alpha, \xi_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha - (a_\alpha, \check{\xi}_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha, \quad \xi_{\bar{x}_\alpha}^2 = ((\xi_\alpha)_{\bar{x}_\alpha})^2. \end{aligned}$$

Предположим далее, что  $a(x, t'_\alpha)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$ , т. е.  $a_\alpha \leq (1 + c_3\tau)\check{a}_\alpha$ . Тогда можно написать

$$(a_\alpha, \check{\xi}_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha \leq (1 + c_3\tau)(a_\alpha, \xi_{\bar{x}_\alpha}^2]_\alpha.$$

В результате получаем энергетические неравенства

$$\|\xi_{f_1}\|^2 - \|\check{\xi}_{f_2}\|^2 + \frac{1}{4}(a_1, \xi_{\bar{x}_1}^2]_1 \leq \frac{1}{4}(1 + c_3\tau)(\check{a}_1, \check{\xi}_{\bar{x}_1}^2]_1 + \tau(\dot{\psi}_1, \xi_{f_1} + \check{\xi}_{f_2}),$$

$$\|\xi_{f_2}\|^2 - \|\check{\xi}_{f_1}\|^2 + \frac{1}{4}(a_2, \xi_{\bar{x}_2}^2]_2 \leq \frac{1}{4}(1 + c_3\tau)(\check{a}_2, \check{\xi}_{\bar{x}_2}^2]_2 + \tau(\dot{\psi}_2, \xi_{f_2} + \xi_{f_1}).$$

Складывая эти неравенства, найдем

$$J \leq (1 + c_3\tau)\check{J} + \tau(\dot{\psi}_1, \xi_{f_1} + \check{\xi}_{f_2}) + \tau(\dot{\psi}_2, \xi_{f_2} + \xi_{f_1}), \quad (83)$$

где

$$J = \|\xi_{f_2}\|^2 + \frac{1}{4}(a_1, \xi_{\bar{x}_1}^2]_1 + \frac{1}{4}(a_2, \xi_{\bar{x}_2}^2]_2. \quad (84)$$

Используем теперь свойство (81) и преобразуем слагаемые содержащие  $\dot{\psi}_1$  и  $\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_2^{f+1/2}$ :

$$A = \tau(\dot{\psi}_1, \xi_{f_1} + \check{\xi}_{f_2}) + \tau(\dot{\psi}_2, \xi_{f_2} + \xi_{f_1}) = \tau(\dot{\psi}_1^f, (\xi_1)_f) + \tau(\dot{\psi}_2^{f+1/2}, (\xi_2)_f).$$

Подставляя сюда

$$\dot{\psi}_1^f = -\dot{\psi}_2^f, \quad \dot{\psi}_2^f = \dot{\psi}_2^{f+1/2} - \tau\psi_{2f_1}, \quad \dot{\psi}_{2f_1} = (\dot{\psi}_2^{f+1/2} - \dot{\psi}_2^f)/\tau,$$

получим

$$\begin{aligned} A &= \tau^2(\dot{\psi}_2, \xi_{f_2}) + \tau^2(\dot{\psi}_{2f_1}, (\xi_1)_f) = \\ &= \tau^2(\dot{\psi}_2, \xi_{f_2}) - \tau^2(\dot{\psi}_{2f_1}, \check{\xi}_{f_2}) + \tau^2(\psi_{2f_1}, \xi_1) - \tau^2(\psi_{2f_1}, \check{\xi}_1). \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши — Буняковского,  $\varepsilon$ -неравенство и учтем, что

$$\|\check{\xi}_1\|^2 \leq \frac{l_1^2}{8} \|\check{\xi}_{x_1}\|^2 \leq \frac{l_1^2}{8c_1} (\check{\alpha}_1, \check{\xi}_{x_1}^2).$$

Тогда получим следующую оценку:

$$A \leq \tau^2 [(\check{\psi}_2, \check{\xi}_{f_2}) + (\check{\psi}_{2f_1}, \check{\xi}_1)]_f + \varepsilon \tau (\|\check{\xi}_{f_2}\|^2 + (\check{\alpha}_1, \check{\xi}_{x_1}^2)_1) + \\ + \frac{\tau^3}{4\varepsilon} \left( \|\check{\psi}_{2f}\|^2 + \frac{l_1^2}{8c_1} \|\check{\psi}_{2f_1}\|^2 \right),$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольное число.

Подставим оценку для  $A$  в энергетическое неравенство:

$$J_{j'+1} \leq (1 + (\varepsilon + c_3)\tau) J_{j'} + \tau^2 (\check{\psi}_2^{j'+1/2}, \check{\xi}_{f_2}^{j'+1})_f + \\ + \tau^2 (\check{\psi}_{2f_1}^{j'}, \check{\xi}_1^{j'})_f + \frac{\tau^2}{4\varepsilon} (\|\check{\psi}_{2f}^{j'+1/2}\|^2 + \frac{l_1^2}{8c_1} \|\check{\psi}_{2f_1}^{j'+1/2}\|^2).$$

Суммирование по  $j' = 1, 2, \dots, j$  дает

$$J_{j+1} \leq (\varepsilon + c_3) \sum_{j'=1}^j \tau J_{j'} + \frac{\tau^2}{4\varepsilon} \sum_{j'=1}^j \left( \|\check{\psi}_{2f}^{j'+1/2}\|^2 + \frac{l_1^2}{8c_1} \|\check{\psi}_{2f_1}^{j'+1/2}\|^2 \right) \tau + \\ + \tau (\check{\psi}_2^{j+1/2}, \check{\xi}_{f_2}^{j+1}) - \tau (\check{\psi}_{2f_1}^{j+1/2}, \check{\xi}_1^{j+1/2}) - \tau (\check{\psi}_2^{1/2}, \check{\xi}_{f_2}^1) + \tau (\check{\psi}_{2f_1}^{1/2}, \check{\xi}_1^{1/2}) + J_1.$$

Напишем отдельно тождества для первого слоя, учитывая что  $\check{\xi}(x, 0) = 0$ :

$$\|\check{\xi}_{f_2}(x, \tau)\|^2 + \frac{1}{4} \left( a_2 \left( x, \frac{\tau}{2} \right), \check{\xi}_{x_2}^2(x, \tau) \right)_2 = \\ = \frac{1}{4} \left( a_1 \left( x, \frac{\tau}{2} \right), \check{\xi}_{x_1}^2 \left( x, \frac{\tau}{2} \right) \right)_1 + \|\check{\xi}_{f_1} \left( x, \frac{\tau}{2} \right)\|^2 + (\check{\psi}_2, \check{\xi}(x, \tau)), \\ \|\check{\xi}_{f_1} \left( x, \frac{\tau}{2} \right)\|^2 + \frac{1}{4} \left( a_1 \left( x, \frac{\tau}{2} \right), \check{\xi}_{x_1}^2 \left( x, \frac{\tau}{2} \right) \right)_1 = (\check{\psi}_1, \check{\xi} \left( x, \frac{\tau}{2} \right)).$$

Складывая эти тождества, найдем

$$J_1 = \|\check{\xi}_{f_2}(x, \tau)\|^2 + \frac{1}{4} \left( a_2 \left( x, \frac{\tau}{2} \right), \check{\xi}_{x_2}^2(x, \tau) \right)_2 + \\ + \frac{1}{4} \left( a_1 \left( x, 0 \right), \check{\xi}_{x_1}^2 \left( x, \frac{\tau}{2} \right) \right)_1 = (\check{\psi}_2, \check{\xi}_2) + (\check{\psi}_1, \check{\xi}_1) = \\ = (\check{\psi}_2^{1/2}, \check{\xi}_2 - \check{\xi}_1) - \tau (\check{\psi}_{2f_1}^{1/2}, \check{\xi}_1) = \tau (\check{\psi}_2^{1/2}, \check{\xi}_{f_2}^1) - \tau (\check{\psi}_{2f_1}^{1/2}, \check{\xi}_1^{1/2}).$$

Подставим теперь выражение для  $J_1$  в формулу для  $J_{j+1}$  и учтем неравенство

$$\begin{aligned} \tau \left( \dot{\Psi}_2^{j+1/2}, \xi_{\bar{t}_2}^{j+1} \right) - \tau \left( \dot{\Psi}_{2\bar{t}_1}^{j+1/2}, \xi_{\bar{t}_1}^{j+1/2} \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \|\xi_{\bar{t}_2}^{j+1}\|^2 + (a_1^j, (\xi_{\bar{x}_1}^2)^{j+1/2}) \right) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \left( \|\dot{\Psi}_2^{j+1/2}\|^2 + \frac{l_1^2}{8c_1} \|\dot{\Psi}_{2\bar{t}_1}^{j+1/2}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$J_{j+1} \leq 2(\varepsilon + c_3) \sum_{j'=1}^j \tau J_{j'} + F_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (85)$$

где

$$\begin{aligned} F_j = \frac{\tau^2}{2\varepsilon} \sum_{j'=1}^j \left( \|\dot{\Psi}_{2\bar{t}}^{j'+1/2}\|^2 + \frac{l_1^2}{8c_1} \|\dot{\Psi}_{2\bar{t}_1}^{j'+1/2}\|^2 \right) \tau + \\ + \frac{\tau^2}{2} \left( \|\dot{\Psi}_2^{j+1/2}\|^2 + \frac{l_1^2}{8c_1} \|\dot{\Psi}_{2\bar{t}_1}^{j+1/2}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Для решения неравенства (85) применим лемму 6 из гл. VI, § 1, согласно которой из (85) следует оценка

$$J_{j+1} \leq F_j + 2e^{2(\varepsilon+c_3)t_j} (\varepsilon + c_3) \sum_{j'=1}^j \tau F_{j'}. \quad (86)$$

Если существует вторая производная по  $t$  функции

$$\dot{\Psi}_2 = 0,5(L_2 u - 0,5\ddot{u} + f_2), \quad \text{то } F_j = O(\tau^2).$$

Таким образом, для  $\xi$  справедлива априорная оценка (86).

Обратимся теперь к задаче для функции  $v$ . Вместо (83) получим неравенство

$$K \leq (1 + c_3\tau) \check{K} + \tau(\Psi_1^*, (v_1)_{\bar{t}}) + \tau(\Psi_2^*, (v_2)_{\bar{t}}), \quad (87)$$

где

$$K = \|v_{\bar{t}_2}\|^2 + \frac{1}{4}(a_1, v_{\bar{x}_1}^2)_1 + \frac{1}{4}(a_2, v_{\bar{x}_2}^2)_2. \quad (88)$$

Для выражения

$$\begin{aligned} B &= \tau(\Psi_1^*, (v_1)_{\bar{t}}) + \tau(\Psi_2^*, (v_2)_{\bar{t}}) = \\ &= \tau[(\Psi_1^*, v_1) + (\Psi_2^*, v_2)]_{\bar{t}} - \tau(\Psi_{1\bar{t}}^*, \check{v}_1) - \tau(\Psi_{2\bar{t}}^*, \check{v}_2) \end{aligned}$$

имеет место оценка

$$B \leq \tau [(\psi_1^*, v_1) + (\psi_2^*, v_2)]_{\bar{t}} + \frac{\varepsilon}{4} ((\check{\alpha}_1, \check{\nu}_{\bar{x}_1}^2)_1 + (\check{\alpha}_2, \check{\nu}_{\bar{x}_2}^2)_2) + \\ + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \left( \frac{l_1^2}{8c_1} \|\psi_{1\bar{t}}^*\|^2 + \frac{l_2^2}{8c_1} \|\psi_{2\bar{t}}^*\|^2 \right),$$

где  $\varepsilon > 0$  — любое число. Подставим эту оценку в неравенство (87):

$$K_{j'+1} \leq (1 + (c_3 + \varepsilon)\tau) K_{j'} + \tau (\psi_1^{*j'}, v_1^{j'+1/2})_{\bar{t}} + \\ + \tau (\psi_2^{*j'+1/2}, v_2^{j'+1})_{\bar{t}} + \frac{\tau^2}{\varepsilon} \left( \frac{l_1^2}{8c_1} \|\psi_{1\bar{t}}^{*j'}\|^2 + \frac{l_2^2}{8c_1} \|\psi_{2\bar{t}}^{*j'+1/2}\|^2 \right). \quad (89)$$

На первом слое имеем тождества

$$\left. \begin{aligned} \|\psi_{\bar{t}_1}^{1/2}\|^2 + \frac{1}{4} (a_1(x, 0), v_{\bar{x}_1}^2(x, \frac{\tau}{2}))_1 &= (\psi_1^*, v(x, \frac{\tau}{2})), \\ \|\psi_{\bar{t}_2}(x, \tau)\|^2 + \frac{1}{4} (a_2(x, \frac{\tau}{2}), v_{\bar{x}_2}^2(x, \tau))_2 &= \|\psi_{\bar{t}_1}(x, \frac{\tau}{2})\|^2 + \\ &+ (\psi_2^*, v(x, \tau)), \\ K_1 = K(\tau) &= (\psi_1^*, v_1^{1/2}) + (\psi_2^*, v_2^1). \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Просуммируем (89) по  $j' = 1, 2, \dots, j$  и учтем (90):

$$K_{j+1} \leq (c_3 + \varepsilon) \sum_{j'=1}^j \tau K_{j'} + (\psi_1^{*j}, v_1^{j+1/2}) + (\psi_2^{*j+1}, v_2^{j+1}) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=1}^j \tau \left( \frac{l_1^2}{8c_1} \|\psi_{1\bar{t}}^{*j'}\|^2 + \frac{l_2^2}{8c_1} \|\psi_{2\bar{t}}^{*j'+1/2}\|^2 \right).$$

Учитывая затем неравенство

$$(\psi_1^*, v_1) + (\psi_2^*, v_2) \leq \frac{1}{2} K_{j+1} + \frac{1}{16c_1} (l_1^2 \|\psi_1^*\|^2 + l_2^2 \|\psi_2^*\|^2),$$

применяя лемму 6 из гл. VI, § 1 и полагая  $\varepsilon = 1/(2T)$ , получаем

$$K_{j+1} \leq M \max_{0 < j' \leq j} (\|\psi_1^{*j'}\|^2 + \|\psi_2^{*j'+1/2}\|^2 + \|\psi_{1\bar{t}}^{*j'}\|^2 + \|\psi_{2\bar{t}}^{*j'+1/2}\|^2), \quad (91)$$

где  $M$  — положительная постоянная, зависящая только от  $c_1, c_3$  и  $T$ .

Объединяя оценки (86) и (91) для  $\xi$  и  $v$ , приходим к следующей оценке для  $z = y - u$ :

$$\|z_{\bar{x}_1}^{j+1/2}\|_1 + \|z_{\bar{x}_2}^{j+1}\|_2 \leq \\ \leq M\tau \max_{0 < j' \leq j} (\|\psi_2^{*j'+1/2}\| + \|\psi_{2\bar{t}}^{*j'+1/2}\| + \|\psi_{2\bar{t}}^{*j'+1/2}\|) + \\ + M \max_{0 < j' \leq j} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 (\|(\psi_\alpha^*)^{j'+(\alpha-1)/2}\| + \|(\psi_\alpha^*)^{j'+(\alpha-1)/2}\|) \right\}, \quad (92)$$

где  $M = \text{const} > 0$  — зависит только от  $c_1, c_3$  и  $T$ .

Из этой оценки следует, что локально-одномерная схема (75)–(77) сходится со скоростью  $O(\tau + |h|^2)$ , если решение  $u = u(x, t)$  имеет непрерывные в  $\bar{Q}_T$  производные по  $x_\alpha$  до четвертого порядка включительно и производные  $\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4}$  удовлетворяют условию Липшица по  $t$ ; правая часть  $f$  должна быть дважды дифференцируемой по  $t$ .

**12. Аддитивные схемы для систем уравнений.** Рассмотрим задачу (83), (84) § 2 для системы уравнений параболического типа. Прежде чем переходить к написанию аддитивной схемы для решения задачи (83), (84) § 2 представим оператор  $L$  в виде суммы двух треугольных операторов,  $L = L^- + L^+$ .

Для этого представим матрицы  $k_{\alpha\alpha}$  в виде суммы  $k_{\alpha\alpha} = k_{\alpha\alpha}^- + k_{\alpha\alpha}^+$ , где  $k_{\alpha\alpha}^- = (k_{\alpha\alpha}^{-sm})$ ,  $k_{\alpha\alpha}^+ = (k_{\alpha\alpha}^{+sm})$  — треугольные матрицы с элементами

$$k_{\alpha\alpha}^{-sm} = k_{\alpha\alpha}^{sm}, \quad k_{\alpha\alpha}^{+sm} = 0 \quad \text{при } m < s, \quad k_{\alpha\alpha}^{+sm} = k_{\alpha\alpha}^{sm}, \\ k_{\alpha\alpha}^{-sm} = 0 \quad \text{при } m > s, \quad k_{\alpha\alpha}^{-ss} = k_{\alpha\alpha}^{+ss} = 0,5k_{\alpha\alpha}^{ss}.$$

Матрицы  $k_{\alpha\alpha}^-$  и  $k_{\alpha\alpha}^+$  сопряжены друг другу, так как  $k_{\alpha\alpha}^{-sm} = k_{\alpha\alpha}^{+ms}$ . Отсюда следует, что

$$L_{\alpha\alpha} = L_{\alpha\alpha}^- + L_{\alpha\alpha}^+, \quad L_{\alpha\alpha}^\mp = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\alpha}^\mp \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right).$$

Введем операторы

$$L_{\alpha}^- u = L_{\alpha\alpha}^- u + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} L_{\alpha\beta} u = \sum_{\beta=1}^{\alpha} L_{\alpha\beta} u, \\ L_{\alpha\beta}^- u = L_{\alpha\beta} u \quad \text{при } \beta < \alpha, \\ L_{\alpha}^+ u = L_{\alpha\alpha}^+ u + \sum_{\beta=\alpha+1}^p L_{\alpha\beta} u = \sum_{\beta=\alpha}^p L_{\alpha\beta}^+ u, \\ L_{\alpha\beta}^+ u = L_{\alpha\beta} u \quad \text{при } \beta > \alpha,$$

и представим  $L$  в виде

$$L = L^- + L^+, \quad L^- u = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}^- u, \quad L^+ u = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}^+ u. \quad (93)$$

Решение системы уравнений (83) § 2 или

$$\sum_{\alpha=1}^p \left[ \frac{1}{2p} \frac{\partial u}{\partial t} - (L_{\alpha}^- u + L_{\alpha}^+ u) - (f_{\alpha}^- + f_{\alpha}^+) \right] = 0, \quad (94)$$

где  $\sum_{\alpha=1}^p (f_{\alpha}^- + f_{\alpha}^+) = f$ , сведем к последовательному решению

системы  $2p$  уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2p} \frac{\partial v}{\partial t} &= L_a^- v + f_a^-, \quad t_{j+(a-1)/(2p)} \leq t \leq t_{j+a/(2p)}, \\ \frac{1}{2p} \frac{\partial v}{\partial t} &= L_a^+ v + f_a^+, \quad t_{j+1-a/(2p)} \leq t \leq t_{j+1-(a-1)/(2p)}, \\ &\alpha = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Аппроксимируем  $L_a^\mp$  операторами  $\Lambda_a^\mp$  вида

$$\Lambda_a^- = \sum_{\beta=1}^a \Lambda_{a\beta}^-, \quad \Lambda_a^+ = \sum_{\beta=a}^p \Lambda_{a\beta}^+,$$

$$\Lambda_{a\beta}^\mp u = 0,5 \left[ (k_{a\beta}^\mp u_{\bar{x}_\beta})_{x_\alpha} + (k_{a\beta}^\mp u_{x_\beta})_{\bar{x}_\alpha} \right].$$

Очевидно, что  $\Lambda_a^\mp$  аппроксимирует  $L_a^\mp$  со вторым порядком. Коэффициенты  $k_{a\beta}^\mp$  будем брать в один и тот же для всех  $\alpha$  и  $\beta$  момент  $t = t_{j+1/2}$  или в какой-либо другой момент  $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$ .

Напишем теперь аддитивную схему

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^{j+\alpha/(2p)} - y^{j+(\alpha-1)/(2p)}}{\tau} &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{a\beta}^- y^{j+\beta/(2p)} + (\varphi_a^-)^{j+\alpha/(2p)}, \\ \frac{y^{j+\alpha_1/(2p)} - y^{j+(\alpha_1-1)/(2p)}}{\tau} &= \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{a\beta}^+ y^{j+\beta/(2p)} + (\varphi_a^+)^{j+\alpha_1/(2p)}, \\ &\alpha = 1, 2, \dots, p, \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

где  $\alpha_1 = 2p + 1 - \alpha$ ,  $\beta_1 = 2p + 1 - \beta$  и  $\alpha_1$  меняется от  $p + 1$  до  $2p$ , при этом  $\alpha$  меняется от  $p$  до  $1$ .

При  $x \in \gamma_h^\alpha$  задаются обычные краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} y^{j+\alpha/(2p)} &= \mu^{j+\alpha/(2p)} \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ y^{j+\alpha_1/(2p)} &= \mu^{j+\alpha_1/(2p)} \quad \text{при } x \in \gamma_h^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = p + 1, \dots, 2p. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Начальное условие удовлетворяется точно:

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (98)$$

Для определения  $y^{j+\alpha/(2p)} = y_{(\alpha)}$  и  $y^{j+\alpha_1/(2p)} = y_{(\alpha_1)}$  получаем систему уравнений

$$(E - \tau \Lambda_{a\alpha}^-) y_{(\alpha)} = F_a^-, \quad (E - \tau \Lambda_{a\alpha}^+) y_{(\alpha_1)} = F_{a_1}^+,$$

$$F_a^- = \tau \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \Lambda_{a\beta}^- y_{(\beta)} + \tau \varphi_a^- + y_{(\alpha-1)},$$

$$F_{a_1}^+ = \tau \sum_{\beta=\alpha+1}^p \Lambda_{a\beta}^+ y_{(\beta)} + \tau \varphi_a^+ + y_{(\alpha_1-1)}.$$



Так как  $k_{\alpha\alpha}^-$  — диагональная матрица  $p \times p$  с клетками, являющимися нижними треугольными матрицами, то из системы уравнений

$$(E - \tau \Lambda_{\alpha\alpha}^-) y_{(\alpha)} = F_{\alpha}^-$$

последовательно от  $s$  к  $s+1$  методом прогонки находятся компоненты  $y_{(\alpha)}^s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , вектора  $y_{(\alpha)}$ . Двигаясь от  $\alpha$  к  $\alpha+1$  и от  $s$  к  $s+1$ , мы при помощи формул прогонки для трехточечного уравнения последовательно определим векторы  $y_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Аналогично от  $\alpha+1$  к  $\alpha$  и от  $s+1$  к  $s$  из системы

$$(E - \tau \Lambda_{\alpha\alpha}^+) y_{(\alpha)} = F_{\alpha}^+$$

определяются векторы  $y_{(p+1)}, \dots, y_{(2p)}$ . Последний вектор  $y_{(2p)}$  и есть решение  $y^{j+1} = y_{(2p)}$  на слое  $t = t_{j+1}$ .

Так как система дифференциальных уравнений (95) аппроксимирует уравнение (83) § 2 в суммарном смысле, а каждое из уравнений (96) номера  $\alpha$  аппроксимирует уравнение (95) того же номера в обычном смысле, то аддитивная схема (96) — (98) аппроксимирует исходную задачу с порядком  $\tau + |h|^2$ :

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p (\psi_{\alpha}^- + \psi_{\alpha}^+) = O(\tau + |h|^2).$$

Рассмотрим пространство  $\dot{\Omega}$  сеточных вектор-функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе  $\gamma_h$  сетки. Введем в  $\dot{\Omega} = H$  скалярное произведение:

$$(y, v) = \sum_{s=1}^n (y^s, v^s), \quad (y^s, v^s) = \sum_{x \in \omega_h} y^s(x) v^s(x) h_1 h_2 \dots h_p.$$

Рассмотрим операторы

$$A^- = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}^-, \quad A^+ = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}^+,$$

$$A_{\alpha}^- y = - \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- y, \quad A_{\alpha}^+ y = - \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ y, \quad y \in \dot{\Omega}.$$

Покажем, что операторы  $A^-$  и  $A^+$  сопряжены:

$$(A^- y, v) = (y, A^+ v) \text{ для любых } y, v \in \dot{\Omega},$$

если матрица  $k = (k_{\alpha\beta}^{sm})$  симметрична, т. е. выполнено условие  $k_{\alpha\beta}^{sm} = k_{\beta\alpha}^{ms}$ .

В самом деле, так как  $k_{\beta\alpha}^- = k_{\alpha\beta}^+$ , то

$$\begin{aligned} (A^-y, v) &= 0,5 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^{\alpha} [(k_{\alpha\beta}^- y_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha}) + (k_{\alpha\beta}^- y_{x_\beta}, v_{x_\alpha})] = \\ &= 0,5 \sum_{\beta=1}^p \sum_{\alpha=\beta}^p [(k_{\alpha\beta}^- y_{\bar{x}_\beta}, v_{\bar{x}_\alpha}) + (k_{\alpha\beta}^- y_{x_\beta}, v_{x_\alpha})] = \\ &= 0,5 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=\alpha}^p [(k_{\beta\alpha}^- y_{\bar{x}_\alpha}, v_{\bar{x}_\beta}) + (k_{\beta\alpha}^- y_{x_\alpha}, v_{x_\beta})] = \\ &= 0,5 \sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=\alpha}^p [(k_{\alpha\beta}^+ v_{\bar{x}_\beta}, y_{\bar{x}_\alpha}) + (k_{\alpha\beta}^+ v_{x_\beta}, y_{x_\alpha})] = (y, A^+v), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что

$$(A^-y, y) = (A^+y, y) = 0,5 (Ay, y) \geq 0,5c_1 (\mathring{A}y, y),$$

где  $\mathring{A}y = -\sum_{\alpha=1}^p y_{\bar{x}_\alpha} x_\alpha$ , так что

$$(\mathring{A}y, y) = \sum_{\alpha=1}^p (1, y_{\bar{x}_\alpha}^2]_{\alpha} \geq 8 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{l_\alpha^2} \|y\|^2.$$

Таким образом  $A^-$  и  $A^+$  положительно определенные операторы:  $A^- \geq \delta E$ ,  $A^+ \geq \delta E$ ,  $\delta = 4c_1 \sum_{\alpha=1}^p l_\alpha^{-2}$ .

Чтобы доказать устойчивость схемы (96)–(98), воспользуемся теоремой 1 из п. 4, согласно которой для задачи

$$\begin{aligned} z_{\bar{x}_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^- z_{(\beta)} + \psi_\alpha^-, \quad z_{x_{\alpha_1}} = \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^+ z_{(\beta_1)} + \psi_\alpha^+, \\ z_{(\alpha)} &= 0, \quad z_{(\alpha_1)} = 0 \text{ при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad z(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} \|z^{j+1}\| &\leq M_1 \max_{0 \leq j' \leq j} \left\| \sum_{\alpha=1}^p ((\psi_\alpha^-)^{j'+\alpha/(2p)} + (\psi_\alpha^+)^{j'+1-(\alpha-1)/(2p)}) \right\| + \\ &+ M_2 \sqrt{\tau} \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{\alpha=1}^p (\|(\psi_\alpha^-)^{j'+\alpha/(2p)}\| + \|(\psi_\alpha^+)^{j'+1-(\alpha-1)/(2p)}\|). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что аддитивная схема (96)–(98) сходится со скоростью  $O(\sqrt{\tau} + |h|^2)$  в сеточной норме  $L_2$ .

Перейдем теперь к задаче (96), (97) § 2 для системы уравнений гиперболического типа (см. А. А. Самарский [12]):

$$\sum_{\alpha=1}^p \left[ \frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L_{\alpha}^{-} + L_{\alpha}^{+}) u + f_{\alpha} \right] = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f. \quad (99)$$

Решение этой системы сведем к последовательному от  $\alpha$  к  $\alpha + 1$  решению (с шагом  $\tau/p$ ) более простых уравнений

$$\frac{1}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_{\alpha}^{-} u + L_{\alpha}^{+} u + f_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (100)$$

Аппроксимируя каждое из этих уравнений в обычном смысле, получим аддитивную схему

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sigma_p} y_{t_{\alpha} \bar{t}_{\alpha}} &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^{-} y_{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^{+} \check{y}_{(\beta)} + \varphi_{\alpha}, \\ \alpha &= 1, 2, \dots, p, \quad (x, t) \in \omega_h \times \omega_{\tau}, \\ y_{(\alpha)} &= \mu(x, t'_{\alpha}), \quad x_{\alpha} = 0, \quad l_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ y(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

где  $\varphi_{\alpha} = f_{\alpha}(x, t'_{\alpha})$ ,  $t'_{\alpha} = t_{l_{\alpha} + (\alpha/p - 0,5)\tau}$ ; коэффициенты  $k_{\alpha\beta}$  берутся в момент  $t'_{\alpha}$ ,  $y_{t_{\alpha} \bar{t}_{\alpha}}$  определяется одной из формул (67) или (68),  $\sigma_p = 0,5$  при  $p = 2$ ,  $\sigma_p = 1,5$  при  $p = 3$ .

Второе начальное условие аппроксимируем, полагая

$$y^{\alpha/p} = u_0(x) + \frac{\alpha\tau}{p} \bar{u}_0(x) + \frac{\alpha^2\tau^2}{2p^2} (Lu_0 + f(x, 0)), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Полученная аддитивная схема, очевидно, обладает суммарной аппроксимацией

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_{\alpha} = O(\tau + |h|^2).$$

Для определения вектора  $y^{j+1} = y_{(p)}$  получаем систему уравнений

$$(E - \sigma_p \tau^2 \Lambda_{\alpha\alpha}^{-}) y_{(\alpha)} = F_{\alpha},$$

где  $F_{\alpha}$  выражается через векторы  $y_{(\beta)}$ ,  $\beta < \alpha$ . Эта система решается последовательно от  $\alpha$  к  $\alpha + 1$  и от  $s$  к  $s + 1$  при помощи обычных формул прогонки.

Меняя ролями  $\Lambda_{\alpha}^{-}$  и  $\Lambda_{\alpha}^{+}$ , получим вторую схему

$$\frac{1}{\sigma_p} y_{t_{\alpha} \bar{t}_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \Lambda_{\alpha\beta}^{-} \check{y}_{(\beta)} + \sum_{\beta=\alpha}^p \Lambda_{\alpha\beta}^{+} y_{(\beta)} + \varphi_{\alpha}. \quad (102)$$

В этом случае счет идет от  $\alpha + 1$  к  $\alpha$  и от  $s$  к  $s + 1$ . Чередуемые схем (101) и (102) дает третью схему.

Пользуясь энергетическим методом, по аналогии с предыдущим пунктом, можно получить априорную оценку для погрешности  $z = y - u$ , использующую свойство суммарной аппроксимации. Из этой оценки следует сходимость аддитивной схемы.

### Задачи к главе VII

Здесь будут рассмотрены экономичные методы для решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad p = 2, 3,$$

в цилиндре  $\bar{G} \times [0 \leq t \leq t_0]$ , где  $\bar{G}$  — прямоугольник

$$(0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2)$$

при  $p = 2$  или параллелепипед

$$(0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3)$$

при  $p = 3$ . На границе  $\Gamma$  области  $G$  задано краевое условие первого рода

$$u|_\Gamma = \mu(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p).$$

В  $\bar{G}$  вводится сетка  $\bar{\omega}_h$ , равномерная по каждому направлению  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, p$ ) с шагом  $h_\alpha$ ; пусть  $\gamma_{h,\alpha}$  — множество граничных узлов при  $x_\alpha = 0, x_\alpha = l_\alpha$ . Как обычно обозначаем  $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha} x_\alpha$ .

Пусть  $H_h$  — пространство сеточных функций, определенных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе  $\gamma_h$  сетки,

$$(y, v) = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} y(x) v(x) h_1 \dots h_p,$$

где суммирование проводится по внутренним узлам  $x \in G$  сетки. На отрезке  $0 \leq t \leq t_0$  введена равномерная сетка с шагом  $\tau$ .

Будем рассматривать здесь только те экономичные схемы, которые эквивалентны факторизованной схеме.

Требование эквивалентности, как мы отмечали, означает, что для промежуточных значений  $y^{j+\alpha/p}$  краевые условия на  $\gamma_{h,\alpha}$  должны быть заданы специальным образом.

Следует иметь в виду, что при изучении устойчивости мы предполагаем, что  $y|_{\gamma_h} = 0$ . Только при этом условии можно рассматривать  $y(x)$  как элемент пространства  $H_h$ .

Если дан какой-либо экономичный метод, то надо: а) исключить промежуточные значения и написать факторизованную схему, б) сформулировать краевые условия для  $y^{j+\alpha/p}$ , при которых имеет место эквивалентность этой схемы соответствующей факторизованной схеме, в) оценить порядок аппроксимации, г) исследовать устойчивость факторизованной схемы (пользуясь общей теорией).

В каждой задаче требуется выполнить все четыре пункта,

При изучении устойчивости факторизованной схемы

$$By_t + Ay = \varphi,$$

где  $B = B_1 \dots B_p$ ,  $B_\alpha = E + \tau R_\alpha$ , рекомендуется использовать следующий критерий. Если схема с  $B = E + \tau \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha$  устойчива и операторы  $R_\alpha$  положительные, самосопряженные и попарно перестановочные, то факторизованная схема с  $B = B_1 \dots B_p$  также устойчива.

$$1. \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{j+1} - y^j).$$

(Схема Дугласа - Рекфорда [1].)

О т в е т. а)  $(E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda y$ ,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ . б)  $y^{j+1/2} = \mu^{j+1} - \tau \Lambda_2 (\mu^{j+1} - \mu^j)$  при  $x_1 = 0$ ,  $l_1$ .  $y^{j+1} = \mu^{j+1}$  при  $x_2 = 0$ ,  $l_2$ . в) Схема имеет аппроксимацию  $O(|h|^2 + \tau)$ . г) Схема устойчива.

У к а з а н и е. Приведем схему к виду

$$(E - \tau \Lambda_1) \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

$$(E - \tau \Lambda_2) \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau}.$$

Отсюда сразу исключаем  $y^{j+1/2} - y^j$  и получаем факторизованную схему. Краевое условие для  $y^{j+1/2}$  следует из второго уравнения.

$$2. \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y^{j+1/2} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^j + \Lambda_2 y^j,$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 (y^{j+1} - y^j).$$

О т в е т. а)  $(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1)(E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda y$ ,

б)  $y^{j+1/2} = \mu^{j+1} - \tau \sigma_2 \Lambda_2 (\mu^{j+1} - \mu^j)$  при  $x_1 = 0$ ,  $l_1$ .

в) Схема имеет аппроксимацию

$$O(\tau^2 + |h|^2) + O(|\sigma_1 - 0,5| \tau) + O(|\sigma_2 - 0,5| \tau),$$

г)  $O(|h|^2 + \tau^2)$  при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ .

г) Схема устойчива при

$$\sigma_1 \sigma_2 \geq 0 \quad \text{и} \quad \sigma_\alpha \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\tau \|A_\alpha\|}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Схема абсолютно устойчива при  $\sigma_\alpha \geq 0,5$ .

У к а з а н и е. г) Пусть  $y|_{\gamma_h} = 0$ . Тогда  $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$ ,  $A = A_1 + A_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — положительно определенные, самосопряженные и перестановочные операторы, так что  $A_1 A_2 > 0$ . В данном случае

$$B = (E + \sigma_1 \tau A_1)(E + \sigma_2 \tau A_2) = E + \sigma_1 \tau A_1 + \sigma_2 \tau A_2 + \sigma_1 \sigma_2 \tau^2 A_1 A_2,$$

$$B - 0,5 \tau A = E + (\sigma_1 - 0,5) \tau A_1 + (\sigma_2 - 0,5) \tau A_2 + \sigma_1 \sigma_2 \tau^2 A_1 A_2 \geq$$

$$\geq E + (\sigma_1 - 0,5) \tau A_1 + (\sigma_2 - 0,5) \tau A_2,$$

так как  $\sigma_1 \sigma_2 \geq 0$ . Учитывая затем, что  $E \geq A_\alpha / \|A_\alpha\|$  и требуя

$$0,5E + (\sigma_\alpha - 0,5) \tau A_\alpha \geq \left( \frac{1}{2 \|A_\alpha\|} + (\sigma_\alpha - 0,5) \tau \right) A_\alpha \geq 0,$$

получаем  $\sigma_\alpha \geq 0,5 - \frac{1}{2\tau \|A_\alpha\|}$ .

$$3. \quad \frac{y^{j+1/3} - y^j}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y^{j+1/3} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^j + (\Lambda_2 + \Lambda_3) y^j,$$

$$\frac{y^{j+2/3} - y^{j+1/3}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 (y^{j+2/3} - y^j),$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+2/3}}{\tau} = \sigma_3 \Lambda_3 (y^{j+1} - y^j)$$

(при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,5$  - схема Дугласа [4]).

О т в е т. а)  $(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1)(E - \sigma_2 \tau \Lambda_2)(E - \sigma_3 \tau \Lambda_3) y_t = \Lambda y$ ,  $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha$ ,

б)  $y^{j+1/3} = \mu^j + \tau(E - \sigma_2 \tau \Lambda_2)(E - \sigma_3 \tau \Lambda_3) \mu_t^j$  при  $x_1 = 0$ ,  $l_1$ ,  $y^{j+2/3} = \mu^{j+1} - \tau^2 \sigma_3 \Lambda_3 \mu_t^j$  при  $x_2 = 0$ ,  $l_2$ . в) Схема имеет аппроксимацию  $O(|h|^2 + \tau^2)$  при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,5$ ,  $O(|h|^2 + \tau)$  при  $\sigma_\alpha \neq 0,5$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . г) Схема устойчива при  $\sigma_\alpha \geq 0,5$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

У к а з а н и е. а) Обозначим

$$\omega_\alpha = (y^{j+\alpha/3} - y^j) / \tau.$$

Тогда уравнения запишутся в виде

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) \omega_1 = \Lambda y^j, \quad (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) \omega_2 = \omega_1, \quad (E - \sigma_3 \tau \Lambda_3) \omega_3 = \omega_2.$$

Последовательно исключая отсюда  $\omega_2$  и  $\omega_1$  и заменяя  $\omega_3 = (y^{j+1} - y^j) / \tau$ , получим искомую факторизованную схему.

$$4. \quad \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \sigma_1 \Lambda_1 y^{j+1/2} + (1 - \sigma_2) \Lambda_2 y^j,$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \sigma_2 \Lambda_2 y^{j+1} + (1 - \sigma_1) \Lambda_1 y^{j+1/2}.$$

Показать, что при  $\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , эта схема имеет аппроксимацию  $O(|h|^4 + \tau^2)$ .

О т в е т. а)  $(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1)(E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda y + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) \tau \Lambda_1 \Lambda_2 y$ , б)  $y^{j+1/2} = \sigma_1 \mu^{j+1} - \sigma_1 \sigma_2 \tau \Lambda_2 \mu^{j+1} + (1 - \sigma_1) \mu^j + (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2 \mu^j$  при  $x_1 = 0$ ,  $l_1$ .

Если  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ , то  $y^{j+1/2} = 0,5(\mu^j + \mu^{j+1}) - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 \mu_t^j$  при  $x_1 = 0$ ,  $l_1$ . в) Схема

при  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$  имеет точность  $O(|h|^2 + \tau^2)$ , а при  $\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}$  - точность

$O(|h|^4 + \tau^2)$ . г) Схема устойчива при  $\sigma_\alpha \geq 0,5$  и  $\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}$ .

У к а з а н и е. а) Перепишем уравнения в виде

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) y^{j+1/2} = (E + (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2) y^j,$$

$$(E + (1 - \sigma_1) \tau \Lambda_1) y^{j+1/2} = (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y^{j+1}.$$

Умножая второе уравнение на  $\sigma_1$ , первое — на  $(1 - \sigma_1)$  и складывая их, получим

$$y^{j+1/2} = \sigma_1 (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y^{j+1} + (1 - \sigma_1) (E + (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2) y^j.$$

Подставим это выражение в первое уравнение и после очевидных преобразований получим

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) y^{j+1} = (E + (1 - \sigma_1) \tau \Lambda_1) (E + (1 - \sigma_2) \tau \Lambda_2) y^j$$

(при этом перестановочность  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  не используется). б) Краевое условие при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$  следует из полученной выше формулы для  $y^{j+1/2}$ . в) По-

грешность аппроксимации схемы при  $\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}$  исследована И. В. Фрязиновым [6].

З а м е ч а н и е. И. В. Фрязинов [6] показал, что эта схема имеет точность  $O(|h|^4 + \tau^2)$  в случае, когда область  $G$  — ступенчатая, т. е. составлена из прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, причем не только для первой краевой задачи, но и для третьей краевой задачи.

$$\begin{aligned} 5. \quad \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} &= \frac{1}{3} [\Lambda_1 y^{j+1/2} + (\Lambda_2 + \Lambda_3) y^j], \\ \frac{y^{j+2/2} - y^{j+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{3} [\Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+2/2} + \Lambda_3 y^{j+1/2}], \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+2/2}}{\tau} &= \frac{1}{3} [(\Lambda_1 + \Lambda_2) y^{j+2/2} + \Lambda_3 y^{j+1}]. \end{aligned}$$

О т в е т. Схема не является безусловно устойчивой (см. Н. Н. Яненко [6]). Факторизованная схема имеет вид

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{\tau}{3} \Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau}{3} \Lambda_2\right) \left(E - \frac{\tau}{3} \Lambda_3\right) y^{j+1} = \\ = \left[E + \frac{\tau}{3} (\Lambda_1 + \Lambda_2)\right] \left[E + \frac{\tau}{3} (\Lambda_1 + \Lambda_3)\right] \left[E + \frac{\tau}{3} (\Lambda_2 + \Lambda_3)\right] y^j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad (E - \sigma \tau \Lambda_1) y^{j+1/2} &= (E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_1) (E + (1 - \sigma) \tau \Lambda_2) y^j, \\ (E - \sigma \tau \Lambda_2) y^{j+1} &= y^{j+1/2}. \end{aligned}$$

О т в е т. а)  $(E - \sigma \tau \Lambda_1) (E - \sigma \tau \Lambda_2) y_t = \Lambda y - (2\sigma - 1) \tau \Lambda_1 \Lambda_2 y$ . б)  $y^{j+1/2} = (E - \sigma \tau \Lambda_2) \mu^{j+1}$  при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ . в)  $O(|h|^2 + \tau^2)$  при  $\sigma = 0,5$ . г) Схема

устойчива при  $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h_1^2 h_2^2}{4\tau (h_1^2 + h_2^2)}$ .

У к а з а н и е. г) Пусть  $y|_{y_h} = 0$ ,  $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$ ,  $A = A_1 + A_2$ . Запишем схему в виде

$$B y^{j+1} = C y^j,$$

где

$$B = (E + \sigma \tau A_1) (E + \sigma \tau A_2), \quad C = (E - (1 - \sigma) \tau A_1) (E - (1 - \sigma) \tau A_2),$$

и воспользуемся достаточными условиями устойчивости

$$B - C > 0, \quad B + C \geq 0.$$

Эти условия выполнены, если

$$A + (2\sigma - 1) \tau A_1 A_2 > 0,$$

$$2E + (2\sigma - 1) \tau A + (\sigma^2 + (1 - \sigma)^2) \tau^2 A_1 A_2 \geq 0.$$

Так как  $A_1 A_2 > 0$  и

$$E \geq \frac{1}{\|A_1\| + \|A_2\|} A,$$

то

$$0,5(B + C) \geq E + (\sigma - 0,5) \tau A \geq \left( \frac{1}{\|A_1\| + \|A_2\|} + (\sigma - 0,5) \tau \right) A \geq 0,$$

если

$$\sigma \geq 0,5 - \frac{1}{\tau (\|A_1\| + \|A_2\|)},$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h_1^2 h_2^2}{4\tau (h_1^2 + h_2^2)}.$$

При этом неравенство  $B - C > 0$  выполняется автоматически. Действительно, учитывая, что

$$A \geq \left( \frac{1}{\|A_1\|} + \frac{1}{\|A_2\|} \right) A_1 A_2,$$

получаем

$$B - C = A + (2\sigma - 1) \tau A_1 A_2 \geq \left( \frac{1}{\|A_1\|} + \frac{1}{\|A_2\|} + (2\sigma - 1) \tau \right) A_1 A_2.$$

Далее,

$$(2\sigma - 1) \tau + \frac{1}{\|A_1\|} + \frac{1}{\|A_2\|} \geq - \frac{2}{\|A_1\| + \|A_2\|} + \frac{1}{\|A_1\|} + \frac{1}{\|A_2\|} \geq 0,$$

что и требовалось.

$$7. \quad \left( E - \frac{2\tau}{3} \Lambda_1 \right) y^{l+1/2} = \frac{4}{3} y^l - \frac{1}{3} y^{l-1},$$

$$\left( E - \frac{2\tau}{3} \Lambda_2 \right) y^{l+1} = y^{l+1/2}.$$

(Схема Бейкера — Олифанта [1].)

Отв. а)  $\left( E - \tau \Lambda + \frac{2\tau^2}{3} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) y_i + \tau^2 \left( \frac{1}{\tau} E - \frac{1}{2} \Lambda + \frac{\tau}{3} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) y_{i1} =$   
 $= \Lambda y - \frac{2\tau}{3} \Lambda_1 \Lambda_2 y, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$  б)  $y^{l+1/2} = \mu^{l+1} - \frac{2\tau}{3} \Lambda_2 \mu^{l+1}$  при  $x_1 = 0, \quad l_1.$   
 в)  $O(|h|^2 + \tau).$  г) Схема устойчива при любых  $h_\alpha$  и  $\tau.$

$$8. \quad \left( E - \frac{\tau^2}{2} \Lambda_1 \right) y^{l+1/2} = y^l,$$

$$\left( E - \frac{\tau^2}{2} \Lambda_2 \right) \frac{y^{l+1} + y^{l-1}}{2} = y^{l+1/2}.$$



О т в е т. а)  $\left(E - \frac{\tau^2}{2} \Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau^2}{2} \Lambda_2\right) y_{it} = \Lambda y - \frac{\tau^2}{2} \Lambda_1 \Lambda_2 y.$

б)  $y^{j+1/2} = \frac{\mu^{j+1} + \mu^j}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_2 (\mu^j + \mu^{j+1})$  при  $x_1 = 0, l_1.$

в) Аппроксимирует уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (L_1 + L_2) u$  с погрешностью

$O(|h|^2 + \tau^2).$

г) Схема абсолютно устойчива.

У к а з а н и е. При приведении к каноническому виду учесть, что

$$y^{j+1} + y^{j-1} = 2y^j + \tau^2 y_{it}^j.$$

## Глава VIII

### ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При помощи метода конечных разностей задача Дирихле для уравнения Пуассона  $\Delta u = -f(x)$  в гл. IV была сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Порядок системы равен числу внутренних узлов сетки, т. е.  $O(h^{-p})$ , где  $h$  — шаг сетки,  $p$  — число измерений, и возрастает с уменьшением шага. Применение прямых методов линейной алгебры (например, метода исключения Гаусса) для решения этой системы нецелесообразно, так как при этом требуется большое число арифметических действий.

Для решения разностных эллиптических уравнений обычно применяются итерационные методы (или методы последовательных приближений).

В § 1 этой главы мы рассматриваем современные экономичные итерационные схемы, применяемые для решения разностной задачи Дирихле в прямоугольнике.

В §§ 2—4 дано изложение итерационных методов как части общей теории устойчивости разностных схем (см. гл. VI). Новым вопросом, возникающим здесь, является выбор итерационных параметров. В §§ 2, 3 рассматриваются одношаговые итерационные методы для уравнения  $Au = f$ , где  $A$  — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $u \in H$ ,  $f \in H$ . В § 4 изучается сходимость некоторых двухшаговых (трехслойных) итерационных схем.

#### § 1. Двухслойные итерационные схемы для разностной задачи Дирихле

**1. Итерационные схемы.** Все итерационные схемы можно трактовать как методы установления для соответствующего нестационарного уравнения. Поясним это на примере уравнения Пуассона. Решение уравнения теплопроводности со стационарными (т. е. не зависящими от времени) граничными данными и правой частью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

при  $t \rightarrow \infty$  стремится к решению стационарной задачи

$$\Delta \bar{u} = -f(x), \quad x \in G, \quad \bar{u}|_{\Gamma} = \mu(x), \quad (2)$$

т. е. к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что решение однородного уравнения теплопроводности с однородным граничным условием

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v, \quad v|_{\Gamma} = 0, \quad v(x, 0) = v_0 = u_0(x) - \bar{u}(x), \quad (3)$$

где  $v(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x)$  — отклонение от стационарного решения, стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  и любой функции  $v_0(x)$ .

В самом деле, пусть  $\{\lambda_k\}$  и  $\{w_k(x)\}$  — системы собственных значений и ортонормированных собственных функций задачи

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad x \in G, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

так что  $(w_k, w_m) = \delta_{km}$ , где  $\delta_{km}$  — символ Кронекера, а

$$(w, v) = \int_G w(x) v(x) dx, \quad \|w\| = \sqrt{(w, w)}.$$

Тогда решение задачи (3) имеет вид (см. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [6], гл. VI):

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x) e^{-\lambda_k t}, \quad c_k = (v_0, w_k).$$

В силу условия  $(w_k, w_m) = \delta_{km}$  имеем

$$\|v(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-2\lambda_k t} \leq e^{-2\lambda_1 t} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = e^{-2\lambda_1 t} \|v_0\|^2,$$

так как  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ . Отсюда следует, что

$$\|v(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|v_0\|.$$

Требование  $\|v(t)\| = \|u(x, t) - \bar{u}(x)\| \leq \varepsilon \|u_0 - \bar{u}\|$ , где  $0 < \varepsilon < 1$  — любое число, будет, очевидно, выполнено при

$$t \geq \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1}{\varepsilon} = t^*.$$

Поэтому, решая уравнение теплопроводности со стационарными граничными данными и правой частью и любыми начальными данными, мы при достаточно большом значении  $t > t^*(\varepsilon)$  получим приближенное решение стационарной задачи с любой заданной точностью  $\varepsilon > 0$ . Такой метод получения стационарного решения называют методом установления. Аналогичным свойством затухания начальных данных обладают многие устойчивые разностные аналоги уравнения теплопроводности. Более

того, можно утверждать, что итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений являются методами установления.

Остановимся сначала на общей характеристике понятия итерационной схемы. Пусть требуется решить разностное уравнение (линейную алгебраическую систему)

$$Au = f. \quad (4)$$

Будем рассматривать  $A$  как линейный оператор, заданный на некотором линейном нормированном пространстве  $H$ ,  $f \in H$  — заданный произвольный вектор из  $H$ .

Метод итераций позволяет, отправляясь от некоторого начального приближения  $y_0 \in H$ , последовательно определять приближенные решения уравнения (4)  $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots$ , где  $k$  — номер итерации. Значение  $y_{k+1}$  выражается через известные предыдущие итерации  $y_k, y_{k-1}, \dots$ . Если при вычислении  $y_{k+1}$  используется только предыдущая итерация  $y_k$ , то говорят, что итерационный метод (схема) является *одношаговым*. Если же для нахождения  $y_{k+1}$  используются две предыдущие итерации  $y_k$  и  $y_{k-1}$ , то говорят, что метод итераций является *двухшаговым*. Любая одношаговая итерационная схема, в соответствии с определением, может быть записана в виде

$$B_k y_{k+1} = C_k y_k + \tau_{k+1} f, \quad (5)$$

где  $B_k, C_k$  — линейные операторы на  $H$ , зависящие от номера итерации,  $\tau_{k+1}$  — некоторые числовые параметры.

Обычно к итерационным схемам предъявляется естественное требование: решение  $u \in H$  уравнения (4) при произвольном  $f \in H$  должно удовлетворять уравнению (5), т. е.

$$B_k u = C_k u + \tau_{k+1} f.$$

Так как  $u$  не зависит от  $k$ , то это уравнение и уравнение (4) будут выполнены, если потребовать

$$B_k - C_k = \tau_{k+1} A.$$

Выражая  $C_k$  через  $A$  и  $B_k$ , перепишем (5) в канонической форме

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Чтобы определить отсюда последовательно  $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ , надо задать начальное приближение  $y_0$ . Итак, получаем задачу

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, y_0 \text{ задано.} \quad (7)$$

Итерационная схема (6) при любых  $B_k$  и  $\tau_{k+1}$  точно аппроксимирует уравнение (4) на его решении  $u$ . Это значит, что

разность  $z_k = y_k - u$ , где  $u$  — точное решение уравнения (4),  $y_k$  — решение задачи (7), удовлетворяет однородному уравнению

$$B_k \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, z_0 = y_0 - u. \quad (8)$$

Говорят, что итерационный процесс (схема) (7) *сходится*, если

$$\|y_k - u\| = \|z_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $\|\cdot\|$  — некоторая норма.

Сравнивая (6) с двухслойной схемой, рассмотренной в гл. V, мы видим, что одношаговая итерационная схема по форме совпадает с двухслойной схемой для нестационарных уравнений вида

$$\mathcal{B} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f.$$

Поэтому вместо слов «одношаговая итерационная схема» можно говорить «двухслойная итерационная схема».

Таким образом, любой итерационный процесс вида (6) сводится к решению нестационарной задачи.

Различие между итерационными схемами и схемами для нестационарных задач заключается в следующем:

1) при любых  $B_k$  и  $\tau_{k+1}$  решение  $u$  исходной задачи (4) удовлетворяет уравнению (6),

2) выбор параметров  $\tau_{k+1}$  и операторов  $B_k$  следует подчинить лишь требованиям сходимости итераций и минимума арифметических действий (экономичности), необходимых для нахождения приближенного решения с заданной точностью (в случае нестационарных задач выбор шага подчинен прежде всего требованию аппроксимации).

Параметр  $\tau_{k+1}$  можно рассматривать как шаг (переменный в общем случае) по фиктивному времени  $t_{k+1} = \sum_{s=1}^{k+1} \tau_s$ .

Обычно задается некоторая точность  $\varepsilon > 0$ , с которой надо найти приближенное решение задачи (4). Если  $\|u\| = 1$ , то требуется, чтобы выполнялось условие

$$\|y_k - u\| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad k > n(\varepsilon). \quad (9)$$

Здесь  $n(\varepsilon)$  — минимальное число итераций, гарантирующих заданную точность  $\varepsilon$ . (Условие  $\|u\| = 1$  может быть выполнено после перенормировки  $u$  и  $f$  путем введения масштабного множителя. Пусть, например,  $H$  — гильбертово пространство,  $A = A^* > 0$ , тогда  $\|u\|_A = \|f\|_{A^{-1}}$ . Если  $\|f\|_{A^{-1}} = M_0$ , то, полагая  $u = M_0 \tilde{u}$ ,  $f = M_0 \tilde{f}$ , получим для  $\tilde{u}$  уравнение  $A\tilde{u} = \tilde{f}$  с  $\|\tilde{u}\|_A = 1$ .)

Так как точное решение  $u$  неизвестно, то условие (9) неудобно для практической проверки. Его можно заменить одним из условий

$$\|y_{k+1} - y_k\| < \varepsilon, \quad (10)$$

$$\|Ay_k - f\| < \varepsilon \quad (\|A(y_k - u)\| < \varepsilon), \quad (11)$$

где  $(Ay_k - f)$  — невязка в уравнении (4) при подстановке  $y_k$  вместо  $u$ . Если при некотором  $k$  выполнено одно из условий (10) или (11), то считается, что требуемая точность достигнута, и вычисление последующих приближений прекращается. В (9) — (11) могут фигурировать, вообще говоря, разные  $\varepsilon$ .

В общем случае в качестве меры сходимости итераций принимается отношение  $\|y_k - u\|/\|y_0 - u\|$  и т. д., так что например, требования (9) и (11) заменяются требованием

$$\|y_k - u\| < \varepsilon \|y_0 - u\| \quad \text{или} \quad \|Ay_k - f\| < \varepsilon \|Ay_0 - f\|.$$

Уравнению (4) можно поставить в соответствие большое число итерационных схем (6) с любыми  $B_k$  и  $\tau_k$ . Как следует выбирать  $B_k$  и  $\tau_k$ ?

Качество итерационной схемы характеризуется, прежде всего, числом  $Q(\varepsilon)$  действий, которые надо произвести, чтобы получить решение задачи (4) с заданной точностью  $\varepsilon > 0$  при любом выборе начального приближения  $y_0$ . Оператор  $B_k$  и параметры  $\tau_k$  надо выбирать так, чтобы число действий  $Q$  было минимальным (в некотором смысле).

Общий объем вычислений  $Q(\varepsilon)$  равен  $Q(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} q_k$ , где  $q_k$  — число действий для вычисления итерации номера  $k$ , или  $Q(\varepsilon) = \bar{q}n(\varepsilon)$ , где  $\bar{q}$  — среднее число действий для одной итерации. Если  $\bar{q}$  удовлетворяет требованию экономичности (например,  $\bar{q} = O(N)$ , где  $N$  — число узлов сетки  $\omega_h$  в случае разностного эллиптического уравнения), то задача о минимуме  $Q(\varepsilon)$  сводится к задаче о минимуме числа итераций  $n(\varepsilon)$ .

Запишем (6) в виде

$$B_k y_{k+1} = B_k y_k + \tau_{k+1} (f - Ay_k). \quad (12)$$

Отсюда видно, что  $q_k$  зависит только от вида  $B_k$ . Укажем типичные формы экономичных операторов:

1)  $B_k = E$  — единичный оператор (явная схема (6)),

2)  $B_k$  — треугольный оператор (с треугольной матрицей),

3)  $B_k$  — факторизованный оператор вида  $B_k = B_k^{(1)} \dots B_k^{(p)}$ ,

где  $B_k^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  — экономичные операторы.

Вообще  $B_k$  следует выбирать так, чтобы соответствующая схема для уравнения параболического типа являлась экономичной.

Мы остановимся подробно на итерационных схемах для разностной задачи Дирихле.

**2. Схема простой итерации (явная схема).** Рассмотрим задачу Дирихле в прямоугольнике  $\bar{G}_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ :

$$\Delta u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (13)$$

Соответствующая разностная задача Дирихле имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Lambda v &= -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = \mu(x), \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}$$

— сетка с шагами  $h_1$  и  $h_2$ ,  $\gamma_h$  — граница сетки. Задача (14) подробно исследована в гл. IV, § 1.

Простейшей двухслойной итерационной схемой является явная схема (метод Якоби) с постоянным параметром:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = \Lambda y_k + f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y_k|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad y_0 = y_0(x), \quad (15)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Так как  $y_{k+1}$  определяется по явной формуле  $y_{k+1} = y_k + \tau(\Lambda y_k + f)$  и  $q_k = O(N)$ , то число итераций зависит только от параметра  $\tau$ , который выбирается из условия минимума числа итераций (такая задача решается точно). Чтобы найти  $\tau$ , рассмотрим устойчивость по начальным данным однородного уравнения с однородными граничными условиями и произвольными начальными данными

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} &= \Lambda z_k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 0, 1, \dots, \\ z_k|_{\gamma_h} &= 0, \quad z_0 = z_0(x) = y_0(x) - u(x). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Пусть  $H$  — пространство сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль на границе  $\gamma_h$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение:

$$(v, w) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} v(i_1 h_1, i_2 h_2) w(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2,$$

$A = -\Lambda$  — линейный оператор, заданный на  $H$ .

В гл. IV, § 2 было показано, что  $A$  является линейным самосопряженным оператором,  $A = A^*$ , и

$$\delta \|z\|^2 \leq (Az, z) \leq \Delta \|z\|^2, \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 4 \left( \frac{1}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{1}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} \right), \\ \Delta &= 4 \left( \frac{1}{h_1^2} \cos^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{1}{h_2^2} \cos^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь  $\delta$  — наименьшее,  $\Delta$  — наибольшее собственные значения оператора  $A$ , так что  $\delta \leq \lambda_k \leq \Delta$ ,  $k=1, 2, \dots, (N_1-1) \times (N_2-1)$ ,  $\lambda_k$  — собственное значение номера  $k$  оператора  $A$ . Оценка (17) является точной.

Задача (16) эквивалентна операторному уравнению

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = 0, \quad k=0, 1, \dots, \quad z_0 - \text{любой вектор из } H. \quad (19)$$

Решая (19) относительно  $z_{k+1}$ , получим

$$z_{k+1} = Sz_k, \quad S = E - \tau A, \quad (20)$$

где  $S$  — оператор перехода. Из (20) находим

$$z_k = T_k z_0, \quad T_k = S^k, \quad (21)$$

где  $T_k$  — разрешающий оператор. Оценим  $\|z_k\|$ :

$$\|z_k\| \leq \|T_k\| \|z_0\| = \|S\|^k \|z_0\|, \quad (22)$$

так как  $\|S^k\| = \|S\|^k$ , поскольку  $S = S^*$  (см. гл. I, § 3). Итерации сходятся, если  $\|S\| < 1$ . Требование  $\|z_k\| < \varepsilon \|z_0\|$  будет, как видно из (22), выполнено, если  $\|S\|^k < \varepsilon$ , т. е.

$$k > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\|S\|)} = n(\varepsilon). \quad (23)$$

Величина  $\ln(1/\|S\|)$  обычно называется *скоростью сходимости итераций*.

Чем меньше  $\|S\|$ , тем меньше  $n(\varepsilon)$  (тем больше скорость сходимости).  $\|S\|$  зависит от  $\tau$ . Выберем  $\tau$  из условия минимума  $\|S\|$ . Так как  $S = S^*$ , то  $\|S\|$  равна модулю наибольшего собственного значения  $\mu_k = \mu_k(S)$  оператора  $S$ :

$$\|S\| = \max_k |\mu_k|. \quad (24)$$

Из определения  $S$  (20) следует, что  $\mu_k = 1 - \tau \lambda_k$ , где  $\lambda_k = \lambda_k(A)$  — собственное значение оператора  $A$ . В результате мы приходим к следующей задаче минимакса: найти то значение параметра  $\tau$ , при котором достигается

$$\min_{\tau > 0} \max_k |1 - \tau \lambda_k|, \quad \text{где } 0 < \delta \leq \lambda_k \leq \Delta. \quad (25)$$



Функция  $f(\lambda) = |1 - \tau\lambda|$ , очевидно, достигает максимума либо при  $\lambda = \delta$ , либо при  $\lambda = \Delta$ :

$$\max_{\delta \leq \lambda \leq \Delta} |1 - \tau\lambda| = \max\{|1 - \tau\delta|, |1 - \tau\Delta|\}. \quad (26)$$

Лемма 1. Если  $0 < \delta \leq \lambda \leq \Delta$ ,  $\tau > 0$ , то

$$\min_{\tau > 0} \max_{\lambda \in [\delta, \Delta]} |1 - \tau\lambda| = \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} = \rho_0 \quad \text{при} \quad \tau = \tau_0 = \frac{2}{\delta + \Delta}. \quad (27)$$

Доказательство. Рассмотрим функции  $\varphi_1(\tau) = |1 - \tau\delta|$  и  $\varphi_2(\tau) = |1 - \tau\Delta|$ . Они изображены на рис. 20,  $\varphi_1(\tau)$  убывает при  $0 < \tau < 1/\delta$  и возрастает при  $\tau > 1/\delta$ ;  $\varphi_2(\tau)$  убывает при  $0 < \tau < 1/\Delta$  и возрастает при  $\tau > 1/\Delta$ . Так как  $\Delta > \delta$ , то кривые  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  пересекаются в точке  $\tau = \tau_0 \in (1/\Delta, 1/\delta)$ , причем  $\varphi_1(\tau_0) = 1 - \tau_0\delta$ ,  $\varphi_2(\tau_0) = \tau_0\Delta - 1$ . Приравнявая эти выражения:  $1 - \tau_0\delta = \tau_0\Delta - 1$ , находим

$$\tau_0 = 2/(\delta + \Delta),$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 - \tau_0\delta = \tau_0\Delta - 1 = \\ &= (\Delta - \delta)/(\Delta + \delta). \end{aligned}$$

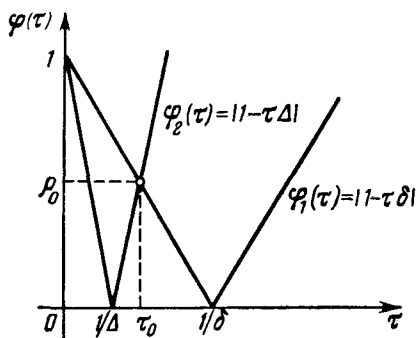


Рис. 20.

Из рисунка 20 видно, что в точке  $\tau_0$  достигается минимум функции  $\varphi(\tau) = \max\{|1 - \tau\delta|, |1 - \tau\Delta|\}$ . Тем самым найдено оптимальное значение  $\tau = \tau_0$ , при котором  $\rho(\tau) = \|S(\tau)\|$  имеет минимум, так что

$$\|z_k\| \leq \rho_0^k \|z_0\| \quad \text{при} \quad \tau = \tau_0 = 2/(\Delta + \delta). \quad (28)$$

Подставляя сюда вместо  $\delta$  и  $\Delta$  их значения (18), находим

$$\tau_0 = \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)}.$$

В случае квадратной сетки, т. е. при  $h_1 = h_2 = h$ , имеем  $\tau_0 = h^2/4$ . Схема (15) принимает вид

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(y_k^{(-1)} + y_k^{(+1)} + y_k^{(-1)} + y_k^{(+1)}) + \frac{h^2}{4} f, \quad y_{k+1}|_{y_h} = \mu(x). \quad (29)$$

Подсчитаем число итераций, достаточное для достижения точности  $\varepsilon$ . Для простоты предположим, что  $l_1 = l_2 = 1$ , тогда  $\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}$ ,  $\Delta = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}$ . Формула (27) дает

$$\rho_0 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\pi h/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\pi h/2)}, \quad n(\varepsilon) \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_0)}. \quad (30)$$

Оценим асимптотический порядок для числа итераций при  $h \rightarrow 0$ :

$$\rho_0 \approx 1 - 2 \operatorname{tg}^2(\pi h/2) \approx 1 - 0,5\pi^2 h^2, \quad \ln(1/\rho_0) \approx 0,5\pi^2 h^2,$$

$$n(\varepsilon) \geq \frac{2 \ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2},$$

т. е. число итераций пропорционально числу узлов сетки и является величиной  $O(h^{-2} \ln(1/\varepsilon))$ . Так как  $q = O(N) = O(h^{-2})$ , то общее число действий  $Q = O(h^{-4} \ln(1/\varepsilon))$ .

Погрешность в определении решения задачи Дирихле (13) есть сумма погрешности  $O(h^2)$  самой разностной схемы (14) и погрешности  $\varepsilon$  итерационной схемы. Естественно требовать, чтобы эти погрешности были величинами одного порядка, т. е.  $\varepsilon = O(h^2)$ . Тогда  $\ln(1/\varepsilon) = O(\ln h^{-1})$  и  $Q = O(h^{-4} \ln h^{-1})$ .

В настоящее время имеются методы, которые обеспечивают точность  $\varepsilon$ :

а) для прямоугольника с числом итераций  $n(\varepsilon) = O(\ln h^{-1} \ln(1/\varepsilon))$  (пропорционально логарифму числа узлов сетки  $\omega_h$ ) и общим числом действий  $Q = O(h^{-2} \ln h^{-1} \ln(1/\varepsilon))$  (продольно-поперечная схема или неявный метод переменных направлений),

б) для областей более сложной формы и уравнений с переменными коэффициентами

$$n(\varepsilon) = O(h^{-1} \ln(1/\varepsilon)), \quad Q = O(h^{-3} \ln(1/\varepsilon)).$$

Сравнение с такими методами показывает, что метод простой итерации является слишком трудоемким (неэкономичным).

В основе построения схем а) и б) лежит следующий принцип: итерационная схема, трактуемая как разностная схема для уравнения теплопроводности (1), должна быть экономичной. Тогда задача теории сводится к выбору итерационных параметров из условия минимума числа итераций (минимума нормы разрешающего оператора  $T_n$ ).

**3. Неявный метод переменных направлений (продольно-поперечная схема).** Рассмотрим задачу (14). В качестве итерационной схемы возьмем продольно-поперечную схему с переменным шагом по времени для уравнения теплопроводности (1):

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau_{j+1}^{(1)}} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+1/2}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad (31)$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau_{j+1}^{(2)}} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^{j+1} + f(x), \quad x \in \omega_h, \quad y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad (32)$$

где  $j = 0, 1, \dots$ ,  $y_0 = u_0(x)$  и  $y^{j+1/2}$  — промежуточное значение (подитерация), а  $u_0(x)$  — произвольное начальное приближение,

$\tau_{j+1}^{(1)} > 0$ ,  $\tau_{j+1}^{(2)} > 0$  — числа. Эта схема с  $\tau_{j+1}^{(1)} = \tau_{j+1}^{(2)} = 0,5\tau = \text{const}$  была рассмотрена для уравнения теплопроводности в гл. VII, § 1. Так как в данном случае граничное значение  $u|_{\Gamma} = \mu(x)$  не зависит от  $j$ , то для вычисления  $y^{j+1/2}|_{V_h}$  поправка не вводится, и  $y^{j+1/2}|_{V_h} = \mu(x)$ . В гл. VII был описан алгоритм решения методом прогонки системы алгебраических уравнений (31), (32). Он сводится к последовательному решению по строкам уравнений вида

$$y^{j+1/2} - \tau_{j+1}^{(1)} \Lambda_1 y^{j+1/2} = F^j$$

и по столбцам уравнений вида

$$y^{j+1} - \tau_{j+1}^{(2)} \Lambda_2 y^{j+1} = F^{j+1/2}.$$

Таким образом, вычислительный алгоритм тот же, что и в случае уравнения теплопроводности.

Для вычисления одной итерации требуется  $q = O(N) = O(1/h^2)$  арифметических действий. Ускорение сходимости итераций, по сравнению с явной схемой, достигается за счет соответствующего выбора параметров  $\{\tau_j^{(1)}\}$  и  $\{\tau_j^{(2)}\}$ . Каждое из уравнений (31) и (32) аппроксимирует задачу (14) точно. Поэтому для погрешности  $z^{j+1/2} = y^{j+1/2} - u$ ,  $z^{j+1} = y^{j+1} - u$  получим однородную задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{z^{j+1/2} - z^j}{\tau_{j+1}^{(1)}} &= \Lambda_1 z^{j+1/2} + \Lambda_2 z^j, & z^{j+1/2}|_{V_h} &= 0, \\ \frac{z^{j+1} - z^{j+1/2}}{\tau_{j+1}^{(2)}} &= \Lambda_1 z^{j+1/2} + \Lambda_2 z^{j+1}, & z^{j+1}|_{V_h} &= 0, & z_0 &= u_0 - u. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Рассмотрим сеточное пространство  $H$ , введенное в предыдущем пункте, и обозначим  $A_1 z = -\Lambda_1 z$ ,  $A_2 z = -\Lambda_2 z$ , где  $z$  — любой вектор из  $H$ . Операторы  $A_1$  и  $A_2$  обладают, как показано в гл. IV, § 2, следующими свойствами:

- 1)  $A_1$  и  $A_2$  самосопряженные операторы,
- 2)  $A_1$  и  $A_2$  положительно определенные и ограниченные операторы:  $\delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E$  или

$$\delta_\alpha \|z\|^2 \leq (A_\alpha z, z) \leq \Delta_\alpha \|z\|^2 \quad \text{для всех } z \in H, \quad (34)$$

где

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (35)$$

- 3) операторы  $A_1$  и  $A_2$  перестановочны.

Последнее свойство выполняется только для прямоугольника:

Перепишем задачу (33) в виде

$$\left. \begin{aligned} (E + \tau_{j+1}^{(1)} A_1) z^{j+1/2} &= (E - \tau_{j+1}^{(1)} A_2) z^j, \\ (E + \tau_{j+1}^{(2)} A_2) z^{j+1} &= (E - \tau_{j+1}^{(2)} A_1) z^{j+1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Задан произвольный вектор  $z^0$  из  $H$ .

Исключая, как было показано в гл. VII,  $z^{j+1/2}$ , получим факторизованную схему

$$(E + \tau_{j+1}^{(1)} A_1)(E + \tau_{j+1}^{(2)} A_2) z^{j+1} = (E - \tau_{j+1}^{(2)} A_1)(E - \tau_{j+1}^{(1)} A_2) z^j. \quad (37)$$

В силу перестановочности  $A_1$  и  $A_2$  отсюда следует:

$$z^{j+1} = S_{j+1} z^j, \quad (38)$$

где  $S_j$  — оператор перехода, равный  $S_j = S_j^{(1)} S_j^{(2)}$ ,

$$S_j^{(1)} = (E + \tau_j^{(1)} A_1)^{-1} (E - \tau_j^{(2)} A_1), \quad S_j^{(2)} = (E + \tau_j^{(2)} A_2)^{-1} (E - \tau_j^{(1)} A_2). \quad (39)$$

Применяя формулу (38), найдем

$$z^n = T_n z^0, \quad (40)$$

где  $T_n$  — разрешающий оператор, равный

$$T_n = \prod_{j=1}^n S_j. \quad (41)$$

Оператор  $T_n$  представляет собой произведение перестановочных самосопряженных операторов и, следовательно, является самосопряженным оператором.

Из самосопряженности  $T_n$  следует, что

$$\|T_n\| = \max_k |\lambda_k(T_n)|, \quad (42)$$

где  $\lambda_k(T_n)$  — собственные значения оператора  $T_n$ . Найдем выражение для  $\lambda_k(T_n)$ . Для этого нам понадобится тот факт, что перестановочные самосопряженные операторы  $A$  и  $B$  имеют общую систему собственных функций, а также легко проверяемые свойства:

1) если  $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ,  $AB = BA$ , то

$$\lambda(AB) = \lambda(A)\lambda(B), \quad \lambda(A+B) = \lambda(A) + \lambda(B),$$

$$2) \lambda(B^{-1}) = \frac{1}{\lambda(B)},$$

где  $\lambda(A)$  и  $\lambda(B)$  — собственные числа, соответствующие одному и тому же собственному вектору.

Пусть  $\lambda_{k_\alpha}^{(\alpha)}$  — собственное значение номера  $k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1$  оператора  $A_\alpha$ . Тогда будем иметь (номера  $k_\alpha$  опускаем)

$$\lambda(S_j^{(1)}) = \frac{1 - \tau_j^{(2)}\lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)}\lambda^{(1)}}, \quad \lambda(S_j^{(2)}) = \frac{1 - \tau_j^{(1)}\lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)}\lambda^{(2)}},$$

и, следовательно,

$$\lambda(S_j) = \frac{1 - \tau_j^{(2)}\lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)}\lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)}\lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)}\lambda^{(2)}}, \quad (43)$$

$$\lambda(T_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - \tau_j^{(2)}\lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)}\lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)}\lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)}\lambda^{(2)}}, \quad (44)$$

причем

$$\delta_1 \leq \lambda_{k_1}^{(1)} \leq \Delta_1, \quad \delta_2 \leq \lambda_{k_2}^{(2)} \leq \Delta_2, \quad (45)$$

где  $\delta_1, \delta_2$  и  $\Delta_1, \Delta_2$  определяются по формулам (35).

Из (40) получим оценку

$$\|z^n\| \leq \|T_n\| \|z^0\|.$$

Норма оператора  $T_n$ , согласно (42) и (44), равна

$$\|T_n\| = \max_{\lambda_{k_1}^{(1)}, \lambda_{k_2}^{(2)}} \left| \prod_{j=1}^n \frac{1 - \tau_j^{(2)}\lambda_{k_1}^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)}\lambda_{k_1}^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)}\lambda_{k_2}^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)}\lambda_{k_2}^{(2)}} \right|. \quad (46)$$

Так же, как и в п. 2, мы приходим к следующей задаче минимакса: найти такой набор параметров  $\{\tau_j^{(1)}\}, \{\tau_j^{(2)}\}$ , чтобы норма оператора  $T_n$  была минимальна при заданном  $n$ .

Заменяем в (46)  $\lambda_{k_1}^{(1)}$  и  $\lambda_{k_2}^{(2)}$  непрерывными аргументами  $\lambda^{(1)} \in [\delta_1, \Delta_1]$ ,  $\lambda^{(2)} \in [\delta_2, \Delta_2]$ . При этом правая часть в (46), вообще говоря, увеличится и знак равенства в (46) следует заменить знаком  $\leq$ . В результате мы приходим к следующей задаче минимакса: найти такие положительные числа  $\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_n^{(1)}$ ,  $\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_n^{(2)}$ ,  $n = n(\varepsilon)$  ( $0 < \varepsilon < 1$  — любое заданное число), при которых достигается

$$\min_{\{\tau_j^{(1)}\}, \{\tau_j^{(2)}\}} \max_{\substack{\lambda^{(1)} \in [\delta_1, \Delta_1], \\ \lambda^{(2)} \in [\delta_2, \Delta_2]}} \prod_{j=1}^n \left| \frac{1 - \tau_j^{(2)}\lambda^{(1)}}{1 + \tau_j^{(1)}\lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau_j^{(1)}\lambda^{(2)}}{1 + \tau_j^{(2)}\lambda^{(2)}} \right|. \quad (47)$$

Точное решение этой задачи найдено Жорданом (см. Ваш-пресс [3]). Мы изложим основные этапы его рассуждений (без обоснования заключительного этапа). Кроме того, мы дадим приближенное решение задачи минимакса; это решение может

быть использовано и в других случаях (например, для схем  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$  при  $p = 2, 3$ ).

**4. Выбор итерационных параметров.** Две системы параметров  $\{\tau_j^{(1)}\}$  и  $\{\tau_j^{(2)}\}$  выбираются в (31), (32) потому, что собственные значения операторов  $A_1 = -\Delta_1$  и  $A_2 = -\Delta_2$  расположены на разных отрезках. Если  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  и  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ , то выбирается одна система параметров  $\{\tau_j\}$ , т. е.  $\tau_j^{(1)} = \tau_j^{(2)} = \tau_j$ .

Если же  $\delta_1 \neq \delta_2$  и  $\Delta_1 \neq \Delta_2$ , то с помощью дробно-линейного преобразования переменных  $\lambda^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}$  задачу (47) можно свести к задаче минимакса для случая, когда спектры операторов  $A_1$  и  $A_2$  лежат на отрезке  $[\eta, 1]$ , где  $\eta > 0$ . Тогда вместо двух параметров  $\tau_j^{(1)}$  и  $\tau_j^{(2)}$  можно взять один параметр.

Итак, рассмотрим функцию

$$f = f(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \frac{1 - \tau^{(2)}\lambda^{(1)}}{1 + \tau^{(1)}\lambda^{(1)}} \cdot \frac{1 - \tau^{(1)}\lambda^{(2)}}{1 + \tau^{(2)}\lambda^{(2)}},$$

где  $\lambda^{(1)} \in [\delta_1, \Delta_1]$ ,  $\lambda^{(2)} \in [\delta_2, \Delta_2]$ .

Вместо  $\lambda^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}$  введем новые переменные  $\alpha$  и  $\beta$ , меняющиеся на отрезке  $[\eta, 1]$ , где  $\eta > 0$ . Для этого положим

$$\lambda^{(1)} = \frac{\alpha - p}{q - r\alpha}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{\beta + p}{q + r\beta}, \quad (48)$$

где  $p, q, r$  — постоянные, подлежащие определению. Требуя, чтобы  $\alpha = \beta = \eta$  при  $\lambda^{(1)} = \delta_1$ ,  $\lambda^{(2)} = \delta_2$  и  $\alpha = \beta = 1$  при  $\lambda^{(1)} = \Delta_1$ ,  $\lambda^{(2)} = \Delta_2$ , получим четыре уравнения для  $p, q, r, \eta$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(q - \eta r) &= \eta - p, & \delta_2(q + \eta r) &= \eta + p, \\ \Delta_1(q - r) &= 1 - p, & \Delta_2(q + r) &= 1 + p. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Прежде, чем решать эти уравнения, преобразуем функцию  $f$ :

$$f = \frac{1 - \alpha\omega^{(2)}}{1 + \alpha\omega^{(1)}} \cdot \frac{1 - \beta\omega^{(1)}}{1 + \beta\omega^{(2)}}, \quad \eta \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad (50)$$

где

$$\omega^{(1)} = \frac{\tau^{(1)} - r}{q - \tau^{(1)}p}, \quad \omega^{(2)} = \frac{\tau^{(2)} + r}{q + \tau^{(2)}p}. \quad (51)$$

Вернемся к системе уравнений (49). Выразим  $q$  и  $r$  через  $p$ :

$$2\Delta_1 \Delta_2 r = \Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2)p, \quad q = r + (1 - p)/\Delta_1. \quad (52)$$

Подставив (52) в (49), получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} [\delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)(1 - \eta) + 2\Delta_2(\Delta_1 - \delta_1)]p &= \\ &= -\delta_1(1 - \eta)(\Delta_1 - \Delta_2) + 2\Delta_2(\Delta_1\eta - \delta_1), \\ [\delta_2(\Delta_1 + \Delta_2)(1 + \eta) - 2\Delta_2(\Delta_1 + \delta_2)]p &= \\ &= -\delta_2(1 + \eta)(\Delta_1 - \Delta_2) + 2\Delta_2(\Delta_1\eta - \delta_2). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Введем вместо  $\eta$  новую постоянную  $\xi = (1 - \eta)/(1 + \eta)$ , так что  $\eta = (1 - \xi)/(1 + \xi)$ . Тогда уравнения (53) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} [(\Delta_1 - \delta_1) \Delta_2 + \xi \Delta_1 (\delta_1 + \Delta_2)] p &= (\Delta_1 - \delta_1) \Delta_2 - (\Delta_2 + \delta_1) \Delta_1 \xi, \\ [(\Delta_2 - \delta_2) \Delta_1 + \xi \Delta_2 (\delta_2 + \Delta_1)] p &= -(\Delta_2 - \delta_2) \Delta_1 + (\Delta_1 + \delta_2) \Delta_2 \xi. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Перемножая эти равенства, исключим  $p$  и найдем

$$\xi = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_1 + \delta_2)(\Delta_2 + \delta_1)}}, \quad \eta = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}. \quad (55)$$

Зная  $\xi$ , определим  $p$  из (54) и  $q, r$  из (52):

$$p = \frac{\kappa - \xi}{\kappa + \xi}, \quad \kappa = \frac{(\Delta_1 - \delta_1) \Delta_2}{(\Delta_2 + \delta_1) \Delta_1}, \quad r = \frac{\Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2) p}{2\Delta_1 \Delta_2}, \quad q = r + \frac{1 - p}{\Delta_1}. \quad (56)$$

Нетрудно убедиться в том, что  $\kappa > \xi$  и  $p > 0$ . Таким образом,  $f$  преобразована к виду (50). Так как  $\omega^{(1)}$  и  $\omega^{(2)}$  входят в (50) симметрично, а  $\alpha$  и  $\beta$  меняются на одном и том же отрезке, то полагаем

$$\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \omega, \quad \alpha = \beta.$$

Тогда вместо (47) получаем задачу о нахождении минимакса

$$\rho = \min_{\{\omega_j\}} \max_{\alpha \in \{\eta, 1\}} \prod_{j=1}^n \left( \frac{1 - \omega_j \alpha}{1 + \omega_j \alpha} \right)^2. \quad (57)$$

1) Выбор параметров «по Жордану». Решение задачи (57) найдено Жорданом и приводится в статье Вашпреса [3]. Оно довольно громоздко и мы не будем его излагать. Приведем здесь лишь формулы для вычисления оптимальных параметров  $\tau_j^{(1)}$  и  $\tau_j^{(2)}$ . Пусть задана точность  $\varepsilon$  итерационного процесса и пусть известны границы операторов  $A_1, A_2$ :

$$\delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \Delta_\alpha > \delta_\alpha > 0,$$

или  $\delta_\alpha \leq \lambda(A_\alpha) \leq \Delta_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Зная  $\delta_\alpha$  и  $\Delta_\alpha$ , по формуле (55) находим  $\eta = (1 - \xi)/(1 + \xi)$  и по формуле (56) — коэффициенты  $p, q, r$ . После этого вычисляем число итераций  $n(\varepsilon)$ , обеспечивающих заданную точность  $\varepsilon$ , по приближенной формуле

$$n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln(4/\varepsilon) \ln(4/\eta). \quad (58)$$

Вводя обозначения

$$\theta = \frac{1}{16} \eta^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad \sigma = \frac{2j-1}{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

получим для вычисления  $\omega_j$  формулу

$$\omega_j = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^\sigma)}{2\theta^{\sigma/2}(1+\theta^{1-\sigma}+\theta^{1+\sigma})}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Теперь остается определить, согласно (51), искомые параметры

$$\tau_j^{(1)} = \frac{q\omega_j + r}{1 + \omega_j p}, \quad \tau_j^{(2)} = \frac{q\omega_j - r}{1 - \omega_j p}. \quad (59)$$

При этих значениях параметров для задачи (31), (32) справедлива оценка

$$\|z^n\| \leq \varepsilon \|z^0\|.$$

После этого можно приступить к решению задачи (31), (32). Рассмотрим частный случай:  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  и  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ . Формула (55) дает:

$$\xi = (\Delta - \delta)/(\Delta + \delta), \quad \eta = \delta/\Delta.$$

При этом  $\kappa = \xi$ ,  $p = r = 0$ ,  $q = 1/\Delta$  и преобразование (48) примет вид  $\lambda^{(1)} = \alpha\Delta$ ,  $\lambda^{(2)} = \beta\Delta$  и  $\omega^{(1)} = \Delta\tau^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)} = \Delta\tau^{(2)}$ . Условие  $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$  дает  $\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \tau$ .

2) Циклический набор параметров. Другой, более грубый, способ выбора параметров  $\{\omega_j\}$  для разностной задачи Дирихле в квадрате на квадратной сетке был предложен в 1955 году Писменом и Рэкфордом [1] (см. также А. А. Самарский, В. Б. Андреев [1]). Преобразование, проведенное в начале этого пункта, сводит задачу для прямоугольника с  $h_1 \neq h_2$  к задаче для квадрата с квадратной сеткой. Поэтому, достаточно рассмотреть задачу о минимаксе функции (заменяем в (57)  $\omega_j$  на  $\tau_j$ )

$$F_n = \prod_{j=1}^n \left( \frac{1 - \tau_j \alpha}{1 + \tau_j \alpha} \right)^2, \quad 0 < \eta \leq \alpha \leq 1. \quad (60)$$

Набор параметров  $\{\tau_j\}$  представляет собою  $k_0$  циклов параметров  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$ , так что  $\tau_{n_0+k} = \tau_k$ ,  $\tau_{2n_0+k} = \tau_k, \dots$ , где  $k=1, 2, \dots, n_0$ .

Параметры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$  выберем так, чтобы

$$F_{n_0} \leq \bar{\rho} < 1, \quad (61)$$

где  $\bar{\rho}$  не зависит от  $\eta$ .

Лемма 2. Пусть даны функция

$$f(x) = \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2$$

и два числа  $m > 0$  и  $M > 0$ ,  $m < 1 < M$ . Тогда

$$\max_{m \leq x \leq M} f(x) = \max \left\{ \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^2, \left( \frac{1-M}{1+M} \right)^2 \right\} = \bar{\rho} < 1. \quad (62)$$



Найдем  $f'(x) = 4(x-1)(1+x)^{-3}$ . Так как  $f'(x) < 0$  при  $x < 1$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x > 1$ , то  $f(x)$  принимает наибольшее значение либо при  $x = m$ , либо при  $x = M$ .

Из леммы 2 следует, что, если условие

$$m \leq \tau_j \alpha \leq M \quad (63)$$

выполнено хотя бы для одного  $j = 1, 2, \dots, n$  при любых  $\alpha \in [\eta, 1]$ , то

$$\max_{\alpha \in [\eta, 1]} F_n \leq \bar{\rho}. \quad (64)$$

Последовательность  $\{\tau_j\}$  выберем так, чтобы для каждого  $\alpha \in [\eta, 1]$  нашлось хотя бы одно значение  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, n_0$ , такое, что выполняется (63) и, следовательно, (64).

Построим последовательность интервалов  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ , покрывающих отрезок  $[\eta, 1]$ , полагая

$$\xi_0 = \eta, \quad \xi_j < \xi_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n_0, \quad \text{где } \xi_{n_0} \leq 1, \quad \text{а } \xi_{n_0+1} > 1$$

(числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0+1}$  и  $n_0$  подлежат определению). Тогда любое значение  $\alpha \in [\eta, 1]$  будет принадлежать некоторому отрезку  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ , т. е.

$$\xi_{j-1} \leq \alpha \leq \xi_j,$$

и, следовательно,

$$\tau_j \xi_{j-1} \leq \tau_j \alpha \leq \tau_j \xi_j.$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\tau_j \xi_{j-1} = m < 1, \quad \tau_j \xi_j = M > 1, \quad \xi_0 = \eta, \quad (65)$$

где  $m$  и  $M$  — положительные числа, не зависящие от  $\eta$ . Отсюда находим

$$\xi_j = \frac{M}{m} \xi_{j-1} = \frac{1}{q} \xi_{j-1}, \quad \xi_j = \frac{1}{q^j} \eta, \quad q = \frac{m}{M} < 1. \quad (66)$$

Требования  $\xi_{n_0} \leq 1$ ,  $\xi_{n_0+1} > 1$  будут выполнены, если

$$\eta \leq q^{n_0}, \quad \eta > q^{n_0+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\ln(1/\eta)}{\ln(1/q)} - 1 < n_0 \leq \frac{\ln(1/\eta)}{\ln(1/q)}. \quad (67)$$

Из (65) определим последовательность  $\{\tau_j\}$ . Так как  $\tau_{j+1} \xi_j = m$ ,  $\tau_j \xi_j = M$ , то

$$\tau_{j+1} = q \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_0 - 1, \quad q = m/M, \quad \tau_1 = m/\eta. \quad (68)$$

Таким образом,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$  образуют убывающую геометрическую прогрессию. Из (67) видно, что число параметров  $\{\tau_j\}$

равно  $n_0 > \frac{\ln(1/\eta)}{\ln(1/q)} - 1$ . В частности, для задачи Дирихле в квадрате на квадратной сетке с шагом  $h$  имеем  $\eta = \delta/\Delta = \text{tg}^2(\pi h/2) \approx \pi^2 h^2/4$  и, следовательно,  $n_0 = O(\ln(1/h))$ . После  $n_0$  итераций с параметрами  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$  в силу (64) справедлива оценка

$$\|z^{n_0}\| \leq \bar{\rho} \|z^0\|, \quad (69)$$

где

$$\bar{\rho} = \max \left\{ \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^2, \left( \frac{1-M}{1+M} \right)^2 \right\}, \quad (70)$$

$m$  и  $M$  — любые числа, удовлетворяющие условию  $0 < m < 1 < M$ .

Проведем теперь  $k_0$  циклов с набором параметров  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$ , определенных выше, полагая

$$\tau_{kn_0+j} = \tau_j, \quad k = 1, 2, \dots, k_0 - 1, \quad 1 \leq j \leq n_0.$$

В силу (69) имеем  $\|z^{kn_0}\| \leq \bar{\rho} \|z^{(k-1)n_0}\|$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_0$ . Отсюда следует, что

$$\|z^{k_0 n_0}\| \leq \bar{\rho}^{k_0} \|z^0\|. \quad (71)$$

Условие

$$\|z^{k_0 n_0}\| \leq \varepsilon \|z^0\| \quad (72)$$

будет выполнено при  $\bar{\rho}^{k_0} \leq \varepsilon$ . Отсюда находим

$$k_0 \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\bar{\rho})}. \quad (73)$$

Таким образом для решения задачи (31), (32) после  $k_0$  циклов с набором параметров  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$  (по ним из формул (59) находятся  $\tau_i^{(1)}$  и  $\tau_i^{(2)}$ ), где  $n_0$  и  $k_0$  определяются согласно (67) и (73), для общего числа итераций верна оценка

$$n(\varepsilon) = n_0 k_0 \approx \kappa_0 \ln(1/\eta) \ln(1/\varepsilon), \quad (74)$$

где  $\kappa_0 = (\ln(1/\bar{\rho}) \ln(1/q))^{-1}$  — постоянная, зависящая от параметров  $m$  и  $M$ . Так как  $q < 1$ ,  $\bar{\rho} < 1$ , то  $\kappa_0$  убывает с убыванием  $q$  и  $\bar{\rho}$ . Поэтому при фиксированном  $q$  число  $\kappa_0$  минимально, если минимально  $\bar{\rho}$ . Минимум  $\bar{\rho}$ , очевидно, достигается при  $(1-m)/(1+m) = (M-1)/(M+1)$ . Отсюда находим  $M = 1/m$  и

$$\bar{\rho} = \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^2, \quad \kappa_0 = \frac{1}{4 \ln \frac{1+m}{1-m} \ln \frac{1}{m}}.$$

Минимум  $\kappa_0(m)$  находится численно:  $m \approx 0,4$  и  $\kappa_0 \approx 0,32$ .

Сравнение (74) с (58) показывает, что циклический набор параметров не является оптимальным. Однако асимптотические

порядки формул (74) и (58) совпадают (с точностью до множителя):  $n = O(\ln(1/h) \ln(1/\varepsilon))$ .

**5. Итерационная схема для разностной задачи Дирихле повышенного порядка точности\*).** Для задачи (13) рассмотрим схему повышенного порядка точности на прямоугольной сетке с шагами  $h_1$  и  $h_2$ :

$$\Lambda'v = \left( \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) v = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{V_h} = \mu(x), \quad (75)$$

где  $\Lambda_\alpha v = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Эта схема была получена в гл. IV, § 1. Здесь

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f.$$

Схема (75) имеет точность  $O(|h|^4)$ ,  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ , а на квадратной сетке ( $h_1 = h_2 = h$ ) при соответствующем выборе  $\varphi$  — точность  $O(h^6)$ .

Рассмотрим соответствующее операторное уравнение (неоднородные краевые значения учитываем изменением правой части в приграничных узлах):

$$A'v = \varphi, \quad A' = A_1 + A_2 - (\kappa_1 + \kappa_2) A_1 A_2, \quad \kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 > 0, \quad (76)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — линейные операторы, заданные на  $H$ . Предположим, что

1)  $A_1$  и  $A_2$  самосопряженные операторы и

$$\delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (77)$$

2)  $A_1$  и  $A_2$  перестановочны,  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ .

3)  $\kappa_\alpha < 1/\Delta_\alpha$ , так что существуют положительные операторы

$$(E - \kappa_\alpha A_\alpha)^{-1}.$$

**Лемма 3.** Если выполнены условия 1) и 3), то операторы

$$\tilde{A}_\alpha = (E - \kappa_\alpha A_\alpha)^{-1} A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (78)$$

имеют границы  $\tilde{\delta}_\alpha$  и  $\tilde{\Delta}_\alpha$ , т. е.

$$\tilde{\delta}_\alpha E \leq \tilde{A}_\alpha \leq \tilde{\Delta}_\alpha E,$$

где  $\tilde{\delta}_\alpha$  и  $\tilde{\Delta}_\alpha$  определяются формулами

$$\tilde{\delta}_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{1 - \kappa_\alpha \delta_\alpha}, \quad \tilde{\Delta}_\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{1 - \kappa_\alpha \Delta_\alpha}. \quad (79)$$

\* См. А. А. Самарский [22].

Представим  $\tilde{A}_\alpha$  в виде  $\tilde{A}_\alpha = (A_\alpha^{-1} - \kappa_\alpha E)^{-1}$ . Из условия (77), в силу самосопряженности  $A_\alpha$ ,  $A_\alpha^{-1}$  и  $A_\alpha^{-1} - \kappa_\alpha E > 0$  следует, что

$$(1/\Delta_\alpha - \kappa_\alpha)E \leq A_\alpha^{-1} - \kappa_\alpha E \leq (1/\delta_\alpha - \kappa_\alpha)E.$$

Так как  $\kappa_\alpha < 1/\Delta_\alpha$ , то  $\delta_\alpha E \leq \tilde{A}_\alpha = (A_\alpha^{-1} - \kappa_\alpha E)^{-1} \leq \tilde{\Delta}_\alpha E$ .

Лемма доказана.

Лемма 4. Если выполнены условия 1) – 3), то уравнение (76) эквивалентно уравнению

$$(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)v = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = (E - \kappa_1 A_1)^{-1}(E - \kappa_2 A_2)^{-1}\varphi, \quad (80)$$

где  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  определяются согласно (78) и являются самосопряженными положительными операторами с границами  $\tilde{\delta}_1$ ,  $\tilde{\Delta}_1$  и  $\tilde{\delta}_2$ ,  $\tilde{\Delta}_2$ .

В самом деле, перепишем (76) в виде

$$A_1(E - \kappa_2 A_2)v + (E - \kappa_1 A_1)A_2v = \varphi. \quad (81)$$

Применяя к (81) оператор  $(E - \kappa_1 A_1)^{-1}(E - \kappa_2 A_2)^{-1}$  и учитывая перестановочность всех операторов, получим (80). Обратный ход рассуждений очевиден.

Итак, решение уравнения (76) сведено к решению уравнения (80) с самосопряженными перестановочными операторами  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$ , границы которых определяются по формулам (79).

Для уравнения (80) можно воспользоваться продольно-поперечной схемой. Однако, имея в виду переход от  $\tilde{A}_\alpha$  к  $A_\alpha$ , будем исходить из факторизованной схемы

$$\begin{aligned} (E + \tau_{j+1}^{(1)}\tilde{A}_1)(E + \tau_{j+1}^{(2)}\tilde{A}_2)y_{j+1} &= \\ &= (E - \tau_{j+1}^{(2)}\tilde{A}_1)(E - \tau_{j+1}^{(1)}\tilde{A}_2)y_j + (\tau_{j+1}^{(1)} + \tau_{j+1}^{(2)})\tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (82)$$

Применим к обеим частям этого уравнения оператор

$$(E - \kappa_1 A_1)(E - \kappa_2 A_2)$$

и учтем, что все операторы перестановочны и

$$\begin{aligned} (E - \kappa_1 A_1)(E + \tau_{j+1}^{(1)}\tilde{A}_1) &= E - \kappa_1 A_1 + \tau_{j+1}^{(1)}(E - \kappa_1 A_1)\tilde{A}_1 = \\ &= E + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1)A_1, \\ (E - \kappa_1 A_1)(E - \tau_{j+1}^{(2)}\tilde{A}_1) &= E - (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1)A_1. \end{aligned}$$

В результате получим схему

$$\begin{aligned} (E + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1)A_1)(E + (\tau_{j+1}^{(2)} - \kappa_2)A_2)y_{j+1} &= \\ &= (E - (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1)A_1)(E - (\tau_{j+1}^{(1)} + \kappa_2)A_2)y_j + (\tau_{j+1}^{(1)} + \tau_{j+1}^{(2)})\varphi. \end{aligned} \quad (83)$$

Записывая эту схему в каноническом виде

$$(E + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1) A_1)(E + (\tau_{j+1}^{(2)} - \kappa_2) A_2) \frac{y_{j+1} - y_j}{\tau_{j+1}^{(1)} + \tau_{j+1}^{(2)}} + A' y_j = \varphi, \quad (84)$$

убеждаемся в том, что она точно аппроксимирует уравнение (76) на решении  $v$ . Итерационная схема (83) эквивалентна продольно-поперечной схеме

$$(E + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1) A_1) y_{j+1/2} = (E - (\tau_{j+1}^{(1)} + \kappa_2) A_2) y_j + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1) \varphi, \quad (85)$$

$$(E + (\tau_{j+1}^{(2)} - \kappa_2) A_2) y_{j+1} = (E - (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1) A_1) y_{j+1/2} + (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1) \varphi. \quad (86)$$

Эквивалентность (83) и (85), (86) доказывается по аналогии с гл. VII, § 1. Из (85) и (86) находим (умножая (85) на  $\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1$ , (86) на  $-(\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1)$  и складывая результаты):

$$(\tau_{j+1}^{(1)} + \tau_{j+1}^{(2)}) y_{j+1/2} = (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1) (E - (\tau_{j+1}^{(1)} + \kappa_2) A_2) y_j + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1) (E + (\tau_{j+1}^{(2)} - \kappa_2) A_2) y_{j+1}. \quad (87)$$

Подставляя (87) в (85), получим (83). Обратный ход рассуждений очевиден.

Для погрешности  $z_{j+1} = y_{j+1} - v$ , очевидно, получим однородное ( $s \varphi = 0$ ) уравнение (83), которое эквивалентно однородному ( $s \tilde{\varphi} = 0$ ) уравнению (82). Поэтому разрешающий оператор схемы (83) равен разрешающему оператору схемы (82), который был рассмотрен выше (в п. 3 и п. 4). Тем самым задача о выборе итерационных параметров для схемы (85), (86) или (83) свелась к уже решенной задаче о выборе итерационных параметров для схемы (82). Нужно лишь всюду в формулах п.п. 4 и 5 заменить  $\delta_\alpha$ ,  $\Delta_\alpha$  величинами  $\tilde{\delta}_\alpha$ ,  $\tilde{\Delta}_\alpha$ .

Общие рассуждения для операторного уравнения (76) закончены. Обратимся теперь к схеме повышенного порядка точности.

Сначала опишем вычислительный алгоритм. Подставляя в (85), (86) вместо  $A_\alpha$  оператор  $-A_\alpha$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} E - (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1) \Lambda_1) y_{j+1/2} &= (E + (\tau_{j+1}^{(1)} + \kappa_2) \Lambda_2) y_j + (\tau_{j+1}^{(1)} - \kappa_1) \varphi, \\ (E - (\tau_{j+1}^{(2)} - \kappa_2) \Lambda_2) y_{j+1} &= (E + (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1) \Lambda_1) y_{j+1/2} + (\tau_{j+1}^{(2)} + \kappa_1) \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Как ставить граничные условия?

1) Если правые части  $\varphi$  учитывают в приграничных узлах неоднородные краевые условия, то положим

$$y_{j+1} = y_{j+1/2} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \gamma_h.$$

2) Если же мы хотим поставить граничные условия на  $\gamma_h$ , не меняя  $\varphi$  в приграничных узлах, то следует учесть, что уравнение

(87) должно выполняться не только при  $0 < x_1 < l_1$ , но и на границе при  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ . Полагая в (87)  $y_j = y_{j+1} = \mu$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} y_{j+1/2} &= \bar{\mu}, \quad \bar{\mu} = \mu + (\kappa_1 + \kappa_2) \Lambda_2 \mu, \quad x_1 = 0, \quad l_1, \\ y_{j+1} &= y_j = \mu, \quad x \in \gamma_h. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Следует иметь в виду, что  $\kappa_\alpha = h_\alpha^2/12$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Порядок счета: 1) вычисляются  $\tilde{\delta}_\alpha$  и  $\tilde{\Delta}_\alpha$  по формулам (79), 2) зная  $\tilde{\delta}_\alpha$ ,  $\tilde{\Delta}_\alpha$  и пользуясь результатами п. 4, находим параметры  $\{\tau_j^{(1)}\}$  и  $\{\tau_j^{(2)}\}$ , соответствующие схеме (88), 3) после этого методом прогонки по строкам и столбцам решаем систему уравнений (88) с краевыми условиями (89).

В п. 4 была получена приближенная формула для числа итераций  $n(\varepsilon)$ , обеспечивающих точность  $\varepsilon > 0$ . Для задачи (88), (89) она имеет вид

$$\tilde{n}(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln(4/\tilde{\eta}) \ln(4/\varepsilon), \quad (90)$$

где

$$\tilde{\eta} = \frac{1 - \tilde{\xi}}{1 + \tilde{\xi}}, \quad \tilde{\xi} = \left( \frac{(\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\delta}_1)(\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\delta}_2)}{(\tilde{\Delta}_1 + \tilde{\delta}_2)(\tilde{\Delta}_2 + \tilde{\delta}_1)} \right)^{1/2}.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно сравнить число итераций для схемы второго порядка точности ( $n(\varepsilon)$ ) и для схемы повышенного порядка точности ( $\tilde{n}(\varepsilon)$ ). Из (90) видно, что

$$\frac{\tilde{n}(\varepsilon)}{n(\varepsilon)} \approx \frac{\ln(4/\tilde{\eta})}{\ln(4/\eta)},$$

где  $\eta$  определяется по тем же формулам, что и  $\tilde{\eta}$ , если заметить в них  $\tilde{\xi}$  на  $\xi$  и  $\tilde{\delta}_\alpha$  на  $\delta_\alpha$ ,  $\tilde{\Delta}_\alpha$  на  $\Delta_\alpha$ . Приведем результаты сравнения для случая квадрата со стороной  $l_1 = l_2 = 1$  и квадратной сетки с  $h_1 = h_2 = h$ . При этом  $\tilde{\eta} = \tilde{\delta}/\tilde{\Delta}$ ,  $\eta = \delta/\Delta$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ,

$$\tilde{n}/n = \begin{cases} 1,10 & \text{при } h = 0,100, \\ 1,05 & \text{при } h = 0,025, \\ 1,04 & \text{при } h = 0,010. \end{cases}$$

Объем вычислений на каждую итерацию для обеих схем практически одинаков, а различие в числе итераций незначительно. Так как схема повышенного порядка точности позволяет пользоваться более грубой сеткой для достижения заданной точности, то ее применение особенно выгодно в тех случаях,

когда решение  $u = u(x)$  задачи (13) обладает достаточной гладкостью.

**6. Метод переменных направлений для трехмерной задачи Дирихле \***). Рассмотрим в параллелепипеде

$$\bar{G} = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3)$$

задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \sum_{\alpha=1}^3 L_\alpha u = -f(x), \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \\ u|_\Gamma &= \mu(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

где  $\Gamma$  — граница параллелепипеда  $G$ .

Введем в  $\bar{G}$  сетку

$$\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3), i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2, 3\}$$

и исходной задаче поставим в соответствие разностную задачу

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_\gamma = \mu(x), \quad (92)$$

где  $\gamma$  — граница сетки,  $\omega_h$  — множество внутренних узлов и

$$\Lambda' y = \Lambda y - \frac{\theta}{12} \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta y, \quad \Lambda = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad (93)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\theta}{12} (h_1^2 \Lambda_1 f + h_2^2 \Lambda_2 f + h_3^2 \Lambda_3 f). \quad (94)$$

Если  $\theta = 0$ , то это схема второго порядка точности; при  $\theta = 1$  — схема четвертого порядка точности.

Доказательство равномерной сходимости решения задачи (92) к решению задачи (91) можно найти в работе В. Б. Андреева [2].

В качестве итерационной схемы возьмем факторизованную двухслойную схему с двумя параметрами  $\sigma$  и  $\tau_j$ :

$$B_j \frac{y_{j+1} - y_j}{\tau_j} = \Lambda' y_j + \varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad y|_\gamma = \mu, \quad (95)$$

где  $y_0 = y_0(x)$  — любая функция и

$$B_j = (E - \sigma \tau_j \Lambda_1)(E - \sigma \tau_j \Lambda_2)(E - \sigma \tau_j \Lambda_3), \quad \sigma > 0. \quad (96)$$

Укажем алгоритм для решения уравнения (95) с оператором (96). Последовательно решаются следующие три задачи.

1) Вдоль прямых, параллельных оси  $Ox_1$  (при фиксированных  $i_2, i_3$ ) решается уравнение

$$(E - \sigma \tau_j \Lambda_1) y^{(1)} = F_j, \quad F_j = B_j y_j + \tau_j (\Lambda' y_j + \varphi)$$

<sup>\*)</sup> См. А. А. Самарский, В. Б. Андреев [1].

с краевыми условиями

$$y^{(1)} = (E - \sigma\tau_j\Lambda_2)(E - \sigma\tau_j\Lambda_3)\mu, \quad x_1 = 0, l_1.$$

2) Вдоль прямых, параллельных оси  $Ox_2$  (при фиксированных  $i_1, i_3$ ) решается уравнение

$$(E - \sigma\tau_j\Lambda_2)y^{(2)} = y^{(1)}$$

с краевым условием

$$y^{(2)} = (E - \sigma\tau_j\Lambda_3)\mu \quad \text{при} \quad x_2 = 0, l_2.$$

3) Вдоль прямых, параллельных оси  $Ox_3$  (при фиксированных  $i_1, i_2$ ) решается уравнение

$$(E - \sigma\tau_j\Lambda_3)y^{j+1} = y^{(2)}$$

с краевым условием

$$y^{j+1} = \mu \quad \text{при} \quad x_3 = 0, l_3.$$

Можно воспользоваться и другим алгоритмом:

$$1) \quad (E - \sigma\tau_j\Lambda_1)\omega^{(1)} = \Lambda'y_j + \varphi,$$

$$\omega^{(1)} = 0, \quad x_1 = 0, l_1,$$

$$2) \quad (E - \sigma\tau_j\Lambda_2)\omega^{(2)} = \omega^{(1)},$$

$$\omega^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, l_2,$$

$$3) \quad (E - \sigma\tau_j\Lambda_3)\omega^{(3)} = \omega^{(2)},$$

$$\omega^{(3)} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = 0, l_3, \quad y_{j+1} = y_j + \tau_j\omega^{(3)}.$$

При этом требуется помнить два вектора  $y_j, \omega^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, 3$ .

Для погрешности  $z_j = y_j - y$  получаем однородное уравнение

$$B_j \frac{z_{j+1} - z_j}{\tau_j} = \Lambda'z_j, \quad x \in \omega_h, \quad z_j|_{\Gamma} = 0, \quad z_0 = y_0 - y. \quad (97)$$

Операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2$  и  $\Lambda_3$  попарно перестановочны и имеют общую систему собственных функций

$$v_k(x) = v_{k_1 k_2 k_3}(x) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{\pi k_1 x_1}{l_1} \sin \frac{\pi k_2 x_2}{l_2} \sin \frac{\pi k_3 x_3}{l_3}$$

и собственные значения

$$\lambda_{k_\alpha} = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi k_\alpha h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1,$$

так что  $\Lambda_\alpha v_k + \lambda_{k_\alpha} v_k = 0, v_k|_{\Gamma} = 0$ . Напишем выражения для



собственных значений оператора  $\Lambda'$ :

$$\lambda'_k = \lambda(\Lambda') = \lambda_k - \frac{\theta}{12} \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{k_\alpha} \lambda_{k_\beta}, \quad \lambda_k = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{k_\alpha}.$$

Выразим из (97)  $z_{j+1}$  через  $z_j$ :

$$z_{j+1} = S_j z_j, \quad z_0 = y_0 - y,$$

где  $S_j = E + \tau_j B_j^{-1} \Lambda'$  — оператор перехода. Отсюда следует, что

$$z_n = \left( \prod_{j=1}^n S_j \right) z_0 = T_n z_0,$$

$$\|z_n\| \leq \|T_n\| \|z_0\|,$$

где  $\|T_n\| = \left\| \prod_{j=1}^n S_j \right\|$ ,  $T_n$  — разрешающий оператор.

Так как все операторы, написанные выше, являются само-сопряженными и попарно перестановочными, то

$$\|S_n\| = \max_k |\lambda_k(S_n)| = \max_k |\rho_{k,n}|,$$

где

$$\rho_{k,n} = \lambda_k(S_n) = 1 - \tau_n \left( \lambda_k - \frac{\theta}{12} \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{k_\alpha} \lambda_{k_\beta} \right) \prod_{\alpha=1}^3 (1 + \sigma \tau_n \lambda_{k_\alpha})^{-1}.$$

Пользуясь выражениями для  $\lambda_{k_\alpha}$ , получим  $h_\alpha^2 \lambda_{k_\alpha} \lambda_{k_\beta} < 4\lambda_{k_\beta}$ ,

$$\frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2 \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{k_\alpha} \lambda_{k_\beta} < \frac{2}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{k_\alpha} = \frac{2}{3} \lambda_k.$$

На основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Поля [1]) имеем

$$\prod_{\alpha=1}^p (1 + \sigma \tau_n \lambda_{k_\alpha})^{-1} \geq (1 + \sigma \tau_n \lambda_k / p)^{-p}.$$

Найдем оценки снизу и сверху для  $\rho_{k,n}$ :

$$\rho_{k,n} < 1 - (1 - 2\theta/3) \tau_n \lambda_k (1 + \sigma \tau_n \lambda_k / 3)^{-3}, \quad (98)$$

$$\rho_{k,n} > 1 - \tau_n \lambda_k (1 + \sigma \tau_n \lambda_k)^{-1}. \quad (99)$$

Отсюда видно, что  $-1 < \rho_{k,n} < 1$ , т. е.  $|\rho_{k,n}| < 1$  при  $\sigma \geq 0,5$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_{k,n} + 1 &> 2 - \tau_n \lambda_k (1 + \sigma \tau_n \lambda_k)^{-1} = \\ &= (2 + (2\sigma - 1) \tau_n \lambda_k) (1 + \sigma \tau_n \lambda_k)^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Неравенство  $\rho_{k,n} < 1$  очевидно.

Теперь нетрудно показать, что при

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \theta = 0 \quad \text{или} \quad \theta = 1, \quad \sigma_0 = 13/18, \quad \sigma_1 = 0,5 \quad (100)$$

справедлива оценка

$$|\rho_{k,n}| < \bar{\rho}(a),$$

где

$$0 < \bar{\rho}(a) = 1 - \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{2\theta}{3}\right) \frac{3a}{(1+a)^3}, \quad a = \frac{\sigma \tau_n \lambda_k}{3}. \quad (101)$$

Неравенство  $\rho_{k,n} < \bar{\rho}(a)$  следует из (98). Учитывая (99), получим

$$\rho_{k,n} + \bar{\rho}(a) > 2 - \frac{3a}{\sigma(1+3a)} - \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{2\theta}{3}\right) \frac{3a}{(1+a)^3}.$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}_\theta = 2\sigma - 1 + \frac{1}{1+3a} - \left(1 - \frac{2\theta}{3}\right) \frac{3a}{(1+a)^3}$$

и потребуем, чтобы она была неотрицательна. Это имеет место при условии (100). В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = 2\sigma - 1 + \frac{1}{1+3a} - \frac{a}{(1+a)^3} = 2\sigma - 1 + \frac{1+2a+a^3}{(1+3a)(1+a)^3} > 0 \\ \text{при } \sigma \geq 0,5 = \sigma_1. \end{aligned}$$

Оценка для  $\mathcal{F}_0$  более грубая:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 = 2\sigma - 1 + \frac{1}{1+3a} - \frac{3a}{(1+a)^3} > 2\sigma - 1 - \frac{3a}{(1+a)^3} > \\ > 2\sigma - 1 - 4/9 \geq 0 \quad \text{при } \sigma \geq 13/18 = \sigma_0. \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что  $|\rho_{k,n}| < \bar{\rho}(a)$ .

**Лемма 5.** Пусть даны два числа  $m$  и  $M$ , причем  $0 < m < < 0,5 < M$ . Тогда наибольшее значение функции  $\bar{\rho}(a)$  на отрезке  $[m, M]$  равно

$$\rho^* = \max_{m \leq a \leq M} \bar{\rho}(a) = \max\{\bar{\rho}(m), \bar{\rho}(M)\}.$$

В самом деле, из выражения

$$\bar{\rho}'(a) = \frac{3}{\sigma} \left(1 - \frac{2}{3} \theta\right) \frac{2a-1}{(1+a)^4}$$

видно, что при  $a = 0,5$  функция  $\bar{\rho}(a)$  имеет минимум, а максимум ее достигается либо на левом, либо на правом конце отрезка  $[m, M]$ .

Наша задача состоит в минимизации нормы разрешающего оператора. Для этого используем циклический набор параметров (см. п. 4):

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}, \tau_{n_0+k} = \tau_k, \tau_{2n_0+k} = \tau_k \text{ и т. д., } k = 1, \dots, n_0.$$

Параметры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$  выбираем так, чтобы

$$\|T_{n_0}\| = \left\| \prod_{j=1}^{n_0} S_j \right\| \leq \rho^* < 1,$$

где  $\rho^*$  не зависит от границ операторов  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ .

Из леммы 5 следует, что, если условие

$$3m \leq \sigma \tau_j \lambda_k \leq 3M \text{ или } m \leq a_{jk} \leq M, \quad a_{jk} = \sigma \tau_j \lambda_k / 3$$

выполнено хотя бы для одного  $j = j_0$  при любых  $\lambda_k \in [\delta_0, \Delta_0]$ , где  $\delta_0$  и  $\Delta_0$  — наименьшее и наибольшее собственные значения оператора  $\Lambda$ , то  $\|T_{n_0}\| \leq \rho^*$ , так как для всех остальных  $j \neq j_0$  будет, по крайней мере, выполнено неравенство  $\|S_j\| < 1$ , а  $\|S_{j_0}\| \leq \rho^*$ .

Отрезок  $[\delta_0, \Delta_0]$  покроем последовательностью интервалов  $(\xi_{(j-1)}, \xi_{(j)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_0$ , полагая  $\xi_{(0)} = \delta_0$ ,  $\xi_{(n_0-1)} < \Delta_0$ ,  $\xi_{(n_0)} \geq \Delta_0$ . Любое собственное значение  $\lambda_k$  принадлежит некоторому отрезку  $[\xi_{(j-1)}, \xi_{(j)}]$ , так что

$$\xi_{(j-1)} \leq \lambda_k \leq \xi_{(j)}$$

и  $\sigma \tau_j \xi_{(j-1)} \leq \sigma \tau_j \lambda_k \leq \sigma \tau_j \xi_{(j)}$ . Для определения  $\xi_{(j)}$  потребуем, чтобы выполнялись условия

$$3m = \sigma \tau_j \xi_{(j-1)}, \quad 3M = \sigma \tau_j \xi_{(j)}.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \xi_{(j)} &= q^{-1} \xi_{(j-1)} = q^{-j} \xi_{(0)} = \delta_0 q^{-j}, \quad q = m/M, \\ \tau_{j+1} &= q \tau_j, \quad \tau_1 = 3m / (\sigma \delta_0). \end{aligned}$$

Число итераций в одном цикле  $n_0$  определяется из условий (см. п. 4):

$$\frac{\ln(\Delta_0/\delta_0)}{\ln(1/q)} \leq n_0 < \frac{\ln(\Delta_0/\delta_0)}{\ln(1/q)} + 1.$$

При таком наборе параметров  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$

$$\|T_{n_0}\| \leq \rho^* < 1,$$

где  $\rho^*$  зависит только от  $m, M, \sigma$ .

Проводя  $k_0$  циклов итераций с набором параметров  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_0}$ , получаем

$$\|z^{n_0 k_0}\| \leq \|T_{n_0}\|^{k_0} \|z^0\| \leq (\rho^*)^{k_0} \|z^0\|.$$

Требование  $(\rho^*)^{k_0} < \varepsilon$  будет выполнено, если

$$k_0 \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho^*)}.$$

Для общего числа итераций получаем оценку

$$n(\varepsilon) = n_0 k_0 \approx \kappa_0 (\ln \varepsilon) \ln(\delta_0/\Delta_0), \quad \kappa_0 = (\ln q \ln \rho^*)^{-1}.$$

Постоянные  $m, M, \sigma$  следует выбрать из условия минимума коэффициента  $\kappa_0$ . Нетрудно показать, что для минимизации  $\kappa_0$  параметры  $M$  и  $m$  надо выбрать из условия

$$m(1+m)^{-3} = M(1+M)^{-3},$$

т. е.

$$M = 0,5 (\sqrt{(3+m)^2 + 4/m} - (3+m)),$$

а величину  $\sigma$  взять возможно меньшей, т. е.  $\sigma = 0,5$  при  $\theta = 1$  и  $\sigma = 13/18$  при  $\theta = 0$ . Минимум  $\kappa_0$  как функции  $m$  находится численно. При  $\theta = 1$  и  $\sigma = 0,5$  минимум  $\kappa_0$  достигается при  $m \approx 0,135$  и равен  $\kappa_0 \approx 2,272$ . Если  $\theta = 0$  и  $\sigma = 13/18$ , то  $m \approx 0,153$  и  $\kappa_0 \approx 0,820$ . Так как  $\ln(\Delta_0/\delta_0) = O(\ln(1/|h|))$ , то число итераций  $n(\varepsilon) \approx O(\ln(1/|h|) \ln(1/\varepsilon))$ .

## § 2. Теория итерационных двухслойных схем общего вида

1. Итерационная схема с чебышевским набором параметров\*). Пусть дано операторное уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где  $A$  — линейный оператор, заданный в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $f$  и  $u$  — заданный и искомый векторы из  $H$ .

Для приближенного решения уравнения (1) применяется двухслойная итерационная схема

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots \tag{2}$$

с произвольным начальным вектором  $y_0 \in H$ . Предполагается, что операторы  $A$  и  $B$  удовлетворяют требованиям

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* \geq \beta E, \quad \beta > 0, \tag{3}$$

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_2 \geq \gamma_1 > 0, \tag{4}$$

\*) В написании этого пункта принимал участие Е. С. Николаев.

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — постоянные энергетической эквивалентности операторов  $A$  и  $B$ .

Из (3) и (4) следует положительная определенность оператора  $A$ .

Всюду в этом параграфе будем считать, что оператор  $B$  не зависит от номера итерации  $k$ .

Изучение сходимости итераций по схеме (2) сводится к оценке при  $k \rightarrow \infty$  решения  $z_k = y_k - u$  однородного уравнения

$$B \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, z_0 = y_0 - u. \quad (5)$$

Неявная схема (2) эквивалентна явной схеме (см. гл. VI)

$$x_{k+1} = S_{k+1}x_k, \quad S_{k+1} = E - \tau_{k+1}C, \quad k = 0, 1, \dots, x_0 \in H, \quad (6)$$

где  $C$  — один из операторов

$$C = C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \quad \text{при} \quad x_k = A^{1/2}z_k \quad (7)$$

или

$$C = C_2 = B^{-1/2}AB^{-1/2} \quad \text{при} \quad x_k = B^{1/2}z_k. \quad (8)$$

Из (6) находим

$$x_n = \mathcal{P}_n(C)x_0, \quad \text{где} \quad \mathcal{P}_n(C) = \prod_{k=1}^n (E - \tau_k C), \quad (9)$$

$$\|x_n\| \leq \| \mathcal{P}_n(C) \| \|x_0\|, \quad (10)$$

где разрешающий оператор  $\mathcal{P}_n(C)$  есть операторный полином степени  $n$ .

В силу условий (3) и (4) оператор  $C$  — самосопряженный, с границами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$C = C^*, \quad \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E. \quad (11)$$

Поэтому норма операторного полинома  $\mathcal{P}_n(C)$  оценивается по формуле (см. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1]):

$$\| \mathcal{P}_n(C) \| \leq \max_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} | \mathcal{P}_n(t) |. \quad (12)$$

Параметры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  находятся из условия минимума  $\| \mathcal{P}_n(C) \|$  или  $\min_{\{\tau_j\}} \max_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} | \mathcal{P}_n(t) |$  и, как будет показано ниже,

выражаются через нули полиномов первого рода П. Л. Чебышева  $T_n(x)$ .

Нам понадобятся некоторые свойства полиномов П. Л. Чебышева (см. В. Л. Гончаров [1])

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

Для вычисления полиномов высоких степеней можно использовать рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Справедлива формула

$$2T_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n, \quad (13)$$

которая доопределяет  $T_n(x)$  при  $|x| > 1$ .

Корнями полинома  $T_n(x)$ , очевидно, являются числа

$$\lambda_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь полином  $\mathcal{P}_n(t)$ , заданный на промежутке  $\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2$  и нормированный так, что  $\mathcal{P}_n(0) = 1$ .

Таковыми свойствами обладает, например, полином

$$\mathcal{P}_n(t) = \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t), \quad t \in [\gamma_1, \gamma_2]. \quad (15)$$

Ставится задача — среди таких полиномов найти полином, наименее отклоняющийся от нуля на отрезке  $[\gamma_1, \gamma_2]$  (т. е. имеющий наименьший  $\max |\mathcal{P}_n(t)|$ ,  $t \in [\gamma_1, \gamma_2]$ ) и нормированный к 1 при  $t = 0$ . Линейная замена

$$t = 0,5((\gamma_2 - \gamma_1)x + \gamma_2 + \gamma_1)$$

позволяет свести эту задачу к построению полинома, наименее отклоняющегося от нуля в промежутке  $-1 \leq x \leq 1$  и принимающего значение 1 в точке  $x_0 = -(\gamma_2 + \gamma_1)/(\gamma_2 - \gamma_1) = -1/\rho_0$ , где  $\rho_0 = (1 - \xi)/(1 + \xi)$ ,  $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ .

Решением последней задачи (см. В. Л. Гончаров [1]) является полином

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{T_n(x_0)}, \quad |x| < 1,$$

где  $T_n(x)$  — полином П. Л. Чебышева первого рода. Максимум отклонения  $\tilde{T}_n(x)$  от нуля равен

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{|T_n(x_0)|}.$$

Подставляя сюда выражение (13) для  $T_n(x_0)$ , получаем

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| &= \frac{1}{|T_n(1/\rho_0)|} = \\ &= \frac{2}{(1/\rho_0 + \sqrt{1/\rho_0^2 - 1})^n + (1/\rho_0 - \sqrt{1/\rho_0^2 - 1})^n}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} \quad (16)$$

и преобразуем

$$\frac{1}{\rho_0} + \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} = \frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{2\sqrt{\xi}}{1-\xi} = \frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{1}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}} = \rho_1.$$

В результате получим

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}} = q_n.$$

Потребуем, чтобы полиномы (15) и  $\tilde{T}_n$  совпадали:

$$\mathcal{P}_n(t) = \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t) = \prod_{k=1}^n \left[ \left( 1 - \frac{\tau_k (\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \right) - \tau_k \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} x \right] = \frac{T_n(x)}{T_n(x_0)}. \quad (17)$$

Полином  $T_n(x)$  обращается в нуль при  $x = \lambda_k$ , где  $\lambda_k$  определяется по формуле (14). Из (17) следует

$$\frac{2}{(\gamma_2 - \gamma_1)\tau_k} - \frac{1}{\rho_0} = \lambda_k, \quad \text{т. е.} \quad \tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \lambda_k}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Тем самым доказана

**Теорема 1.** Пусть дан полином

$$\mathcal{P}_n(t) = \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t),$$

где  $t \in [\gamma_1, \gamma_2]$ ,  $\gamma_1 > 0$  и  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  — произвольные параметры.

Тогда  $\min_{\{\tau_k\}} \max_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} |\mathcal{P}_n(t)|$  достигается при следующих значениях параметров:

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \lambda_k}, \quad \lambda_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

При таком выборе  $\tau_k$  справедлива оценка

$$\max_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} |\mathcal{P}_n(t)| = q_n, \quad q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}. \quad (19)$$

Таким образом задача об отыскании  $\min_{\{\tau_k\}} \max_{t \in [\gamma_1, \gamma_2]} \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t)$

(задача о минимаксе) полностью решена.

Вернемся к схеме (2). Из теоремы 1 следует, что для нормы разрешающего оператора  $\mathcal{P}_n(C)$ , определяемого формулой (9), имеет место неравенство

$$\|\mathcal{P}_n(C)\| \leq q_n,$$

если параметры  $\{\tau_k\}$  выбраны согласно (18).

При этом справедлива оценка решения задачи (6)

$$\|x_n\| \leq q_n \|x_0\|,$$

которой соответствует следующая априорная оценка для решения задачи (5):

$$\|z_n\|_D \leq q_n \|z_0\|_D, \quad \text{где } D = A \text{ или } D = B.$$

Отсюда видно, что через  $n$  итераций начальная погрешность  $\|z_0\|_D$  уменьшится в  $1/q_n$  раз. Требование  $q_n < \varepsilon$  будет выполнено, если число итераций  $n \geq n(\varepsilon)$ , где

$$n(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_1)}.$$

При  $\xi \rightarrow 0$  получаем следующую оценку для числа итераций  $n(\varepsilon)$ , при котором  $q_n < \varepsilon$ :

$$n(\varepsilon) = O\left(\frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}\right).$$

Так, например, если рассматривается разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  на квадратной сетке,  $h_1 = h_2 = h$  (см. гл. IV, § 2), то

$$\xi = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \sqrt{\xi} = \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi h}{2}, \quad n(\varepsilon) = O\left(\frac{2 \ln(2/\varepsilon)}{\pi h}\right).$$

Схему (2) с указанной в (18) последовательностью параметров  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , часто называют *схемой Ричардсона*.

При исследовании сходимости итераций вместо неявной схемы (2) достаточно рассматривать явную схему

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Cx_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (20)$$

$x_0$  — произвольный вектор,

или

$$x_{k+1} = S_{k+1}x_k + \tau_{k+1}\varphi, \quad S_{k+1} = E - \tau_{k+1}C, \quad (20')$$

которая соответствует уравнению  $Cv = \varphi$ .

При изучении сходимости этой схемы с параметрами (18) мы предполагали, что вычислительный процесс является идеальным, т. е. вычисления ведутся с бесконечным числом знаков.



Однако на самом деле вычисления ведутся с конечным числом знаков и на каждом этапе вычислений появляются ошибки округления, которые приводят к неустойчивости при достаточно больших  $n = n(\epsilon, \rho_1)$  итерационной схемы с параметрами (18).

Неустойчивость схемы (2) с параметрами (18) можно проиллюстрировать на следующем простом примере, сосчитанном на машине БЭСМ-4 (расчеты проведены Д. А. Гольдиной).

Пример. Требуется решить систему разностных уравнений

$$v(x_{i-1}) - 2v(x_i) + v(x_{i+1}) = 0, \quad x_i = ih, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ v(0) = 1, \quad v(1) = 0, \quad h = 1/N.$$

В этом случае  $Cy = -y_{xx}$ ,  $\gamma_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} \geq 8$ ,  $\gamma_2 = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}$ ,

$\xi = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}$ . Возьмем 20 уравнений ( $N = 20$ ) и положим  $\epsilon = 10^{-4}$ .

Теоретическая оценка показывает, что для получения решения задачи с точностью  $\epsilon$  достаточно взять  $n \geq n(\epsilon)$ , где  $n(\epsilon) = (\ln(2/\epsilon)) / (\ln \rho_1^{-1}) \geq 63$ . Параметры  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  выбираем по формуле (18) при  $n = 64$ .

Результаты вычислений на БЭСМ-4 даны в таблице 1. В первой строке указан номер итерации  $k$ , во второй строке — величина

$$\Delta_k = \|y_k - y_{k-1}\|_C = \max_{0 \leq x_i \leq 1} |y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i)|.$$

Итерационный процесс расходится, и при  $k = 64$  наступает аварийный останов машины.

Т а б л и ц а 1

$k$	53	54	55	56	57	58
$\Delta_k$	0,12	1,5	27	$6,3 \cdot 10^2$	$1,9 \cdot 10^4$	$7,2 \cdot 10^5$
$k$	59	60	61	62	63	
$\Delta_k$	$3,7 \cdot 10^7$	$2,6 \cdot 10^9$	$2,5 \cdot 10^{11}$	$3,3 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{15}$	

Если брать параметры  $\tau_k$  в обратном порядке, т. е. положить в формуле (18)  $\lambda_k = -\cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , то неустойчивость итерационной схемы выражена более сильно и аварийный останов наступает при  $k = 12$  (см. таблицу 2).

Таблица 2

$k$	1	2	3	4	5	6
$\Delta_k$	39,6	$2,6 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^5$	$8,2 \cdot 10^6$	$3,7 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^{10}$
$k$	7	8	9	10	11	
$\Delta_k$	$3,3 \cdot 10^{11}$	$7 \cdot 10^{12}$	$1,2 \cdot 10^{14}$	$1,7 \cdot 10^{15}$	$1,9 \cdot 10^{16}$	

Ошибки округления можно трактовать как возмущение правой части уравнения  $Sv = \varphi$  на каждом шаге. Итерационная схема (2) с параметрами (18) неустойчива по правой части. Причиной неустойчивости является тот факт, что норма оператора  $S_k = E - \tau_k C$  — оператора перехода от  $(k-1)$ -й итерации к  $k$ -й итерации, при отрицательных  $\lambda_k$  может быть больше единицы, так как

$$\|S_k\| = \frac{\rho_0(1 + |\lambda_k|)}{1 - \rho_0|\lambda_k|} \quad \text{при } \lambda_k < 0$$

и

$$\|S_k\| > 1, \quad \text{если } \rho_0(1 + 2|\lambda_k|) > 1.$$

В то же время

$$\|S_k\| = \frac{\rho_0(1 + \lambda_k)}{1 + \rho_0\lambda_k} < 1 \quad \text{при } \lambda_k > 0.$$

Установим эти формулы. Так как  $S_k = S_k^*$ , то  $\|S_k\| = \sup_{\|x\|=1} |(S_k x, x)|$ . Учитывая, что  $\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E$ , найдем

$$(\tau_k \gamma_1 - 1)E \leq \tau_k C - E \leq (\tau_k \gamma_2 - 1)E.$$

Подставим сюда  $\tau_k = \tau_0/(1 + \rho_0\lambda_k)$  и учтем, что  $\tau_0\gamma_1 = 1 - \rho_0$ ,  $\tau_0\gamma_2 = 1 + \rho_0$ . Тогда получим  $\tau_k\gamma_1 - 1 = -\rho_0(1 + \lambda_k)/(1 + \rho_0\lambda_k)$ ,  $\tau_k\gamma_2 - 1 = \rho_0(1 - \lambda_k)/(1 + \rho_0\lambda_k)$ . Отсюда видно, что  $\|S_k\| = \tau_k\gamma_2 - 1$  при  $\lambda_k < 0$ ,  $\|S_k\| = 1 - \tau_k\gamma_1$  при  $\lambda_k > 0$ . Если  $\lambda_k < 0$  и  $k \geq k_0$ , где  $k_0$  — наименьшее число, для которого  $\lambda_{k_0} < 0$ , и выполняется условие  $\rho_0(1 + 2|\lambda_{k_0}|) > 1$ , то  $\|S_{k+1}\| > \|S_k\| > 1$ . Поэтому

$\prod_{j=k_0}^n \|S_j\| > \|S_{k_0}\|^{n-k_0} > 1$  и погрешность округления, появившаяся при определении  $y_{k_0}$ , будет увеличиваться с ростом  $k$  от  $k_0$  до  $n$ . Пусть  $\xi = \gamma_1/\gamma_2 \ll 1$ , так что  $\rho_0 = 1 - 2\xi + O(\xi^2)$  и  $\lambda_{k_1} = \cos \frac{2k_1 - 1}{2n} \pi < 0$ ,

$$\|S_{k_1}\| = \frac{\rho_0(1 + |\lambda_{k_1}|)}{1 - \rho_0|\lambda_{k_1}|} = \frac{1 + |\lambda_{k_1}|}{1 - |\lambda_{k_1}|} \left( 1 - 2\xi \left( 1 + \frac{1}{1 - |\lambda_{k_1}|} \right) \right) + O(\xi^2).$$

Предположим, что  $|\lambda_{k_1}| > 0,5$ , а  $\xi < 0,01$ . Тогда  $\|S_{k_1}\| = 3(1 - 6\xi) + O(\xi^2) > 3 \cdot 0,9 = 2,7$  и  $\prod_{j=k_1}^n \|S_j\| > 2,7^{n-k_1}$ .

Теорема 1 фактически выражает устойчивость схемы (2) по начальным данным. В случае реального вычислительного процесса, как показывают приведенные выше примеры, необходимо исследовать устойчивость итерационной схемы по правой части, а также устойчивость по начальным данным при переходе от  $x_0$  к  $x_k$  для любого  $k = 1, 2, \dots, n$ . Как было показано в гл. V, § 2, устойчивость по правой части есть следствие равномерной устойчивости по начальным данным, т. е. устойчивости при переходе от любого  $x_j$  к любому  $x_k$ , где  $k > j > 0$ .

Требование равномерной устойчивости по начальным данным гарантирует вычислительную устойчивость итерационной схемы. Поясним это утверждение. В результате ошибок округления находится не решение задачи (20'), а решение  $\tilde{x}_k$  задачи  $\tilde{x}_{k+1} = S_{k+1}\tilde{x}_k + \tau_{k+1}\tilde{\varphi}_k + \zeta_k$ ,  $k \geq 0$ . Чтобы оценить величину погрешности вычислений  $\tilde{x}_k - x_k$ , надо найти оценку решения задачи

$$z_{k+1} = S_{k+1}z_k + \tau_{k+1}\psi_k + \zeta_k, \quad z_0 = \tilde{x}_0 - x_0 \quad (21)$$

через  $z_0$ ,  $\psi_k$ ,  $\zeta_k$ . Из (21) следует (см. гл. V, § 2)

$$z_k = T_{k,0}z_0 + \sum_{j=1}^k \tau_j T_{k,j} \psi_{j-1} + \sum_{j=1}^k T_{k,j} \zeta_{j-1},$$

$$\|z_k\| \leq \|T_{k,0}\| \|z_0\| + \sum_{j=1}^k \tau_j \|T_{k,j}\| \|\psi\| + \sum_{j=1}^k \|T_{k,j}\| \|\zeta\|, \quad (22)$$

$$T_{k,j} = \prod_{i=j+1}^k S_i, \quad T_{k,k} = E, \quad \|\psi\| = \max_{0 \leq j < n} \|\psi_j\|,$$

где

$$\|\zeta\| = \max_{0 \leq j < n} \|\zeta_j\|.$$

Достаточно убедиться в том, что величины  $\|T_{k,0}\|$ ,  $\sum_{j=1}^k \tau_j \|T_{k,j}\|$ ,

$\sum_{j=1}^k \|T_{k,j}\|$  ограничены для всех  $k \leq n$ . Заметим, что уравнение  $Sv = \varphi$  устойчиво по правой части с константой  $1/\gamma_1$ ;  $\|v\| \leq \|\varphi\|/\gamma_1$ . Предполагая, что  $\zeta_j \equiv 0$ , получим

$$\|z_n\| \leq \|T_{n,0}\| \|z_0\| + Q_n \|\psi\|,$$

где

$$Q_n = \sum_{j=1}^n \tau_j \|T_{n,j}\| = \tau_1 \|S_2 \dots S_n\| + \tau_2 \|S_3 \dots S_n\| + \dots + \tau_{n-1} \|S_n\| + \tau_n.$$

Потребуем, чтобы  $Q_n < 1/\gamma_1$ , т. е.

$$\|z_n\| \leq q_n \|z_0\| + \|\psi\|/\gamma_1,$$

и покажем, что это требование позволяет упорядочить множество параметров  $\{\tau_k\}$  таким образом, что полученный итерационный процесс будет устойчив по отношению к ошибкам округления. Опишем сначала «устойчивый набор» параметров  $\{\tau_k\}$ , а затем покажем, что для него  $Q_n < 1/\gamma_1$ .

Параметры  $\tau_k$  будем определять по формуле

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\mu_k$  выбирается из множества нулей полинома Чебышева:

$$\mu_k \in \mathfrak{M}_n = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $n$  есть степень числа 2:

$$n = 2^p, \quad p > 0.$$

Основной принцип построения «устойчивой» последовательности параметров  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  в случае, когда  $n$  кратно 4,  $n = 4m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , состоит в выделении групп по 4 параметра  $(-\cos \beta, \cos \beta, -\sin \beta, \sin \beta)$ . Этой четверке параметров соответствует произведение (блок)

$$S_4(\beta) = S(-\mu)S(\mu)S(-\eta)S(\eta), \quad \mu = \cos \beta, \quad \eta = \sin \beta,$$

где

$$S(\mu) = E - \tau(\mu)C, \quad \tau(\mu) = \tau_0/(1 + \rho_0\mu).$$

Будем определять  $\mu_{4j+s}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$  по формулам

$$\mu_{4j+1} = -\cos \beta_{j+1}, \quad \mu_{4j+2} = \cos \beta_{j+1},$$

$$\mu_{4j+3} = -\sin \beta_{j+1}, \quad \mu_{4j+4} = \sin \beta_{j+1},$$

где  $j = 0, 1, 2, \dots, n/4 - 1$ . Последовательность  $\{\mu_k\}$  задана, если указаны  $n/4$  параметра  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n/4}$ .

При построении устойчивой последовательности  $\{\mu_k\}$  будем исходить из минимального

$$\beta_1 = \pi/(2n)$$

и рассмотрим последовательно множества из  $4 = 2^2$ ,  $8 = 2^3$ ,  $16 = 2^4$ , ...,  $2^k$  и т. д. параметров  $\{\mu_k\}$ . Эти множества строятся по рекуррентным формулам

$$M_4(\beta_1) = \{-\cos \beta_1, \cos \beta_1, -\sin \beta_1, \sin \beta_1\},$$

$$M_8(\beta_1) = M_4(\beta_1) \cup M_4(\pi/4 - \beta_1),$$

$$M_{16}(\beta_1) = M_8(\beta_1) \cup M_8(\pi/8 - \beta_1),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_{2^k}(\beta_1) = M_{2^{k-1}}(\beta_1) \cup M_{2^{k-1}}(\pi/2^{k-1} - \beta_1), \quad k = 3, 4, \dots, p-1.$$

Множество  $M_{2^k}(\beta_1)$ , очевидно, содержит все множества меньшего индекса. Полагая  $n = 2^p$ , получаем

$$M_{2^p}(\beta_1) = \mathfrak{M}_n\{\mu_k\}, \quad \beta_1 = \pi/(2n) = \pi/2^{p+1}.$$

Из формул для  $M_{2^k}(\beta_1)$  видно, что

$$\beta_{2i-1} + \beta_{2i} = \pi/4, \quad i = 1, 2, \dots, n/8.$$

Поэтому для задания последовательности  $M_{2^p}(\beta_1)$  достаточно указать лишь параметры  $\beta_j$  нечетного номера  $j = 2i - 1$ , всего  $n/8$  чисел.

Формулируем правило для вычисления  $\beta_{2k+1}$ . При определении  $\beta_{2k+1}$  для

$$2^{i-1} \leq k \leq 2^i$$

следует найти  $\beta_{2^{i+1}}$  по формуле

$$\beta_{2^{i+1}} = \pi/2^{i+2} - \beta_1,$$

после чего воспользоваться формулами для  $\beta_{2k+1}$  при  $k < 2^{i-1}$ , предварительно увеличив в этих формулах все индексы на одно и то же число, равное  $2^{i-1}$  (сдвиг индексов вправо на  $2^{i-1}$ ).

Таким образом, надо находить лишь  $\beta_k$  при  $k = 2^i + 1$  и пользоваться указанным только что правилом при переходе от  $i$  к  $i + 1$ .

Проиллюстрируем это правило. Итак, задано  $\beta_1$ . Полагая  $i = 1$ ,  $i = 2$ , найдем

$$\beta_3 = \beta_{2^{1+1}} = \pi/2^3 - \beta_1 = \pi/8 - \beta_1, \quad \beta_5 = \beta_{2^{2+1}} = \pi/2^4 - \beta_1 = \pi/16 - \beta_1.$$

Чтобы найти  $\beta_7 = \beta_{2^{2+3}}$ , возьмем формулу для  $\beta_3$  и увеличим входящие в нее индексы 3 и 1 на  $2^2 = 4$ :

$$\beta_7 = \pi/8 - \beta_5.$$

Далее, положим  $i = 3$  и определим

$$\beta_9 = \beta_{2^{i+1}} = \pi/2^5 - \beta_1 = \pi/32 - \beta_1.$$

Применяя затем правило сдвига на  $2^3 = 8$ , сразу напишем

$$\beta_{11} = \pi/8 - \beta_9, \quad \beta_{13} = \pi/16 - \beta_9, \quad \beta_{15} = \pi/8 - \beta_{13}$$

и т. д. Если, например,  $n = 64$ , то остается лишь найти четные  $\beta_{2i} = \pi/4 - \beta_{2i-1}$ .

Если  $n = 128 = 2^7$ , то нужно вычислить еще 8 параметров  $\beta_{2i+1}$  нечетных номеров.

Имеем

$$\beta_{17} = \beta_{2^{i+1}} = \pi/2^6 - \beta_1 = \pi/64 - \beta_1.$$

Правило сдвига индексов вправо на  $2^4 = 16$  дает:

$$\begin{aligned} \beta_{19} &= \pi/8 - \beta_{17}, & \beta_{21} &= \pi/16 - \beta_{17}, & \beta_{23} &= \pi/8 - \beta_{21}, & \beta_{25} &= \pi/32 - \beta_{17}, \\ \beta_{27} &= \pi/8 - \beta_{25}, & \beta_{29} &= \pi/16 - \beta_{25}, & \beta_{31} &= \pi/8 - \beta_{29}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к доказательству устойчивости схемы (2) с последовательностью  $M_{2^p}(\beta_1)$  параметров  $\{\mu_k\}$ .

Множеству  $M_{2^k}(\beta)$  соответствует произведение операторов

$$\begin{aligned} S_{2^k}(\beta) &= S_{2^{k-1}}(\beta) S_{2^{k-1}}(\pi/2^{k-1} - \beta), \quad k = 2, 3, \dots, p, \\ S_4(\beta) &= S_2(\beta) S_2(\pi/2 - \beta), \end{aligned}$$

где  $S_2(\beta) = S(-\cos \beta) S(\cos \beta)$ .

Нам понадобится норма произведения  $S_{2^k}(\beta)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Так как  $S_{2^k}(\beta)$  есть полином  $F_{2^k}(C, \beta)$  степени  $2^k$  относительно самосопряженного оператора  $C = C^*$ , то вычисление нормы

$$\rho_{2^k}(\beta) = \|S_{2^k}(\beta)\|$$

сводится к нахождению максимума полинома  $F_{2^k}(s, \beta)$ ,  $s \in [\gamma_1, \gamma_2]$ .

Найдем выражение для  $\rho_{2^k}(\beta)$ . Начнем с  $k = 1$ . Вводя обозначения  $\mu = \cos \beta$ ,  $a(\mu) = 1/(1 + \rho_0 \mu)$ ,  $b(\mu) = 1 - \rho_0^2 \mu^2 = 1/(a(-\mu)a(\mu))$ , получаем

$$\begin{aligned} F_2(s, \beta) &= (1 - \tau(-\mu)s)(1 - \tau(\mu)s) = \\ &= a(\mu)a(-\mu)(1 + \rho_0 \mu - \tau_0 s)(1 - \rho_0 \mu - \tau_0 s) = \\ &= ((1 - \tau_0 s)^2 - \rho_0^2 \mu^2)/(b(\mu)) = f_2(t_1, \beta), \end{aligned}$$

где

$$f_2(t_1, \beta) = a_2(\beta)(t_1 - \mu^2), \quad a_2(\beta) = \rho_0^2/b(\mu), \quad t_1 = (1 - \tau_0 s)^2/\rho_0^2.$$

Так как  $0 \leq |1 - \tau_0 s| \leq |1 - \tau_0 \gamma_1| = |1 - \tau_0 \gamma_2| = \rho_0$ , то  $t_1 \in [0, 1]$ . Аналогично находим  $F_2(s, \pi/2 - \beta) = f_2(t_1, \pi/2 - \beta) = \rho_0^2 (t_1 - \eta^2) / (b(\eta))$ ,  $\eta = \sin \beta$ , т. е.  $f_2(t_1, \pi/2 - \beta) = a_2(\pi/2 - \beta)(t_1 - \eta^2)$ .

Рассмотрим теперь  $f_{2^k}(t_k, \beta)$  при  $k = 2, 3, \dots$ :

$$f_4(t_2, \beta) = f_2(t_1, \beta) f_2(t_1, \pi/4 - \beta) = a_2(\beta) a_2(\pi/2 - \beta)(t_1 - \mu^2)(t_1 - \eta^2) = \\ = a_2(\beta) a_2(\pi/2 - \beta)(t_1^2 - t_1 + \mu^2 \eta^2) = -a_4(\beta)(t_2 - \sin^2 2\beta),$$

где

$$t_2 = 4t_1(1 - t_1) \in [0, 1], \quad a_4(\beta) = a_2(\beta) a_2(\pi/2 - \beta)/4.$$

Продолжая рассуждения, найдем

$$f_8(t_3, \beta) = f_{2^2}(t_3, \beta) = f_4(t_2, \beta) f_4(t_2, \pi/4 - \beta) = -a_8(\beta)(t_3 - \sin^2 4\beta),$$

$$t_3 = 4t_2(1 - t_2) \in [0, 1], \quad a_8(\beta) = a_4(\beta) a_4(\pi/4 - \beta)/4,$$

.....

$$f_{2^k}(t_k, \beta) = f_{2^{k-1}}(t_{k-1}, \beta) f_{2^{k-1}}(t_{k-1}, \pi/2^{k-1} - \beta) = \\ = -a_{2^k}(\beta)(t_k - \sin^2 2^{k-1}\beta),$$

где

$$a_{2^k}(\beta) = a_{2^{k-1}}(\beta) a_{2^{k-1}}(\pi/2^{k-1} - \beta)/4, \quad t_k = 4t_{k-1}(1 - t_{k-1}) \in [0, 1].$$

Покажем, что верна формула

$$a_{2^k}(\beta) = \frac{2q_{2^k}}{1 - q_{2^k} \cos 2^k \beta}, \quad \text{где} \quad q_m = \frac{2\rho_1^m}{1 + \rho_1^{2m}}.$$

При  $k = 1$  имеем  $a_2(\beta) = \rho_0^2 / (1 - \rho_0^2 \mu^2)$ . Подставим сюда  $\rho_0 = 2\rho_1 / (1 + \rho_1^2)$ :

$$a_2(\beta) = \frac{4\rho_1^2}{(1 + \rho_1^2)^2 - 4\rho_1^2 \mu^2} = \frac{4\rho_1^2}{1 + \rho_1^4 - 2\rho_1^2 \cos 2\beta} = \frac{2q_2}{1 - q_2 \cos 2\beta}.$$

Пусть формула для  $a_{2^k}$  верна при  $k = k'$ . Покажем, что она верна и для  $k = k' + 1$ . Обозначая  $m = 2^k$ , получим

$$a_{2m}(\beta) = \frac{1}{4} a_m(\beta) a_m\left(\frac{\pi}{m} - \beta\right) = \frac{q_m^2}{1 - q_m^2 \cos^2 m\beta} = \\ = \frac{4\rho_1^{2m}}{(1 + \rho_1^{2m})^2 - 4\rho_1^{2m} \cos^2 m\beta} = \frac{4\rho_1^{2m}}{1 + \rho_1^{4m} - 2\rho_1^{2m} (2 \cos^2 m\beta - 1)} = \frac{2q_{2m}}{1 - q_{2m} \cos 2m\beta},$$

что и требовалось доказать.

Учитывая затем, что

$$\max_{t \in [0, 1]} |t - a^2| = \begin{cases} a^2 & \text{при } a^2 \geq 0,5, \\ 1 - a^2 & \text{при } a^2 \leq 0,5, \end{cases}$$

находим искомую норму

$$\rho_{2^k}(\beta) \leq a_{2^k}(\beta) \max_{t_k \in [0, 1]} |t_k - \sin^2 2^{k-1}\beta| = a_{2^k}(\beta) \kappa_k(\beta),$$

где

$$\kappa_k(\beta) = \begin{cases} \cos^2 2^{k-1}\beta & \text{при } 2^{k-1}\beta \leq \pi/4, \\ \sin^2 2^{k-1}\beta & \text{при } 2^{k-1}\beta \geq \pi/4. \end{cases}$$

Перейдем к оценке  $Q_n$ , предполагая, что  $n = 2^p$ . Нам понадобится величина  $\sigma_{2^k}(\beta)$ , определяемая по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_2(\beta) &= a_2(\beta) \sin^2 \beta, & a_2(\beta) &= \rho_0^2 / (1 - \rho_0^2 \mu_2^2), & \mu_2 &= \cos \beta, \\ \sigma_4(\beta) &= \sigma_2(\beta) \sigma_2(\pi/2 - \beta), & \sigma_8(\beta) &= \sigma_4(\beta) \sigma_4(\pi/4 - \beta), & \dots \\ \dots, & \sigma_{2^k}(\beta) &= \sigma_{2^{k-1}}(\beta) \sigma_{2^{k-1}}(\pi/2^{k-1} - \beta), & & k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы для  $a_{2^k}(\beta)$  видно, что

$$\sigma_{2^k}(\beta) = a_{2^k}(\beta) \sin^2 2^{k-1}\beta < 1, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Сравнивая формулы для  $\rho_{2^k}(\beta)$  и  $\sigma_{2^k}(\beta)$ , видим, что  $\rho_{2^k}(\beta) = \sigma_{2^k}(\beta)$ , если  $2^{k-1}\beta \geq \pi/4$ .

Рассмотрим сначала выражение

$$\begin{aligned} A_2(\beta_1) &= \tau_1 \|S_2\| + \tau_2 = \frac{\tau_0 \rho_0 (1 + \mu_2)}{1 - \rho_0^2 \mu_2^2} + \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_2} = \\ &= \tau_0 (1 + \rho_0) / b_2 = (1 - \sigma_2(\beta_1)) / \gamma_1, \end{aligned}$$

так как  $\tau_0 = (1 - \rho_0) / \gamma_1$ .

Аналогично найдем

$$A_2(\pi/2 - \beta_1) = \frac{1}{\gamma_1} (1 - \sigma_2(\pi/2 - \beta_1)).$$

Учитывая, что  $2^{k-1}\beta_1 \leq \pi/4$  при  $k \leq p$  и

$$2^{k-1} \left( \frac{\pi}{2^k} - \beta_1 \right) = \frac{\pi}{2} - 2^{k-1}\beta_1 \geq \frac{\pi}{4},$$

получим

$$\rho_{2^k} \left( \frac{\pi}{2^k} - \beta_1 \right) = \sigma_{2^k} \left( \frac{\pi}{2^k} - \beta_1 \right).$$



Поэтому для  $A_2(\beta_1)$ ,  $A_4(\beta_1)$ , ...,  $A_{2^k}(\beta_1)$ , ... последовательно получим

$$A_4(\beta_1) \leq A_2(\beta_1) \|S_3 S_4\| + \tau_3 \|S_4\| + \tau_4 \leq A_2(\beta_1) \rho_2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) + \\ + A_2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) \leq \frac{1}{\gamma_1} (1 - \sigma_2(\beta_1)) \sigma_2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) + \frac{1}{\gamma_1} \left(1 - \sigma_2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\right) = \\ = \frac{1}{\gamma_1} (1 - \sigma_4(\beta_1)),$$

$$A_8(\beta_1) \leq A_4(\beta_1) \|S_5 S_6 S_7 S_8\| + \tau_5 \|S_6 S_7 S_8\| + \\ + \tau_6 \|S_7 S_8\| + \tau_7 \|S_8\| + \tau_8 \leq A_4(\beta_1) \rho_4 (\pi/4 - \beta_1) + \\ + A_4(\pi/4 - \beta_1) \leq (1 - \sigma_4(\beta_1)) \sigma_4(\pi/4 - \beta_1) / \gamma_1 + \\ + (1 - \sigma_4(\pi/4 - \beta_1)) / \gamma_1 = (1 - \sigma_8(\beta_1)) / \gamma_1$$

и, наконец,

$$A_{2^k}(\beta_1) \leq A_{2^{k-1}}(\beta_1) \rho_{2^{k-1}} \left(\frac{\pi}{2^{k-1}} - \beta_1\right) + A_{2^{k-1}}\left(\frac{\pi}{2^{k-1}} - \beta_1\right) \leq \frac{1 - \sigma_{2^k}(\beta_1)}{\gamma_1}.$$

Полагая  $k = p$ , получаем

$$Q_n = \sum_{j=1}^n \tau_j \|T_{n,j}\| \leq \frac{1 - \sigma_n(\beta_1)}{\gamma_1} = \frac{1 - q_n}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_1}.$$

Полагая теперь в (21)  $z_0 = 0$ ,  $\psi_k \equiv 0$ , получим  $\|z_n\| \leq \sum_{j=1}^n \|T_{n,j}\| \|\xi\|$ . Применяя развитые выше методы, можно показать, что

$$\sum_{j=1}^n \|T_{n,j}\| \leq \frac{e}{1 - \rho_1} \leq \frac{e}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Таким образом, для решения задачи (21) верна оценка

$$\|z_n\| \leq q_n \|z_0\| + \frac{1}{\gamma_1} \|\psi\| + \frac{e}{\sqrt{\xi}} \|\xi\|, \quad \mu_k \in M_{2^p}(\beta_1).$$

Приведем некоторые результаты расчета по явной схеме с параметрами  $\tau_k = \tau_0 / (1 + \rho_0 \mu_k)$ , где  $\{\mu_k\}$  — «устойчивый» набор. Рассматривается тот же пример:

$$v(x_{i-1}) - 2v(x_i) + v(x_{i+1}) = 0, \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ h = 1/N, \quad v(0) = 1, \quad v(1) = 0.$$

Число уравнений  $N = 20$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $n = 64 = 2^6$ . В этом случае  $\beta_1 = \pi/128$ ,  $\beta_3 = 15\beta_1$ ,  $\beta_5 = 7\beta_1$ ,  $\beta_7 = 9\beta_1$ ,

$$\beta_9 = 3\beta_1, \quad \beta_{11} = 13\beta_1, \quad \beta_{13} = 5\beta_1, \quad \beta_{15} = 11\beta_1,$$

$$\beta_{2i} = 64\beta_1 - \beta_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Таблица 3

$k$	1	4	5	6	8	9	10	16	17	18	24
$\Delta_k$	39,6	4,7	7,4	3,2	1,1	6,7	3,2	0,2	3,1	1,5	0,1
$k$	25	26	32	33	34	48	49	50	56		
$\Delta_k$	0,8	0,1	0,04	0,3	0,14	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$		
$k$	57	58	59	60	61	62					
$\Delta_k$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-5}$					

Из этой таблицы виден немонотонный характер сходимости итераций. При переходе от итерации номера  $k = 4j$  к итерации номера  $k + 1 = 4j + 1$  погрешность  $\Delta_k = \|y_k - y_{k-1}\|_C$  возрастает, а затем, при переходе к  $k = 4j + 2, 4j + 3, 4j + 4$  величина  $\Delta_k$  падает.

До сих пор мы рассматривали случай, когда  $n$  есть степень 2,  $n = 2^p$ . Однако можно указать устойчивые последовательности параметров  $\{\mu_k\}$  и в случае, когда  $n = j2^p$ , где  $j$  — нечетное число. При этом выбор параметров проводится из условия  $Q_n < 1/\gamma_1$ .

Укажем без доказательства устойчивые наборы  $\mathfrak{M}_{j2^p}$  для  $j = 3, 5, 7, 9, 11$ :

$$\mathfrak{M}_{3m} = M_{2m}(\beta_1) \cup M_m(3\beta_1), \quad m = 2^p, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{j2^{p+1}},$$

$$\mathfrak{M}_{5m} = M_{2m}(\beta_1) \cup M_{2m}(3\beta_1) \cup M_m(5\beta_1),$$

$$\mathfrak{M}_{7m} = M_{2m}(\beta_1) \cup M_{2m}(5\beta_1) \cup M_{2m}(3\beta_1) \cup M_m(7\beta_1),$$

$$\mathfrak{M}_{9m} = M_{2m}(\beta_1) \cup M_{2m}(7\beta_1) \cup M_{2m}(5\beta_1) \cup M_{2m}(3\beta_1) \cup M_m(9\beta_1),$$

$$\mathfrak{M}_{11m} = M_{2m}(\beta_1) \cup M_{2m}(9\beta_1) \cup M_{2m}(7\beta_1) \cup M_{2m}(3\beta_1) \cup M_{2m}(5\beta_1) \cup M_m(11\beta_1)$$

При больших  $n \geq n(\epsilon)$  пользоваться только набором  $M_{2^p}(\beta_1)$ , где  $\bar{n} = 2^p > n$ ,  $\beta_1 = \pi/(2\bar{n})$ , не всегда удобно, так как это может приводить к значительному увеличению объема работы. Пусть, например, оценка дает, что  $140 < n(\epsilon) \leq 141$ . Тогда  $n_1 = 2^7 = 128$  мало, а  $n_2 = 2^8 = 256$  велико. Найдем ближайшее к  $n$  число вида  $j2^k > n$ . При  $j = 9$  и  $k = 4$  имеем  $j2^k = 144 > n$ . Набор  $\mathfrak{M}_{9 \cdot 2^4}(\beta_1)$ , где  $\beta_1 = \pi/288$ , устойчив и обеспечивает сходимость итераций с заданной точностью.

При выборе различных комбинаций параметров следует проверять устойчивость получающихся схем путем оценки  $Q_n$  указанным выше методом \*).

**2. Основная теорема для стационарных схем.** Схемы с постоянными  $B$  и  $\tau$

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, y_0 \in H \quad (23)$$

обычно называют *стационарными*. Для  $z_k = y_k - u$  получаем однородное уравнение (5) с  $\tau_{k+1} = \tau$  и операторами  $A, B$ , для которых выполнены условия (3), (4). Оно эквивалентно явной схеме

$$x_{k+1} = Sx_k, \quad S = E - \tau C, \quad k = 0, 1, \dots, x_0 \in H \quad (24)$$

с оператором  $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ ,  $x_k = A^{1/2}y_k$ , или  $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ ,  $x_k = B^{1/2}y_k$ .

В этом случае  $T_n = S^n$ , где  $S$  — постоянный самосопряженный (так как  $C = C^*$ ) оператор и, следовательно,

$$\|T_n\| = \|S^n\| = \|S\|^n.$$

Задача об отыскании  $\inf \|T_n\|$  сводится к задаче об отыскании нижней грани нормы оператора перехода  $S$ . Эта задача хорошо известна и для конечномерного случая решена в § 1 (лемма 1). В произвольном гильбертовом пространстве имеет место аналогичная

**Теорема 2.** Пусть  $S = E - \tau C$  и выполнены условия

$$C = C^*, \quad \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0.$$

Тогда  $\|S\| < 1$  при  $0 < \tau < 2/\gamma_2$ , а  $\inf_{\tau} \|S\|$  достигается при  $\tau = \tau_0$ :

$$\inf_{\tau} \|E - \tau C\| = \|E - \tau_0 C\| = \rho_0,$$

где

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

**Доказательство.** Так как  $S$  самосопряженный оператор, то

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} |(Sx, x)|,$$

\*) Вопрос о вычислительной устойчивости схемы (20) исследован также в работе В. И. Лебедева и С. А. Финогенова [1], где предложен устойчивый набор  $M_{2,p}(\beta_1)$  параметров  $\{\mu_k\}$  и дано его обоснование методами, отличными от изложенных выше. (Добавлено при корректуре.)

где

$$(Sx, x) = \|x\|^2 - \tau(Cx, x) = 1 - \tau(Cx, x).$$

Учитывая, что  $\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E$ , получаем:

$$1 - \tau\gamma_2 \leq (Sx, x) \leq 1 - \tau\gamma_1$$

и, следовательно,

$$\|S\| = \max(|1 - \tau\gamma_1|, |1 - \tau\gamma_2|).$$

Функция  $f(\tau) = \max(|1 - \tau\gamma_1|, |1 - \tau\gamma_2|)$ , как было показано в § 1, достигает минимума при  $\tau = \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$  и равна  $f(\tau_0) = \rho_0$ , т. е.

$$\inf_{\tau} \|S\| = \|S(\tau_0)\| = \rho_0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Для схемы (23) при оптимальном значении параметра  $\tau = \tau_0$  верны оценки

$$\|y_n - u\|_D \leq \rho_0^n \|y_0 - u\|_D, \quad D = A \quad \text{или} \quad D = B.$$

Замечание 1. Теорема 2 следует из теоремы 1, если положить  $n = 1$ . При этом  $\tau = \tau_0$  и

$$q_1 = \frac{2\rho_1}{1 + \rho_1^2} = \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Замечание 2. Теорема 2 следует из необходимого и достаточного условия  $\rho$ -устойчивости схемы (24) (см. гл. VI, § 1):

$$\frac{1 - \rho}{\tau} E \leq C \leq \frac{1 + \rho}{\tau} E$$

и условия ограниченности  $C$ ,

$$\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E.$$

В самом деле, из равенств  $\frac{1 - \rho}{\tau} = \gamma_1$ ,  $\frac{1 + \rho}{\tau} = \gamma_2$  сразу получаем  $\tau = \tau_0$  и  $\rho = \rho_0$ .

Для выбора оптимального итерационного параметра  $\tau = \tau_0$  и вычисления  $\min_{\tau} \|S\| = \rho_0$  достаточно знать постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  эквивалентности операторов  $A$  и  $B$  (т. е. границы оператора  $C$ ). Поэтому отыскание  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  при заданных  $A$  и  $B$  является основной задачей теории. В следующих двух пунктах приведены примеры нахождения  $\inf \|S\|$  — нижней грани нормы оператора перехода для операторов специального вида.

**3. Вычисление нормы оператора перехода двухслойной схемы с весами.** Рассмотрим оператор

$$S = (E + \omega A)^{-1} (E - \omega A), \quad A = A^* > 0, \quad (25)$$

где  $\omega = \text{const} > 0$ . Это оператор перехода схемы  $(E + \omega A)z_{k+1} = (E - \omega A)z_k$ . Требуется найти оптимальное значение  $\omega = \omega_0$  из условия  $\inf_{\omega} \|S\|$ . Представим  $S$  в виде

$$S = E - 2\omega A(E + \omega A)^{-1} = E - \tau C,$$

где  $\tau = 2\omega$ ,  $C = (A^{-1} + \omega E)^{-1}$ .

Найдем границы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  оператора  $C$  или границы  $1/\gamma_2$  и  $1/\gamma_1$  оператора  $C^{-1}$ . Будем предполагать, что

$$A = A^*, \delta E \leq A \leq \Delta E, \delta > 0. \quad (26)$$

Так как  $\Delta^{-1}E \leq A^{-1} \leq \delta^{-1}E$ , то

$$(\Delta^{-1} + \omega)E \leq C^{-1} = A^{-1} + \omega E \leq (\delta^{-1} + \omega)E,$$

так что

$$\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 = \delta/(1 + \omega\delta), \quad \gamma_2 = \Delta/(1 + \omega\Delta). \quad (27)$$

Воспользуемся теперь формулой  $\tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$  или

$$2\omega_0(\gamma_1 + \gamma_2) = 2, \quad \omega_0 \left( \frac{\delta}{1 + \omega_0\delta} + \frac{\Delta}{1 + \omega_0\Delta} \right) = 1, \quad \omega_0^2 \delta\Delta = 1,$$

т. е.  $\omega_0 = 1/\sqrt{\delta\Delta}$ ,  $\tau_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$ . Подставляя это значение  $\omega$  в (27), находим

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta},$$

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\delta}{\Delta\sqrt{\eta}} = \sqrt{\eta}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}.$$

Таким образом

$$\inf_{\omega} \|S\| = \inf_{\omega} \|(E + \omega A)^{-1}(E - \omega A)\| = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta\Delta}}. \quad (28)$$

Тот же результат можно получить, если записать схему  $z_{k+1} = Sz_k$  с оператором перехода (25) в канонической форме

$$B \frac{z_{k+1} - z_k}{2\omega} + Az_k = 0, \quad B = E + \omega A.$$

Отсюда и из (26) сразу находим

$$(\Delta^{-1} + \omega)A \leq B \leq (\delta^{-1} + \omega)A,$$

т. е.  $\gamma_1 = \delta/(1 + \omega\delta)$ ,  $\gamma_2 = \Delta/(1 + \omega\Delta)$ . Дальнейшие рассуждения, приводящие к (28), остаются без изменения.

**4. Неявный метод переменных направлений для случая непостоянных операторов.** Перейдем ко второму, более сложному примеру применения теоремы 2. Пусть

$$A = A_1 + A_2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — самосопряженные и неперестановочные операторы с границами  $\delta_1, \Delta_1$  и  $\delta_2, \Delta_2$ :

$$A_\alpha = A_\alpha^*, \delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \alpha = 1, 2. \quad (29)$$

Для решения уравнения (1) в этом случае применяют двухпараметрическую схему переменных направлений

$$\left. \begin{aligned} (E + \omega_1 A_1) y_{k+1/2} &= (E - \omega_1 A_2) y_k + \omega_1 f, \quad k = 0, 1, \dots, \\ (E + \omega_2 A_2) y_{k+1} &= (E - \omega_2 A_1) y_{k+1/2} + \omega_2 f, \quad y_0 \in H. \end{aligned} \right\} \quad (29')$$

Для погрешности  $z_k = y_k - u$  получим однородные уравнения

$$\left. \begin{aligned} (E + \omega_1 A_1) z_{k+1/2} &= (E - \omega_1 A_2) z_k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ (E + \omega_2 A_2) z_{k+1} &= (E - \omega_2 A_1) z_{k+1/2}, \quad z_0 \in H. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Обозначая  $v_k = (E + \omega_2 A_2) z_k$ , после исключения  $z_{k+1/2}$  получим уравнение

$$v_{k+1} = S v_k, \quad S = S_1 S_2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad v_0 \in H \quad (31)$$

с оператором перехода

$$\left. \begin{aligned} S &= S_1 S_2, \\ S_1 &= (E + \omega_1 A_1)^{-1} (E - \omega_2 A_1), \\ S_2 &= (E + \omega_2 A_2)^{-1} (E - \omega_1 A_2). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \delta'_1 &= \delta_1 + c_0, \quad \Delta'_1 = \Delta_1 + c_0, \quad \delta'_2 = \delta_2 - c_0, \quad \Delta'_2 = \Delta_2 - c_0, \\ c_0 &= (\delta_2 \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1) / (\delta_1 + \delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (29), где

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0. \quad (34)$$

Тогда для оператора перехода (32) при значениях параметров

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0 c_0}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{1 - \omega_0 c_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta'_1 \Delta'_1}} = \frac{1}{\sqrt{\delta'_2 \Delta'_2}} \quad (35)$$

верна оценка

$$\|S\| \leq \bar{\rho}, \quad \bar{\rho} = \frac{1 - \sqrt{\eta'_1}}{1 + \sqrt{\eta'_1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\eta'_2}}{1 + \sqrt{\eta'_2}}, \quad \eta'_\alpha = \frac{\delta'_\alpha}{\Delta'_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (36)$$

т. е. для итерационной схемы (30) имеет место оценка

$$\|(E + \omega_2 A_2) z_n\| \leq \bar{\rho}^n \|(E + \omega_2 A_2) z_0\|.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что из условий (34) следует положительность величин  $\Delta'_\alpha$ ,  $\delta'_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Произведем преобразование

$$A'_1 = A_1 + c_0 E, \quad A'_2 = A_2 - c_0 E, \quad (37)$$

так что  $A_1 + A_2 = A'_1 + A'_2 = A$ ,  $\delta'_\alpha E \leq A'_\alpha \leq \Delta'_\alpha E$ .

Постоянная  $c_0$  выбирается из условия

$$\delta'_1 \Delta'_1 = \delta'_2 \Delta'_2.$$

В результате преобразования (37) оператор (32) принимает вид

$$S = S' = S'_1 S'_2, \quad S'_1 = (E + \omega'_1 A'_1)^{-1} (E - \omega'_2 A'_1), \\ S'_2 = (E + \omega'_2 A'_2)^{-1} (E - \omega'_1 A'_2),$$

где

$$\omega'_1 = \omega_1 / (1 - \omega_1 c_0), \quad \omega'_2 = \omega_2 / (1 + \omega_2 c_0). \quad (38)$$

Для определения  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  и оценки  $\|S\|$  представим схему  $v_{k+1} = S'_1 S'_2 v_k$  в виде последовательности двух схем

$$v_{k+1} = S'_1 v_{k+1/2}, \quad v_{k+1/2} = S'_2 v_k,$$

каждую из которых запишем в каноническом виде

$$B'_1 \frac{v_{k+1} - v_{k+1/2}}{\omega'_1 + \omega'_2} + A'_1 v_{k+1/2} = 0, \quad B'_1 = E + \omega'_1 A'_1, \\ B'_2 \frac{v_{k+1/2} - v_k}{\omega'_1 + \omega'_2} + A'_2 v_k = 0, \quad B'_2 = E + \omega'_2 A'_2.$$

Параметр  $\tau = \omega'_1 + \omega'_2$  для обеих схем один и тот же. Учитывая, что  $(1/\Delta'_\alpha + \omega'_\alpha) A'_\alpha \leq B'_\alpha \leq (1/\delta'_\alpha + \omega'_\alpha) A'_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , получаем неравенства

$$\gamma_{1, \alpha} B'_\alpha \leq A'_\alpha \leq \gamma_{2, \alpha} B'_\alpha,$$

где

$$\gamma_{1, \alpha} = \frac{\delta'_\alpha}{1 + \omega'_\alpha \delta'_\alpha}, \quad \gamma_{2, \alpha} = \frac{\Delta'_\alpha}{1 + \omega'_\alpha \Delta'_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Пользуясь формулой  $\tau(\gamma_1 + \gamma_2) = 2$ , по аналогии с предыдущим пунктом, находим

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta'_1 \Delta'_1}} = \frac{1}{\sqrt{\delta'_2 \Delta'_2}} = \omega_0, \quad (39)$$

$$\|S\| \leq \|S'_1\| \|S'_2\| \leq \frac{1 - \sqrt{\eta'_1}}{1 + \sqrt{\eta'_1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\eta'_2}}{1 + \sqrt{\eta'_2}} = \bar{\rho},$$

$$\eta'_\alpha = \delta'_\alpha / \Delta'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Из (38) и (39) следуют формулы (35) для итерационных параметров  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 остается справедливой, если вместо  $\delta_1 > 0$  потребовать

$$\delta_1 + \delta_2 > 0, \quad \delta_1 [1 + \delta_2 (1/\Delta_1 + 1/\Delta_2)] + \delta_2 \neq 0.$$

При этом возможен случай, когда  $\omega_1 < 0$ ,  $\omega_2 > 0$ .

Пр и м е р. В квадрате  $G = (0 \leq x_1, x_2 \leq 1)$  рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения

$$L_1 u + L_2 u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$u|_\Gamma = \mu(x), \quad 0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2,$$

где  $\Gamma$  — граница квадрата.

Пусть

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1 h, i_2 h) \in \bar{G}, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, \quad h = 1/N\}$$

— квадратная сетка с шагом  $h$ ,  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,

$$\Lambda_\alpha v = (a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad a_\alpha = 0,5(k + k^{(-1\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Сформулируем разностную задачу Дирихле:

$$\Lambda v = -f(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = \mu(x),$$

где  $\gamma_h$  — граница сетки.

Для решения этой задачи применим метод переменных направлений (29'), где формально положим  $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$ .

Пусть  $\hat{\Omega} = H$  — множество сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе  $\gamma_h$ .

Рассмотрим оператор

$$A v = -\Lambda v \quad \text{при } v \in \hat{\Omega},$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 v = -\Lambda_1 v, \quad A_2 v = -\Lambda_2 v \quad \text{при } v \in \hat{\Omega}.$$



Для погрешности  $z_k = y_k - v$ , где  $k$  — номер итерации, получаем задачу (30).

Операторы  $A_1$  и  $A_2$  неперестановочны и имеют границы

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta = \frac{8c_1}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2},$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = \frac{8c_2}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2},$$

так что

$$\eta = \frac{c_1}{c_2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Поэтому справедлива оценка (36), где

$$\bar{\rho} = \left( \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \right)^2.$$

Скорость сходимости итераций равна

$$\ln(1/\bar{\rho}) = 4\sqrt{\eta} + O(\eta), \quad \eta = \frac{c_1}{c_2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2} = O\left(\frac{c_1}{c_2} \frac{\pi^2 h^2}{4}\right),$$

число итераций при  $\eta \rightarrow 0$  есть

$$n(\varepsilon) = O\left(\frac{\ln(1/\varepsilon)}{4\sqrt{\eta}}\right) = O\left(\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\pi h}\right).$$

Обратимся снова к схеме (29'). Исключим из уравнений (30) величину  $z_{k+1/2}$ :

$$(E + \omega_1 A_1)(E + \omega_2 A_2) z_{k+1} = (E - \omega_2 A_1)(E - \omega_1 A_2) z_k.$$

Запишем эту схему в каноническом виде

$$\left. \begin{aligned} B \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + A z_k &= 0, \quad \tau = \omega_1 + \omega_2, \\ A &= A_1 + A_2, \quad B = (E + \omega_1 A_1)(E + \omega_2 A_2). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Если  $A_1$  и  $A_2$  неперестановочны, то  $B$  не является самосопряженным оператором и поэтому к (40) нельзя применить теорему 2.

*Лемма 1. Оператор (32) можно представить в виде*

$$S = E - \tau C, \quad \tau = \omega_1 + \omega_2, \quad C = (E + \omega_1 A_1)^{-1} A (E + \omega_2 A_2)^{-1}, \quad (41)$$

*причем  $C$  — положительно определенный оператор, удовлетворяющий условиям*

$$C \geq \frac{1 - \bar{\rho}}{\tau} E, \quad (42)$$

$$C^{-1} \geq \frac{\tau}{1 + \bar{\rho}} E \quad (\tau \|Cx\|^2 \leq (1 + \bar{\rho})(Cx, x)), \quad (43)$$

где  $\bar{\rho}$  дается формулой (36),  $\tau = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяются согласно (35).

**Доказательство.** Первое утверждение леммы доказывается непосредственным вычислением. Докажем второе утверждение. Согласно теореме 3,  $\|Sx\|^2 \leq \bar{\rho}^2 \|x\|^2$  для любого  $x \in H$ , т. е.

$$\|(E - \tau C)x\|^2 = \|x\|^2 - 2\tau(Cx, x) + \tau^2 \|Cx\|^2 \leq \bar{\rho}^2 \|x\|^2. \quad (44)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 0 &\geq \tau^2 \|Cx\|^2 - 2\tau(Cx, x) + (1 - \bar{\rho}^2) \|x\|^2 \geq \\ &\geq \tau^2 \|Cx\|^2 - 2\tau \|Cx\| \|x\| + (1 - \bar{\rho}^2) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Решая неравенство

$$\xi^2 - 2\xi + (1 - \bar{\rho}^2) \leq 0, \quad \xi = \tau \|Cx\| / \|x\|,$$

получаем  $1 - \bar{\rho} \leq \xi \leq 1 + \bar{\rho}$ , или

$$\frac{1 - \bar{\rho}}{\tau} \|x\| \leq \|Cx\| \leq \frac{1 + \bar{\rho}}{\tau} \|x\|.$$

Отсюда и из (44) следуют неравенства (42), (43).

**Замечание.** Если  $A_1$  и  $A_2$  перестановочны, то  $B = (E + \omega_1 A_1)(E + \omega_2 A_2)$  — самосопряженный оператор и из оценки  $\|S\| \leq \bar{\rho}$  следует

$$\frac{1 - \bar{\rho}}{\tau} B \leq A \leq \frac{1 + \bar{\rho}}{\tau} B,$$

где  $\bar{\rho}$  и  $\tau = \omega_1 + \omega_2$  даются теоремой 2.

Таким образом, нам в этом случае известны постоянные эквивалентности операторов  $A$  и  $B$ :

$$\gamma_1 = (1 - \bar{\rho})/\tau, \quad \gamma_2 = (1 + \bar{\rho})/\tau.$$

**5. Факторизованные итерационные схемы.** Оператор  $B$  в итерационной схеме естественно выбирать в некотором допустимом семействе операторов так, чтобы 1) отношение  $\xi = \gamma_1/\gamma_2$  было максимальным ( $\rho_0$  — минимальным), 2)  $B$  был экономичным оператором (число действий  $Q(\varepsilon)$  минимально в некотором смысле, например, по порядку относительно  $\xi$  при  $\xi \rightarrow 0$ ). При построении  $B$  обычно исходят из некоторого оператора  $R = R^* > 0$  (регуляризатора, ср. гл. VII, § 2), энергетически эквивалентного  $A$  и  $B$ :

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R, \quad c_2 \geq c_1 > 0, \quad (45)$$

$$\dot{\gamma}_1 B \leq R \leq \dot{\gamma}_2 B, \quad \dot{\gamma}_2 \geq \dot{\gamma}_1 > 0. \quad (46)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B \quad (47)$$

с постоянными

$$\gamma_1 = c_1 \overset{\circ}{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = c_2 \overset{\circ}{\gamma}_2. \quad (48)$$

Зная  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , можно пользоваться теоремой 2.

Оператор  $R$  выбирается обычно как регуляризатор для нестационарной задачи (задачи Коши) с тем же оператором  $A$ . Примеры выбора  $R$  демонстрировались в предыдущей главе.

Свойством экономичности обладает факторизованный оператор  $B = B_1 B_2$ , где  $B_1$  и  $B_2$  — экономичные операторы.

Предположим, что самосопряженный оператор  $R$  можно представить в виде суммы

$$R = R_1 + R_2.$$

Рассмотрим два случая:

1)  $R_1$  и  $R_2$  неперестановочны, но сопряжены друг другу (треугольные операторы):

$$R_2 = R_1^*,$$

так что

$$(R_1 x, x) = (R_2 x, x) = 0,5 (R x, x).$$

2)  $R_1$  и  $R_2$  самосопряженные и перестановочные операторы ( $R_1 R_2 = R_2 R_1$ ).

Каждый случай исследуем отдельно. Рассмотрим сначала факторизованный оператор с треугольными операторами  $R_1$  и  $R_2$ :

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad \text{где } R_2 = R_1^*, \quad (49)$$

$\omega > 0$  — параметр. Очевидно, что  $B = B^*$ .

Так как постоянные  $c_1$  и  $c_2$  обычно определяются при выборе регуляризатора  $R$ , то основной задачей является определение постоянных эквивалентности  $B$  и  $R$ , т. е.  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$ .

Будем предполагать, что оператор  $R$ , удовлетворяющий условиям (45), выбран и

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1 + R_2, \quad R_2 = R_1^*, \\ R &\geq \delta E, \quad \delta > 0, \quad \|R_2 x\|^2 \leq \frac{\Delta}{4} (R x, x) \quad \text{для всех } x \in H. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Нетрудно заметить, что  $\Delta \geq \|R\|$ .

*Лемма 2.* При любых  $\omega > 0$  и любых  $R > 0$  справедливо операторное неравенство

$$B \geq 2\omega R. \quad (51)$$

В самом деле  $(Bx, x) = ((E + \omega R_1)(E + \omega R_2)x, x) = \|(E + \omega R_2)x\|^2 = \|(E - \omega R_2)x\|^2 + 4\omega (R_2 x, x) = \|(E - \omega R_2)x\|^2 + 2\omega (R x, x) \geq 2\omega (R x, x)$  для любого  $x \in H$ .

Оценка (51) принадлежит Е. С. Николаеву.

*Лемма 3.* Пусть справедливы условия (50). Тогда выполняется операторное неравенство

$$B \leq (\delta^{-1} + \omega + \omega^2 \Delta/4) R. \quad (52)$$

Действительно,  $(Bx, x) = ((E + \omega R_1)(E + \omega R_2)x, x) = \|x\|^2 + \omega(Rx, x) + \omega^2(R_1 R_2 x, x) = \|x\|^2 + \omega(Rx, x) + \omega^2 \|R_2 x\|^2 \leq (\delta^{-1} + \omega + \omega^2 \Delta/4)(Rx, x)$ . Из (51) и (52) следует, что выполнены неравенства (46) с

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 = \frac{\delta}{1 + \omega\delta + \omega^2 \Delta\delta/4}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{1}{2\omega}. \quad (53)$$

Параметр  $\omega$  выберем из условия максимума отношения

$$f(\omega) = \frac{\overset{\circ}{\gamma}_1(\omega)}{\overset{\circ}{\gamma}_2(\omega)} = \frac{2\omega\delta}{1 + \omega\delta + \omega^2 \Delta\delta/4}.$$

Вычислим производную

$$f'(\omega) = 2\delta \frac{1 - \omega^2 \Delta/4}{(1 + \omega\delta + \omega^2 \Delta\delta/4)^2}.$$

Отсюда видно, что максимум  $f(\omega)$  достигается при

$$\omega = \omega_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}, \text{ или } \omega_0 = 2\sqrt{\eta}/\delta, \quad \eta = \delta/\Delta, \quad (54)$$

так как  $f''(\omega_0) \leq 0$ .

Найдем значение  $f(\omega)$  при  $\omega = \omega_0$ :

$$f(\omega_0) = \frac{\overset{\circ}{\gamma}_1}{\overset{\circ}{\gamma}_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}.$$

Подставляя  $\omega_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$  в (53), определим

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \quad \gamma_1 = \frac{\delta c_1}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta c_2}{4\sqrt{\eta}}. \quad (55)$$

Пусть  $c_1 = c_2 = 1$ , т. е.  $A = R$ . Тогда

$$\xi = \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}, \quad \rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + 3\sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}. \quad (56)$$

Для числа итераций при  $\eta \rightarrow 0$  получаем следующую оценку

$$n(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta}} \ln(1/\varepsilon)\right).$$

Таким образом, доказана

*Теорема 4.* Если выполнены условия (50), то итерационная схема (2) с  $A = R$  и факторизованным оператором

$B = (E + \omega_0 R_1)(E + \omega_0 R_2)$ ,  $\omega_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$  и  $\tau = \tau_0$  сходится в  $H_A$ , и  $H_B$ , так что

$$\|y_n - u\|_D \leq \rho^n \|y_0 - u\|_D, \quad D = A \text{ или } D = B,$$

где  $\rho$  вычисляется по формуле (56). Для числа итераций  $n(\epsilon)$  при  $\eta \rightarrow 0$  имеет место оценка  $n(\epsilon) = O\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta}} \ln(1/\epsilon)\right)$ .

Пример. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном квадрате. Оператор  $A$  равен

$$A = R = -\Delta, \quad \Delta y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad h_1 = h_2 = h.$$

На сетке  $\omega_h = \{(i_1 h, i_2 h), i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N\}$  введем скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y_{i_1 i_2} v_{i_1 i_2} h^2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

и определим операторы

$$R_1 y = \frac{y_{\bar{x}_1}}{h} + \frac{y_{\bar{x}_2}}{h}, \quad R_2 y = -\frac{y_{x_1}}{h} - \frac{y_{x_2}}{h}.$$

Пусть  $H = \bar{\Omega}$  — пространство сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и равных нулю на границе  $\gamma_h$ . Операторы  $R_1$  и  $R_2$  сопряжены в  $H$  друг другу, так как  $(y_{\bar{x}_\alpha}, v) = -(y, v_{x_\alpha})$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и  $R_1 + R_2 = A$ . Следовательно,  $(R_1 y, y) = (R_2 y, y) = 0,5(Ry, y)$ . Вычислим постоянные  $\delta$  и  $\Delta$ , входящие в условия (50). Так как  $R = -\Delta$ , то нижняя грань  $\delta$  есть наименьшее собственное значение,  $\delta = 8h^{-2} \sin^2(\pi h/2)$ . Далее,

$$\|R_2 y\|^2 = \left\| \sum_{\alpha=1}^2 y_{x_\alpha} / h \right\|^2 \leq \frac{2}{h^2} \sum_{\alpha=1}^2 \|y_{x_\alpha}\|^2 \leq \frac{2}{h^2} (Ry, y),$$

так как

$$(Ry, y) = \sum_{\alpha=1}^2 (1, y_{\bar{x}_\alpha}^2)_\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 [1, y_{x_\alpha}^2]$$

(см. гл. IV). Таким образом,  $\Delta = 8/h^2$ . Зная  $\delta$  и  $\Delta$ , находим

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} = \frac{h^2}{4 \sin^2(\pi h/2)}, \quad \sqrt{\eta} = \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}} = \sin(\pi h/2),$$

$$n(\epsilon) = O\left(\frac{1}{2\pi h} \ln(1/\epsilon)\right),$$

т. е. мы получаем ту же асимптотическую оценку для числа итераций, что и в случае неявного метода переменных направлений (п. 4).

Определение новых итераций из уравнения  $B_1 B_2 y = F$  сводится к последовательному решению «одномерных» уравнений вида  $B_\alpha v = \varphi_\alpha$ ,  $B_\alpha = E + \omega_0 R_\alpha$ . Заметим, что использование «треугольных» операторов  $R_1$  и  $R_2$  позволяет получать явные формулы (формулы бегущего счета) для определения  $v$ . В самом деле, уравнение

$$(E + \omega_0 R_1) v = \varphi_1, \quad R_1 v = \frac{v_{\bar{x}_1}}{h_1} + \frac{v_{\bar{x}_2}}{h_2}$$

имеет вид

$$\left(1 + \frac{\omega_0}{h_1^2} + \frac{\omega_0}{h_2^2}\right) v = \frac{\omega_0}{h_1^2} v^{(-1)_1} + \frac{\omega_0}{h_2^2} v^{(-1)_2} + \varphi_1,$$

откуда находим

$$v = \frac{\omega_0 h_1^{-2} v^{(-1)_1} + \omega_0 h_2^{-2} v^{(-1)_2} + \varphi_1}{1 + \omega_0 h_1^{-2} + \omega_0 h_2^{-2}}. \quad (57)$$

Выбираем левый нижний угол области и берем пограничный узел, такой, что  $x^{(-1)_1}$  и  $x^{(-1)_2}$  лежат на границе сетки  $\gamma_h$  и, следовательно,  $v^{(-1)_1}$  и  $v^{(-1)_2}$  известны. По формуле (57) определяем  $v$  и дальше движемся либо по строкам, либо по столбцам.

Аналогично убеждаемся, что из уравнения

$$(E + \omega_0 R_2) v = \varphi_2$$

значение  $v = v(x)$  выражается через  $v^{(+1)_1}$  и  $v^{(+1)_2}$ . Поэтому счет надо начинать с правого верхнего угла.

**6. Факторизованный оператор  $B$  с перестановочными операторами  $R_1$  и  $R_2$ .** Пусть  $R = R_1 + R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют тем же требованиям, что и операторы  $A_1$  и  $A_2$  в п. 4. Перечислим эти требования (см. теорему 3):

$$\left. \begin{aligned} R_\alpha &= R_\alpha^*, \quad \delta_\alpha E \leq R_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad \alpha = 1, 2, \\ \Delta_1 &> 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Кроме того, мы предполагаем, что операторы  $R_1$  и  $R_2$  перестановочны:

$$R_1 R_2 = R_2 R_1. \quad (59)$$

Рассмотрим схему (23) с факторизованным оператором

$$B = (E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2), \quad (60)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — вещественные параметры. Предполагается, что  $A$  и  $R$  связаны неравенствами

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R, \quad c_2 \geq c_1 > 0. \quad (61)$$

Наша задача — определить постоянные  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$ :

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 B \leq R \leq \overset{\circ}{\gamma}_2 B, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 \geq \overset{\circ}{\gamma}_1 > 0. \quad (62)$$

Для этого надо использовать результаты п. 4, где рассматривалась задача

$$(E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2) \frac{z_{k+1} - z_k}{\omega_1 + \omega_2} + R z_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad z_0 \in H \quad (63)$$

(схема (40) с  $A_\alpha = R_\alpha$ ). Оператор перехода для этой схемы представим в виде (32) (с заменой  $A_\alpha$  на  $R_\alpha$ ). Так как  $R_1$  и  $R_2$  самосопряжены и перестановочны, то  $B$  — самосопряженный оператор.

Используем теорему 3 для вычисления постоянных  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$  эквивалентности операторов  $B$  и  $R$ . Учитывая перестановочность операторов  $R_1$  и  $R_2$ , схему (63) можно записать в виде

$$z_{k+1} = S_1 S_2 z_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad S = S_1 S_2,$$

$$S_1 = (E + \omega_1 R_1)^{-1} (E - \omega_2 R_1), \quad S_2 = (E + \omega_2 R_2)^{-1} (E - \omega_1 R_2).$$

Из (58), в силу теоремы 3, следует оценка  $\|S\| \leq \bar{\rho}$  при  $\omega_1, \omega_2, \omega_0$ , выбранных согласно (35), эквивалентная неравенству

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 B \leq R \leq \overset{\circ}{\gamma}_2 B,$$

где  $\overset{\circ}{\gamma}_1 = (1 - \bar{\rho})/\tau$ ,  $\overset{\circ}{\gamma}_2 = (1 + \bar{\rho})/\tau$ ,  $\tau = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\bar{\rho}$  определяется по формуле (36). Так как константы  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$  вычислены, то к схеме (63) можно применить теорему 2. Тем самым доказана

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия (58), (59), (45). Тогда итерационная схема (23) с факторизованным оператором (60) при оптимальных значениях  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , определяемых по формулам (35), сходится со скоростью  $\ln(1/\rho_0)$ , так что

$$\|y_n - u\|_D \leq \rho_0^n \|y_0 - u\|_D, \quad D = A \text{ или } D = B,$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \gamma_1 = c_1 \overset{\circ}{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = c_2 \overset{\circ}{\gamma}_2,$$

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 = \frac{1 - \bar{\rho}}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{1 + \bar{\rho}}{\omega_1 + \omega_2},$$

$\bar{\rho}$  дается формулой (36), а параметр  $\tau = \tau_0 = \omega_1 + \omega_2$  определяется, в соответствии с теоремой 2, по формуле  $\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ .

**Замечание.** Так же, как и в теореме 3, вместо условия  $\delta_1 > 0$  можно потребовать

$$\delta_1 + \delta_2 > 0, \quad \delta_1 [1 + \delta_2 (1/\Delta_1 + 1/\Delta_2)] + \delta_2 \neq 0,$$

**Пример 1.** Рассмотрим тот случай, когда регуляризатор  $R$  совпадает с оператором  $A = A_1 + A_2$ , так что  $c_1 = c_2 = 1$ , а операторы  $A_1$  и  $A_2$  имеют совпадающие границы:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta.$$

Тогда

$$\rho_0 = \bar{\rho} = \left( \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}} \right)^2, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}$$

и скорость сходимости итерации (ср. с п. 5)

$$\ln(1/\rho_0) = 4 \sqrt{\eta} + O(\eta).$$

**Пример 2.** Рассмотрим случай, когда  $R = A = A_1 + A_2$ , т. е.  $c_1 = c_2 = 1$ , а одно из чисел  $\delta_\alpha$  равно нулю, например,  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = \delta > 0$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$  («смешанная» задача). Тогда

$$c_0 = \frac{\delta}{2 + \eta}, \quad \delta'_1 = c_0, \quad \delta'_2 = \frac{1 + \eta}{2 + \eta} \delta, \quad \Delta'_1 = \frac{2\delta(1 + \eta)}{\eta(2 + \eta)}, \quad \Delta'_2 = \frac{2\delta}{\eta(2 + \eta)}.$$

Вычисления дают

$$\eta'_1 = \frac{\delta'_1}{\Delta'_1} = \frac{\eta}{2(\eta + 1)}, \quad \eta'_2 = \frac{\eta(1 + \eta)}{2},$$

$$\rho_0 = \bar{\rho} = \frac{1 - \sqrt{\eta'_1}}{1 + \sqrt{\eta'_1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\eta'_2}}{1 + \sqrt{\eta'_2}}.$$

Скорость сходимости

$$\ln(1/\rho_0) = 2 \sqrt{2\eta} + O(\eta).$$

Сравнение с примером 1 показывает, что число итераций в случае смешанной задачи примерно в 1,5 раза больше.

### § 3. Итерационные двухслойные схемы для несамосопряженных уравнений \*)

**1. Метод переменных направлений в случае несамосопряженных операторов.** Пусть дано уравнение

$$(A_1 + A_2)u = f,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  несамосопряженные операторы,

$$\left. \begin{aligned} A_\alpha &\geq \delta_\alpha E, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ \|A_\alpha x\|^2 &\leq \Delta_\alpha (A_\alpha x, x) \quad \text{или} \quad A_\alpha^{-1} \geq \frac{1}{\Delta_\alpha} E, \quad \Delta_\alpha > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\*) См. А. А. Самарский [24]—[28].



Для решения уравнения рассмотрим схему переменных направлений (29') из § 2, п. 4 с параметрами  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Для погрешности  $z_{k+1}$ , точнее, для  $v_{k+1} = (E + \omega A_2)z_{k+1}$  получим уравнение (31) из § 2 с оператором (32) из § 2. При переходе от (30) из § 2 к (31), (32) из § 2 не требуется ни перестановочности  $A_1$  и  $A_2$ , ни их самосопряженности (предполагается лишь разрешимость задачи, т. е. существование операторов  $(E + \omega_1 A_1)^{-1}$ ,  $(E + \omega_2 A_2)^{-1}$ ).

Рассмотрим оператор перехода  $S = S_1 S_2$ ,

$$S_1 = (E + \omega A_1)^{-1} (E - \omega A_1), \quad S_2 = (E + \omega A_2)^{-1} (E - \omega A_2).$$

*Лемма 1.* Пусть  $A_\alpha$  — несамосопряженный оператор и выполнены условия (1). Тогда при любом  $\omega > 0$  справедлива оценка

$$\|S_\alpha\|^2 \leq \frac{1 - \kappa_\alpha}{1 + \kappa_\alpha}, \quad \text{где } \kappa_\alpha = \frac{2\delta_\alpha \omega}{1 + \omega^2 \delta_\alpha \Delta_\alpha}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Вычислим  $\|(E + \omega A_\alpha)z\|^2 - \|(E - \omega A_\alpha)z\|^2 = 4\omega(A_\alpha z, z)$ ,

$$\|(E + \omega A_\alpha)z\|^2 = \|z\|^2 + 2\omega(A_\alpha z, z) + \omega^2 \|A_\alpha z\|^2.$$

Используя условия (1), имеем

$$\|(E + \omega A_\alpha)z\|^2 \leq (\delta_\alpha^{-1} + 2\omega + \Delta_\alpha \omega^2)(A_\alpha z, z),$$

$$\|(E - \omega A_\alpha)z\|^2 = \|(E + \omega A_\alpha)z\|^2 - 4\omega(A_\alpha z, z) \leq \frac{1 - \kappa_\alpha}{1 + \kappa_\alpha} \|(E + \omega A_\alpha)z\|^2.$$

Обозначая  $(E + \omega A_\alpha)z = v$ , получим

$$\|S_\alpha v\|^2 \leq \frac{1 - \kappa_\alpha}{1 + \kappa_\alpha} \|v\|^2,$$

что и дает оценку (2).

Таким образом

$$\|S\|^2 \leq \|S_1\|^2 \|S_2\|^2 \leq \frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \cdot \frac{1 - \kappa_2}{1 + \kappa_2}.$$

Нетрудно заметить, что функция  $\kappa_\alpha = \kappa_\alpha(\omega)$  достигает максимума при  $\omega = 1/\sqrt{\delta_\alpha \Delta_\alpha}$ .

Итак, имеет место оценка

$$\|z_n\|_{(2)} \leq \rho^n \|z_0\|_{(2)}, \quad \rho = \left( \frac{1 - \sqrt{\eta_1}}{1 + \sqrt{\eta_1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\eta_2}}{1 + \sqrt{\eta_2}} \right)^{1/2}, \quad \eta_\alpha = \frac{\delta_\alpha}{\Delta_\alpha},$$

если  $\delta_1 \Delta_1 = \delta_2 \Delta_2$  и  $\omega = 1/\sqrt{\delta_1 \Delta_1} = 1/\sqrt{\delta_2 \Delta_2}$ , где  $\|z\|_{(2)} = \|z + \omega A_2 z\|$ .

Пусть  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ . Тогда  $\rho = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\eta}}$ ,  $\eta = \delta/\Delta$ .

Скорость сходимости итераций  $\ln(1/\rho) = 2\sqrt{\eta} + O(\eta)$ , как показывает сравнение с п. п. 3, 4 § 2, в 2 раза меньше, чем в случае

самосопряженных  $A_1$  и  $A_2$ . Однако есть основания предполагать, что этот вывод — результат грубой оценки для  $\|S\|$  при  $A_\alpha \neq \neq A_\alpha^*$ . Фактически скорость сходимости выше.

Тот случай, когда  $A_1$  и  $A_2$  — сопряженные операторы,  $A_2 = A_1^*$ , был нами уже рассмотрен в п. 5 § 2. При этом оказалось, что скорость сходимости итераций  $\ln(1/\rho) = 4\sqrt{\eta} + O(\eta)$ .

**2. Случай несамосопряженного оператора перехода.** Рассмотрим теперь уравнение

$$Au = f, \quad (3)$$

где  $A$  — положительно определенный несамосопряженный ( $A \neq A^*$ ) линейный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве  $H$ .

Для решения уравнения (3) будем пользоваться двухслойной итерационной схемой (2) из § 2 с самосопряженным положительно определенным оператором  $B$ . Выше было показано, что неявная схема (2) из § 2 эквивалентна явной схеме

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Cx_k = \varphi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = B^{1/2}y_0 \in H$$

при  $x_k = B^{1/2}y_k$ ,  $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$ ,  $\varphi = B^{-1/2}f$ . Эта схема, очевидно, соответствует уравнению  $Cv = \varphi$ , где  $v = B^{1/2}u$ ,  $\varphi = B^{-1/2}f$ .

Для оценки скорости сходимости итераций рассмотрим одноуровневое уравнение с произвольным  $x_0 \in H$ :

$$x_{k+1} = Sx_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad S = E - \tau C. \quad (4)$$

Из предыдущего ясно, что достаточно ограничиться изучением явной схемы, получить для нее оценку  $\|S\|$  и выбрать  $\tau$  из условия минимума  $\|S\|$ .

Рассмотрим сначала случай, когда заданы нижние грани операторов  $C$  и  $C^{-1}$ :

$$C \geq \gamma_1 E \quad \text{или} \quad (Cx, x) \geq \gamma_1 \|x\|^2, \quad \gamma_1 > 0, \quad (5)$$

$$C^{-1} \geq \frac{1}{\gamma_2} E \quad \text{или} \quad \|Cx\|^2 \leq \gamma_2 (Cx, x), \quad \gamma_2 > 0, \quad (6)$$

$x \in H$  — любой элемент.

Предполагая, что  $2 - \tau\gamma_2 > 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \|Sx\|^2 &= \|x - \tau Cx\|^2 = \|x\|^2 - 2\tau(Cx, x) + \tau^2 \|Cx\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 - 2\tau(Cx, x) + \tau^2 \gamma_2 (Cx, x) = \|x\|^2 - \tau(2 - \tau\gamma_2)(Cx, x) \leq \\ &\leq [1 - \tau(2 - \tau\gamma_2)\gamma_1] \|x\|^2 = (1 - 2\tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_1\gamma_2) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Выбирая  $\tau$  из условия минимума трехчлена,  $\tau = 1/\gamma_2$ , находим  $\|Sx\|^2 \leq (1 - \gamma_1/\gamma_2) \|x\|^2$ .

Таким образом, если для несамосопряженного оператора  $C$  выполнены условия (5), (6), то справедлива оценка

$$\|S\| \leq \sqrt{1 - \xi}, \quad \xi = \gamma_1/\gamma_2 \quad \text{при} \quad \tau = 1/\gamma_2. \quad (7)$$

Улучшить эту оценку путем выбора  $\tau$  не удается.

**3. Оценка  $\|S\|$  при увеличении объема информации.** Объем информации относительно оператора  $C$  ( $A$  и  $B$ ) может быть увеличен заданием трех чисел  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  вместо двух  $\gamma_1, \gamma_2$ . При этом оценка для  $\|S\|$  улучшается и переходит в оценку для  $\|S\|$  при  $C = C^*$ . Приближенное решение этой задачи было получено Ганом [2].

Здесь дается точное решение задачи о минимуме  $\|S\|$  (см. А. А. Самарский [25]).

Представим  $C$  в виде суммы двух операторов, симметричного  $C_0$  и кососимметричного  $C_1$ :

$$C = C_0 + C_1, \quad C_0 = 0,5(C + C^*), \quad C_1 = 0,5(C - C^*), \quad (8)$$

где  $C^*$  — сопряженный к  $C$  оператор, так что  $(Cx, y) = (x, C^*y)$ . Обратимся к уравнению (4):

$$x_{k+1} = (E - \tau C_0 - \tau C_1)x_k = (\theta E - \tau C_0)x_k + ((1 - \theta)E - \tau C_1)x_k, \quad (9)$$

где  $0 < \theta < 1$  — произвольное число.

Предположим, что  $C$  удовлетворяет условиям

$$\gamma_1 E \leq C_0 \leq \gamma_2 E, \quad \|C_1\| \leq \gamma_3, \quad (10)$$

где  $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$  и  $\gamma_3 \geq 0$  — заданные числа.

Перейдем к оценке решения уравнения (4):

$$\|x_{k+1}\| \leq \theta \left\| E - \frac{\tau}{\theta} C_0 \right\| \|x_k\| + \|(1 - \theta)E - \tau C_1\| \|x_k\|. \quad (11)$$

Наша задача — выбрать параметры  $\tau$  и  $\theta$  так, чтобы норма  $\|S\| = \|E - \tau(C_0 + C_1)\|$  была минимальной. Так как  $C_0$  самосопряженный оператор с границами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , то, согласно теореме 2 из § 2,

$$\inf_{\tau, \theta} \left\| E - \frac{\tau}{\theta} C_0 \right\| = \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{\theta} = \tau_0, \quad (12)$$

$$\tau = \tau_0 \theta, \quad \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2). \quad (13)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (11):

$$\begin{aligned} \|(1 - \theta)x - \tau C_1 x\|^2 &= (1 - \theta)^2 \|x\|^2 - 2\tau(1 - \theta)(C_1 x, x) + \tau^2 \|C_1 x\|^2 = \\ &= (1 - \theta)^2 \|x\|^2 + \tau^2 \|C_1 x\|^2 \leq ((1 - \theta)^2 + \tau_0^2 \theta^2 \gamma_3^2) \|x\|^2, \end{aligned}$$

так как  $(C_1 x, x) = 0$ .

Итак, мы имеем

$$\|x_{k+1}\| \leq \|S\| \|x_k\|, \quad (14)$$

$$\|S\| \leq f(\theta), \quad f(\theta) = \theta\rho_0 + \sqrt{(1-\theta)^2 + \theta^2 a^2}, \quad a^2 = \tau_0^2 \gamma_3^2. \quad (15)$$

Найдем теперь минимум функции  $f(\theta)$ . Вычислим производную

$$f'(\theta) = \rho_0 - \frac{1-\theta-a^2\theta}{\sqrt{(1-\theta)^2 + a^2\theta^2}} = \rho_0 - \frac{\alpha - a^2}{\sqrt{\alpha^2 + a^2}}, \quad \alpha = \frac{1-\theta}{\theta}.$$

Условие  $f'(\theta) = 0$  дает

$$\rho_0 \sqrt{\alpha^2 + a^2} = \alpha - a^2.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для  $\alpha$ :

$$(1 - \rho_0^2)\alpha^2 - 2a^2\alpha + a^2(a^2 - \rho_0^2) = 0$$

и решаем его:

$$\alpha = a \frac{a + \rho_0 \sqrt{1 - \rho_0^2 + a^2}}{1 - \rho_0^2}$$

(второй корень непригоден, так как он может быть отрицательным при некоторых значениях параметров  $a$  и  $\rho_0$ ). Введем обозначение  $\kappa = \gamma_3 / \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3^2}$ , так что

$$\gamma_3^2 = \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \gamma_1 \gamma_2, \quad a^2 = \tau_0^2 \gamma_3^2 = \frac{4\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \cdot \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} = \frac{(1 - \rho_0^2) \kappa^2}{1 - \kappa^2},$$

$$\frac{a^2}{\kappa^2} = \frac{1 - \rho_0^2}{1 - \kappa^2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение  $1 - \rho_0^2 + a^2 = 1 - \rho_0^2 + \frac{\kappa^2(1 - \rho_0^2)}{1 - \kappa^2} = \frac{1 - \rho_0^2}{1 - \kappa^2} = \frac{a^2}{\kappa^2}$ , откуда получим

$$\alpha = \frac{a^2(\kappa + \rho_0)}{\kappa(1 - \rho_0^2)} = \frac{\kappa(\kappa + \rho_0)}{1 - \kappa^2}, \quad 1 + \alpha = \frac{1 + \kappa\rho_0}{1 - \kappa^2},$$

$$\theta = \frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa\rho_0}.$$

Найдем теперь  $f(\theta) = \frac{1}{1 + \alpha} \rho_0 + \frac{1}{1 + \alpha} \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{\rho_0^2 + \alpha - a^2}{(1 + \alpha) \rho_0}$ . Учитывая, что  $\rho_0^2 + \alpha - a^2 = (1 + \alpha) - (1 - \rho_0^2 + a^2) = 1 + \alpha - \frac{a^2}{\kappa^2} = \frac{1 + \kappa\rho_0}{1 - \kappa^2} - \frac{1 - \rho_0^2}{1 - \kappa^2} = \rho_0 \frac{\rho_0 + \kappa}{1 - \kappa^2}$ , получаем

$$\|S\| \leq \frac{\kappa + \rho_0}{1 + \kappa\rho_0} \quad \text{при} \quad \tau = \tau_0 \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa\rho_0}.$$

Таким образом доказана

Теорема 1. Пусть  $C = C_0 + C_1$ ,  $C_0 = 0,5(C + C^*)$ ,  $C_1 = 0,5(C - C^*)$  и выполнены условия (10):

$$\gamma_1 E \leq C_0 \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_2 \geq \gamma_1 > 0, \quad \|C_1\| \leq \gamma_3, \quad \gamma_3 \geq 0.$$

Тогда при  $\tau = \bar{\tau}$ , где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau_0(1 - \kappa^2)/(1 + \kappa\rho_0), \quad \kappa = \gamma_3/\sqrt{\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3^2}, \\ \tau_0 &= 2/(\gamma_1 + \gamma_2), \quad \rho_0 = (1 - \xi)/(1 + \xi), \quad \xi = \gamma_1/\gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

для нормы оператора перехода схемы (4) верна оценка

$$\|S\| = \|E - \bar{\tau}C\| \leq \bar{\rho}, \quad \bar{\rho} = [(\rho_0 + \kappa)/(1 + \kappa\rho_0)] < 1. \quad (17)$$

Замечание. Пусть  $C$  задан в комплексном гильбертовом пространстве  $\tilde{H}$ ,  $C = C_0 + iC_1$ ,  $C_0 = 0,5(C + C^*)$ ,  $C_1 = \frac{1}{2i}(C - C^*)$ ,  $\gamma_1 E \leq C_0 \leq \gamma_2 E$ ,  $\|C_1\| \leq \gamma_3$ . Тогда теорема 1 сохраняет силу.

Теорема 2. Пусть  $A = A_0 + A_1$ ,  $B = B^* \geq \beta E$ ,  $\beta > 0$ ,

$$\gamma_1 B \leq A_0 \leq \gamma_2 B, \quad (B^{-1}A_1 y, A_1 y) \leq \gamma_3^2 (By, y), \quad (18)$$

где  $A_0 = 0,5(A + A^*)$ ,  $A_1 = 0,5(A - A^*)$ ,  $\gamma_2 \geq \gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_3 \geq 0$  — заданные числа. Тогда при  $\tau = \bar{\tau}$  для неявной схемы (2) из § 2 верны оценки

$$\|y_n - u\|_B \leq \bar{\rho}^n \|y_0 - u\|_B, \quad \|y_{n+1} - y_n\|_B \leq \bar{\rho}^n \|y_1 - y_0\|_B.$$

Для практического использования этой теоремы полезна

Лемма 2. Пусть  $R = R^* > 0$ ,  $B = B^* \geq \beta E$ ,  $\beta > 0$ ,  $A = A_0 + A_1$ ,  $A_0 = A_0^* > 0$ ;  $A, B, R$  заданы на  $H$ ,  $\dot{\gamma}_1 B \leq R \leq \dot{\gamma}_2 B$ ,  $c_1 R \leq A_0 \leq c_2 R$ ,  $(R^{-1}A_1 y, A_1 y) \leq c_3^2 (Ry, y)$  для всех  $y \in H$ .

Тогда выполнены условия (18) с постоянными

$$\gamma_1 = c_1 \dot{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = c_2 \dot{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = c_3 \dot{\gamma}_2 \quad (c_2 \geq c_1 > 0, c_3 \geq 0).$$

Найденные здесь априорные оценки позволяют получить оценку числа итераций, достаточного для нахождения по схеме (2) из § 2 приближенного решения задачи  $Au = f$  с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ . При практическом применении теории надо выбрать оператор  $B$  и вычислить эти постоянные. В качестве  $B$  можно взять один из изученных ранее факторизованных операторов

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_2 = R_1^*,$$

$$B = (E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2), \quad R_2 R_1 = R_1 R_2, \quad R_\alpha = R_\alpha^* > 0.$$

**4. Неявный метод наискорейшего спуска и метод минимальных поправок.** Двухслойную итерационную схему

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

можно трактовать как метод поправок

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} \omega_k, \quad (20)$$

где  $\omega_k = B^{-1}r_k$  — поправка,  $r_k = Ay_k - f$  — невязка для  $k$ -ой итерации. Порядок счета: вычисляется невязка  $r_k = Ay_k - f$  по известной  $k$ -ой итерации  $y_k$ , затем из уравнения

$$B\omega_k = r_k \quad (21)$$

находится поправка  $\omega_k$ , подставляя которую в (20), определяем  $(k+1)$ -ю итерацию  $y_{k+1}$ . При этом возникает вопрос о выборе  $\tau_{k+1}$ . Ранее мы имели дело с двумя формулами

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k}, \quad \mu_k = \mathfrak{M}_n = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2n}, 1 \leq i \leq n \right\}, 1 \leq k \leq n$$

(см. § 2, п. 1), или

$$\tau_k = \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2),$$

где  $\rho_0 = (\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_2 + \gamma_1)$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — постоянные эквивалентности операторов  $A$  и  $B$ :

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B.$$

В случае несамосопряженного оператора  $A$  мы получили два типа оценок для скорости сходимости итераций и два типа формул для  $\tau$  в зависимости от объема информации (даны  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  или  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ).

Может оказаться, что постоянные  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  (и  $\gamma_3$ ) во всех ранее рассмотренных случаях либо априори неизвестны, либо вычисляются слишком грубо. Тогда целесообразно пользоваться для вычисления параметров  $\tau_{k+1}$  формулой метода скорейшего спуска для неявной схемы

$$\tau_{k+1} = (\omega_k, r_k) / (A\omega_k, \omega_k) \quad (22)$$

или формулой метода минимальных поправок

$$\tau_{k+1} = (A\omega_k, \omega_k) / (B^{-1}A\omega_k, A\omega_k) \quad (23)$$

(при  $B = E$  — метод минимальных невязок; М. А. Красносельский, С. Г. Крейн [1]).

Дадим вывод формулы (23). Пусть  $A$  — несамосопряженный положительно определенный оператор,  $B$  — самосопряженный положительно определенный оператор на гильбертовом пространстве  $H$ . Исходное уравнение (3) заменим эквивалентным уравнением

$$Cv = \varphi, \quad \text{где } C = B^{-1/2}AB^{-1/2}, \quad v = B^{1/2}u, \quad \varphi = B^{-1/2}f.$$

Это уравнение будем решать методом минимальных невязок по формуле

$$v_{k+1} = v_k - \tau_{k+1} \tilde{r}_k, \quad \tilde{r}_k = Cv_k \quad (24)$$

где

$$\tau_{k+1} = \frac{(C\tilde{r}_k, \tilde{r}_k)}{\|C\tilde{r}_k\|^2}. \quad (25)$$

Переход от (24) к (21) осуществляется при помощи подстановок  $v_k = B^{1/2}y_k$ ,  $\tilde{r}_k = Cv_k - f = B^{-1/2}(AB^{-1/2}v_k - f) = B^{-1/2}(Ay_k - f) = B^{-1/2}r_k$ , где  $r_k = Ay_k - f$ . Действуя затем на (24) оператором  $B^{-1/2}$ , получим (20). Подставив в (25)

$$(C\tilde{r}_k, \tilde{r}_k) = (B^{-1/2}AB^{-1}r_k, B^{-1/2}r_k) = (A\omega_k, \omega_k), \\ \|C\tilde{r}_k\|^2 = (B^{-1/2}AB^{-1}r_k, B^{-1/2}AB^{-1}r_k) = (B^{-1}A\omega_k, A\omega_k),$$

получаем формулу (23). Более просто формулу (23) можно получить из условия ортогональности  $A\omega_k$  и  $\omega_{k+1}$ , где

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \tau_{k+1}B^{-1}A\omega_k,$$

или из условия минимума  $\|\omega_{k+1}\|_B^2$ :

$$\|\omega_{k+1}\|_B^2 = (B\omega_k, \omega_k) - 2\tau_{k+1}(A\omega_k, \omega_k) + \tau_{k+1}^2(B^{-1}A\omega_k, A\omega_k).$$

Дифференцируя это выражение по  $\tau_{k+1}$ , находим (23) из условия равенства нулю производной.

Сходимость метода наискорейшего спуска (см. Л. В. Канторович [1]) и метода минимальных невязок (см. М. А. Красносельский, С. Г. Крейн [1]) доказана для случая  $B = E$ ,  $\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E$ , где  $A$  — самосопряженный оператор.

При выводе формулы для  $\tau_{k+1}$  в методе минимальных поправок нигде не используется предположение о самосопряженности оператора  $A$ .

Докажем сходимость метода минимальных поправок, предполагая, что  $A$  — несамосопряженный оператор. Напишем уравнение для невязок, полагая  $A = C$ ,  $B = E$ , т. е.

$$r_{k+1} = r_k - \tau_{k+1}Cr_k.$$

Нам понадобится следующая основная

*Лемма 3.* Пусть  $C$  — несамосопряженный оператор с границами  $\gamma_2 > 0$  и  $\gamma_1 > 0$ :

$$\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \quad (26)$$

и пусть существуют числа  $\tau_* > 0$  и  $\rho_* \in (0, 1)$ , удовлетворяющие условию

$$\gamma_1 \tau_* \leq 1 - \rho_*^2 \leq \gamma_2 \tau_*. \quad (27)$$

и такие, что справедлива оценка

$$\|E - \tau_* C\| \leq \rho_* < 1. \quad (28)$$

Тогда имеет место неравенство

$$(Cx, x)^2 \geq (1 - \rho_*^2) \|Cx\|^2 \|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in H. \quad (29)$$

Доказательство. По условию

$$\|(E - \tau_* C)x\|^2 = \|x\|^2 - 2\tau_* (Cx, x) + \tau_*^2 \|Cx\|^2 \leq \rho_*^2 \|x\|^2$$

для всех  $x \in H$ .

Отсюда находим

$$\|Cx\|^2 \leq \frac{2}{\tau_*} (Cx, x) - \frac{1 - \rho_*^2}{\tau_*^2} \|x\|^2 = \frac{(Cx, x)^2}{\tau_* \|x\|^2} \left( \frac{2\|x\|^2}{(Cx, x)} - \frac{1 - \rho_*^2}{\tau_*} \frac{\|x\|^4}{(Cx, x)^2} \right)$$

или

$$\|Cx\|^2 \leq \frac{(Cx, x)^2}{\tau_* \|x\|^2} \varphi(\alpha), \quad (30)$$

$$\varphi(\alpha) = 2\alpha - \frac{1 - \rho_*^2}{\tau_*} \alpha^2, \quad \alpha = \frac{\|x\|^2}{(Cx, x)}.$$

По условию  $\gamma_2^{-1} \leq \alpha \leq \gamma_1^{-1}$ . Вычислим

$$\varphi'(\alpha) = 2 \left( 1 - \frac{1 - \rho_*^2}{\tau_*} \alpha \right), \quad \varphi''(\alpha) = - \frac{2(1 - \rho_*^2)}{\tau_*} < 0.$$

Пусть максимум достигается внутри отрезка  $[\gamma_2^{-1}, \gamma_1^{-1}]$ , т. е.  $\varphi'(\alpha) = 0$  при  $\alpha = \alpha_0$ ,

$$\alpha_0 = \frac{\tau_*}{1 - \rho_*^2},$$

так что

$$\varphi(\alpha_0) = \alpha_0 \left( 2 - \frac{1 - \rho_*^2}{\tau_*} \alpha_0 \right) = \frac{\tau_*}{1 - \rho_*^2} = \alpha_0.$$

Подставляя это значение в (30), получаем

$$\|Cx\|^2 \leq \frac{(Cx, x)^2}{(1 - \rho_*^2) \|x\|^2} \quad \text{или} \quad (Cx, x)^2 \geq (1 - \rho_*^2) \|x\|^2 \|Cx\|^2,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно убедиться, что и при  $\alpha_0 = \gamma_1^{-1}$  или  $\alpha_0 = \gamma_2^{-1}$  лемма сохраняет силу.



**Теорема 3.** Пусть  $C$  — несамосопряженный оператор,  $C: H \rightarrow H$ , и выполнены условия

$$\begin{aligned} \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_2 \geq \gamma_1 > 0, \\ \|C_1\| \leq \gamma_3, \quad C_1 = 0,5(C - C^*), \quad \gamma_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда метод минимальных невязок

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} r_k, \quad r_k = Cy_k - f, \quad \tau_{k+1} = (Cr_k, r_k) / \|Cr_k\|^2$$

сходится со скоростью  $\ln(1/\bar{\rho})$ , где

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \kappa}{1 + \kappa \rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}, \quad \kappa = \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3^2}},$$

так что справедлива оценка

$$\|Cy_k - f\| \leq \bar{\rho}^k \|Cy_0 - f\|.$$

**Доказательство.** Будем исходить из уравнения для невязки  $r_{k+1} = r_k - \tau_{k+1} Cr_k$ . Вычислим квадрат нормы  $r_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \|r_{k+1}\|^2 &= \|r_k\|^2 - 2\tau_{k+1} (Cr_k, r_k) + \tau_{k+1}^2 \|Cr_k\|^2 = \\ &= \|r_k\|^2 - \frac{(Cr_k, r_k)^2}{\|Cr_k\|^2} = \left(1 - \frac{(Cr_k, r_k)^2}{\|r_k\|^2 \|Cr_k\|^2}\right) \|r_k\|^2. \end{aligned}$$

Условия (27) и (28) (см. теорему 1) выполнены при  $\tau_* = \bar{\tau} = \tau_0 / (1 + \kappa \rho_0)$ ,  $\rho_* = \bar{\rho}$ . Поэтому верна оценка (29), пользуясь которой получаем

$$\|r_{k+1}\|^2 \leq (1 - (1 - \bar{\rho}^2)) \|r_k\|^2 = \bar{\rho}^2 \|r_k\|^2.$$

Если оператор  $C$  самосопряжен, то  $\kappa = 0$ ,  $\bar{\rho} = \rho_0$  и мы получаем оценку

$$\|Cy_k - f\| \leq \rho_0^k \|Cy_0 - f\|.$$

Такая оценка была получена М. А. Красносельским и С. Г. Крейнном [1].

Покажем, как, опираясь на лемму 3, оценить сходимость метода наискорейшего спуска. Все делается сначала для явных схем

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k - \tau_{k+1} r_k, \quad r_k = Cy_k - f, \\ \tau_{k+1} &= \frac{\|r_k\|^2}{(Cr_k, r_k)}, \quad C = C^* > 0, \quad \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\tilde{r}_k = C^{-1/2} r_k$ . Тогда для  $\tilde{r}_k$  получим уравнение

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \tau_{k+1} C \tilde{r}_k.$$

Формула для  $\tau_{k+1}$  примет вид

$$\tau_{k+1} = \frac{(C\tilde{r}_k, \tilde{r}_k)}{\|C\tilde{r}_k\|^2}.$$

После этого повторяются рассуждения, приводящие к доказательству теоремы 3. В результате получаем оценку

$$\|\tilde{r}_{k+1}\|^2 \leq \rho_0^2 \|\tilde{r}_k\|^2,$$

$$\|\tilde{r}_k\|^2 = (C^{-1}r_k, r_k) = (C^{-1}C(y_k - u), C(y_k - u)) = \|y_k - u\|_C^2.$$

Таким образом для метода наискорейшего спуска верна та же оценка

$$\|y_k - u\|_C \leq \rho_0^k \|y_0 - u\|_C;$$

что и для явной схемы с постоянным  $\tau = \tau_0$ .

Следствия. 1. Для неявного метода минимальных поправок (20), (23) верна оценка

$$\|Ay_k - f\|_{B^{-1}} \leq \bar{\rho}^k \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}, \quad A \neq A^*, \quad B = B^*.$$

2. Для неявной схемы скорейшего спуска имеем

$$\|y_k - u\|_A \leq \rho_0^k \|y_0 - u\|_A, \quad A = A^*, \quad B = B^*.$$

5. Двухступенчатый метод. Рассмотрим уравнение

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} \omega_k.$$

Для поправки  $\omega_k$  получаем уравнение

$$B\omega_k = r_k, \quad r_k = Ay_k - f. \quad (31)$$

Оператор  $B$  задается либо конструктивно, в явном виде (например,  $B$  есть факторизованный оператор

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_2 = R_1^*,$$

или

$$B = (E + \omega_1 R_1)(E + \omega_2 R_2), \quad R_\alpha = R_\alpha^* > 0, \quad R_1 R_2 = R_2 R_1,$$

либо строится в результате некоторого вычислительного процесса. Это имеет место для одного из вариантов метода поправок — двухступенчатого метода или метода составных итераций. Он состоит в следующем. Пусть оператор  $R = R^* > 0$  эквивалентен оператору  $A > 0$  с постоянными  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R \quad (32)$$

и выполнена одна из групп условий (18), (5), (6) при  $A \neq A^*$  или условия (32) при  $A = A^*$ .

Для вычисления поправок  $\omega_k$  уравнение

$$R\omega = r_k, \quad r_k = Ay_k - f \quad (33)$$

решается либо прямым (дающим точное решение) методом (тогда  $B = R$ ), либо при помощи некоторого итерационного метода (метода внутренних итераций) с начальным условием

$$\omega^{(0)} = 0.$$

Итак, пусть дан некоторый метод внутренних итераций. Пусть  $T_m$  — разрешающий оператор этого метода, так что  $\omega^{(m)} - \omega = T_m(0 - \omega)$  или  $\omega^{(m)} = (E - T_m)\omega$ , где  $\omega^{(m)}$  — итерация номера  $m$ ,  $\omega$  — точное решение уравнения (33).

Если выполнены условия

$$\|T_m\| \leq q < 1, \quad T_m^* = T_m,$$

то в силу самосопряженности  $T_m$  будем иметь:

$$-qE \leq T_m \leq qE, \quad (1 - q)E \leq E - T_m \leq (1 + q)E,$$

$$\frac{1}{1 + q} E \leq (E - T_m)^{-1} \leq \frac{1}{1 - q} E.$$

Подставляя  $\omega = (E - T_m)^{-1} \omega^{(m)}$  в (33) и полагая  $\omega_k = \omega^{(m)}$ , получаем

$$B\omega_k = r_k \quad \text{или} \quad \omega_k = B^{-1}r_k,$$

где

$$B = R(E - T_m)^{-1}.$$

Если  $T_m$  и  $R$  перестановочны ( $T_m R = R T_m$ ), то легко находятся постоянные  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  эквивалентности  $B$  и  $R = (E - T_m)B$ . В самом деле,

$$(1 - q)(Bx, x) \leq (Rx, x) = ((E - T_m)B^{1/2}x, B^{1/2}x) \leq (1 + q)(Bx, x),$$

т. е.  $\gamma_1 = 1 - q$ ,  $\gamma_2 = 1 + q$ .

Требование перестановочности  $T_m$  и  $R$  является весьма сильным. От него можно освободиться, если условие окончания итераций взять в форме

$$\|\omega^{(m)} - \omega\|_R \leq q < 1 \quad \text{или} \quad (R(\omega^{(m)} - \omega), \omega^{(m)} - \omega) \leq q^2.$$

Предположим, что для отыскания  $\omega^{(m)}$  применяется неявная двухслойная схема

$$D_i \frac{\omega^{(i+1)} - \omega^{(i)}}{\theta_{i+1}} + R\omega^{(i)} = r_k, \quad \omega^{(0)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $i$  — номер итерации,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  — последовательность параметров, оператор  $D_i = D_i^*$  положительно определен.

Чтобы свести эту схему к явной схеме перестановочность  $D_i$  и  $R$  не нужна. Достаточно положить

$$\xi_i = R^{1/2}\omega^{(i)}, \quad \varphi_i = R^{1/2}D_i^{-1}r_k, \quad C_i = R^{1/2}D_i^{-1}R^{1/2}$$

и мы получим схему

$$\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\theta_{i+1}} + C_i \xi_i = \varphi_i \quad \text{или} \quad \xi_{i+1} = S_{i+1} \xi_i + \theta_{i+1} \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $\xi_0 = 0$ ,  $S_{i+1} = E - \theta_{i+1} C_i$ .

Применим к (33) оператор  $R^{1/2} D_i^{-1}$ :

$$C_i \xi = \varphi_i, \quad \xi = R^{1/2} \omega,$$

где  $\omega$  — точное решение уравнения (33). Для разности  $z_i = \xi_i - \xi$  имеем

$$z_{i+1} = S_{i+1} z_i, \quad z_m = \tilde{T}_m z_0, \quad \tilde{T}_m = \prod_{i=1}^m S_i$$

или

$$R^{1/2} (\omega^{(m)} - \omega) = \tilde{T}_m R^{1/2} (0 - \omega) = -\tilde{T}_m R^{1/2} \omega.$$

Отсюда находим

$$R^{1/2} \omega = (E - \tilde{T}_m)^{-1} R^{1/2} \omega^{(m)}.$$

После подстановки этого выражения в (33) получим

$$B \omega_k = r_k, \quad B = R^{1/2} (E - \tilde{T}_m)^{-1} R^{1/2},$$

где  $\tilde{T}_m = \prod_{i=1}^m S_i$  — самосопряженный оператор.

Условие окончания итераций  $\|\omega^{(m)} - \omega\|_R \leq q < 1$  выполнено, если

$$\|\tilde{T}_m\| \leq q.$$

Покажем, что  $\overset{\circ}{\gamma}_1 B \leq R \leq \overset{\circ}{\gamma}_2 B$ , где  $\overset{\circ}{\gamma}_1 = 1 - q$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2 = 1 + q$  имеют значения, найденные ранее. Для этого рассмотрим

$$(Bx, x) = (R^{1/2} (E - \tilde{T}_m)^{-1} R^{1/2} x, x) = ((E - \tilde{T}_m)^{-1} R^{1/2} x, R^{1/2} x),$$

так как  $(R^{1/2})^* = R^{1/2}$ . Отсюда и из оценок для  $(E - \tilde{T}_m)^{-1}$  следует

$$\frac{1}{1+q} (Rx, x) \leq (Bx, x) \leq \frac{1}{1-q} (Rx, x)$$

или  $(1 - q) B \leq R \leq (1 + q) B$ .

Для внешних итераций

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} \omega_k$$

параметр  $\tau_{k+1}$  можно выбирать одним из следующих способов.

I. Если  $A = A^*$  — самосопряженный оператор, то

1) используется чебышевская последовательность параметров  $\tau_k = \tau_0 / (1 + \rho_0 \mu_k)$ , где  $\{\mu_k\}$  — «устойчивый» набор, указанный в § 2, п. 1. При этом

$$\gamma_1 = c_1(1 - q), \quad \gamma_2 = c_2(1 + q);$$

2)  $\tau_{k+1} = \tau_0$ .

II. Если  $A \neq A^*$  — несамосопряженный оператор и выполнены условия леммы 2, то полагаем

$$\tau_{k+1} = \bar{\tau},$$

где  $\bar{\tau}$  определяется по формулам (16) с  $\gamma_1 = (1 - q)c_1$ ,  $\gamma_2 = (1 + q)c_2$ ,  $\gamma_3 = (1 + q)c_3$ .

III. Если постоянные  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  (см. лемму 2) эквивалентности операторов  $A$  и  $R$  неизвестны или оцениваются слишком грубо, то  $\tau_{k+1}$  можно вычислять

1) либо по формуле для неявного метода наискорейшего спуска

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, w_k)}{(Aw_k, w_k)}, \quad \text{если } A = A^*,$$

2) либо по формуле метода минимальных поправок

$$\tau_{k+1} = \frac{(w_k, Aw_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}$$

как в случае самосопряженного  $A = A^*$ , так и в случае несамосопряженного  $A \neq A^*$  оператора.

Из последней формулы видно, что двухступенчатый метод минимальных поправок требует последовательного решения при помощи одного и того же метода итераций  $T_m$  двух уравнений

$$Rw = r_k, \quad w^{(0)} = 0, \quad w_k = w^{(m)},$$

$$Rv = Aw_k, \quad v^{(0)} = 0, \quad v_k = B^{-1}Aw_k = v^{(m)}.$$

Зная  $w_k$  и  $B^{-1}Aw_k = v_k = v^{(m)}$ , определим по формуле (23) параметр  $\tau_{k+1}$ .

В силу теоремы 1 имеет место оценка

$$\|y_n - u\|_B \leq \bar{\rho}^n \|y_0 - u\|_B, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \kappa}{1 + \kappa\rho_0},$$

где  $\rho_0$  и  $\kappa$  даны формулой (16), а  $\gamma_1 = c_1(1 - q)$ ,  $\gamma_2 = c_2(1 + q)$ ,  $\gamma_3 = c_3(1 + q)$ . Если  $A = A^*$ , то  $\kappa = 0$  и  $\bar{\rho} = \rho_0$ .

Внутренние итерации для более простого уравнения  $Rw = r_k$  должны проводиться возможно более экономичным методом.

В частности, если  $R$  есть сумма конечного числа попарно перестановочных самосопряженных положительных операторов,  $R = R_1 + \dots + R_p$ , то для решения уравнения (33) можно при-

менить метод переменных направлений с циклическим набором параметров (см. § 1), или же с набором параметров по Жордану, если  $p = 2$ .

Если  $R$  — оператор разностной задачи Дирихле в  $p$ -мерном параллелепипеде, то условие  $\|T_m\| \leq q < 1$  будет выполнено после

$$m = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{q}\right)$$

итераций, где  $h$  — шаг сетки.

Если  $R = R_1 + R_2$ , где  $R_1$  и  $R_2$  самосопряженные, но неперестановочные операторы (например,  $R_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , в ступенчатой области), то внутренние итерации можно проводить по продольно-поперечной схеме (см. § 1). Далее, в случае  $R = R_1 + R_2$ ,  $R_2 = R_1^*$ , т. е. когда  $R_1$  и  $R_2$  — «треугольные» операторы, используем неявную схему с факторизованным оператором  $D_i = D = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2)$ . При этом берется упорядоченная чебышевская последовательность параметров  $\theta_i$ .

Возможен, наконец, случай, когда границы оператора либо неизвестны, либо плохо определяются. Тогда внутренние итерации для нахождения поправки можно проводить по схеме минимальных невязок или по схеме наискорейшего спуска.

Применение двухступенчатого метода или метода поправок приводит к увеличению числа последовательностей, которые необходимо хранить в быстрой оперативной памяти вычислительной машины.

Однако, в ряде случаев этот метод является весьма экономичным.

Двухступенчатый метод для решения дифференциальных уравнений рассматривался Л. В. Канторовичем [2], Б. А. Самокишем [1] и др., а для разностных эллиптических уравнений — Е. Г. Дьяконовым [2], [7], Ганом [1], [2], С. Г. Михлиным [1]. При этом в качестве регуляризатора  $R$  выбирался разностный оператор Лапласа, а внутренним итерационным процессом для решения уравнения  $R\omega = r_h$  являлся метод переменных направлений с циклическим набором итерационных параметров.

Комбинация вариационного метода с методом переменных направлений рассматривалась Г. И. Марчуком [2], С. К. Годуновым и Г. П. Прокоповым [1].

#### § 4. Трехслойные итерационные схемы

В этом параграфе мы рассмотрим трехслойные итерационные схемы для уравнения

$$Au = f, \quad (1)$$

где  $A$  — линейный положительно определенный оператор,

действующий в гильбертовом пространстве  $H$ . В литературе такие схемы известны как двухшаговые, трехчленные или как итерационные схемы (методы) второго порядка (см., например, Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева [1]).

**1. Постановка задачи.** Трехслойная итерационная схема для уравнения (1) связывает три итерации  $y_{k-1}$ ,  $y_k$ ,  $y_{k+1}$ , так что  $y_{k+1}$  определяется через  $y_{k-1}$  и  $y_k$ . Любая трехслойная итерационная схема для (1) с постоянными операторами и параметрами может быть записана в виде (ср. гл. V, § 2):

$$B \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + R(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + Ay_k = f, \quad k = 1, 2, \dots$$

Мы ограничимся изучением стандартных схем с регуляризатором

$$R = \kappa B, \quad \kappa > 0, \quad (2)$$

предполагая, что  $R$  и  $B$  — линейные операторы, заданные на  $H$ , и

$$B = B^* \geq \beta E, \quad \beta > 0, \quad A = A^* > 0, \quad (3)$$

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0 \quad (4)$$

( $A$  и  $B$  энергетически эквивалентны с постоянными  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ). Стандартная итерационная трехслойная схема имеет вид:

$$B \left( \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + \kappa (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \right) + Ay_k = f, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Заданы произвольные  $y_0$  и  $y_1$ .

Наряду с (5) будем рассматривать задачи

$$B \left( \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + \kappa (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \right) + Ay_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \left. \begin{array}{l} \\ y_0, y_1 - \text{произвольные векторы,} \end{array} \right\} \quad (5a)$$

$$B \left( \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2\tau} + \kappa (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \right) + Ay_k = f, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \left. \begin{array}{l} \\ y_0 = y_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (5b)$$

Пусть  $y_k$  — решение задачи (5),  $u$  — решение уравнения (1).

Для погрешности  $z_k = y_k - u$  получаем задачу

$$B \left( \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{2\tau} + \kappa (z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1}) \right) + Az_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \left. \begin{array}{l} \\ z_0 = y_0 - u, \quad z_1 = y_1 - u. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Перейдем к оценке решения задачи (6). Для этого нам понадобится обобщение составной нормы, введенной в гл. VI, § 2.

Пусть  $Y_{k+1} = (y_k, y_{k+1})$  — упорядоченная пара элементов пространства  $H$ ,  $D_1$  и  $D_2$  — линейные операторы из  $H$  в  $H$ ,  $D_1 = D_1^* > 0$ ,  $D_2 = D_2^* > 0$ . Обозначим

$$\|Y_{k+1}\|_{(\rho)}^2 = \frac{1}{4} (D_1(y_{k+1} + \rho y_k), y_{k+1} + \rho y_k) + \frac{1}{4} (D_2(y_{k+1} - \rho y_k), y_{k+1} - \rho y_k), \quad (7)$$

где  $\rho > 0$  — произвольное число. Отсюда видно, что  $\|Y_{k+1}\|_{(\rho)} > 0$  и является нормой при  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ . Если же  $D_1 \geq 0$ ,  $D_2 \geq 0$ , то  $\|Y_{k+1}\|_{(\rho)}$  — полунорма.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad (8)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}, \quad \kappa_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} = \frac{1}{2\tau_0}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}}{1 + \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}}, \quad (9)$$

$$q_n = \rho_1^n \left( 1 + \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} n \right). \quad (10)$$

Нашей целью является получение для решения задачи (6) априорной оценки вида

$$\|Z_{n+1}\|_{(\rho)} \leq \rho \|Z_n\|_{(\rho)} \leq \rho^n \|Z_1\|_{(\rho)}, \quad Z_{n+1} = (z_n, z_{n+1}), \quad (11)$$

из которой при  $\rho < 1$  следует сходимость итераций по схеме (5). Оператор  $B$  и параметры  $\tau$ ,  $\kappa$  должны быть выбраны из условия минимума  $\rho$ . Сначала из этого условия выбираем  $\tau$  и  $\kappa$  при фиксированном  $B$ .

## 2. Выбор итерационных параметров.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (3), (4). Тогда для решения задачи (6) при

$$\tau = \tau_1, \quad \kappa = \kappa_1$$

имеет место априорная оценка

$$\|Z_{n+1}\|_{(\rho_1)} \leq \rho_1^n \|Z_1\|_{(\rho_1)}, \quad (12)$$

где  $\|Z_{n+1}\|_{(\rho_1)}$  определяется по формуле (7) при  $\rho = \rho_1$ ,  $D_1 = A - \gamma_1 B$ ,  $D_2 = \gamma_2 B - A$ , а  $\tau_1$  и  $\kappa_1$  даются формулами (9).

**Доказательство.** Положим в (6)  $z_k = \rho^k v_k$ , где  $\rho > 0$  — произвольное число. Для  $v_k$  после очевидных преобразований получаем задачу

$$\left. \begin{aligned} \tilde{B} \frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2\tau} + \tilde{R}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + \tilde{A}v_k = 0, \\ k = 1, 2, \dots, \quad v_1 = \rho z_1, \quad v_0 = z_0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



с операторами

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A - \frac{2\nu(1-2\kappa\tau\nu)}{\tau(1-\nu^2)} B, & \tilde{R} &= \frac{\kappa\tau(1+\nu^2)-\nu}{\tau(1-\nu^2)} B, \\ \tilde{B} &= \frac{(1+\nu^2)-4\kappa\tau\nu}{1-\nu^2} B, & \nu &= \frac{1-\rho}{1+\rho}.\end{aligned}$$

Согласно гл. VI, § 2 схема (13) устойчива в полунорме  $\|V_{n+1}\|_{(1)}$ , где  $V_{n+1}$  — упорядоченная пара элементов,  $V_{n+1} = (v_n, v_{n+1})$ , если выполнены условия

$$\tilde{A} = \tilde{A}^* > 0, \quad \tilde{B} = \tilde{B}^* \geq 0, \quad \tilde{R} = \tilde{R}^* > 0, \quad \tilde{R} \geq \tilde{A}/4. \quad (14)$$

Приравнивая  $\tilde{B}$  нулю, находим

$$\kappa = \frac{1+\nu^2}{4\tau\nu}. \quad (15)$$

После подстановки этого выражения в формулы для  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{R}$ , получим

$$\tilde{R} = \frac{1-\nu^2}{4\tau\nu} B, \quad \tilde{A} = A - \frac{\nu}{\tau} B, \quad \tilde{R} - \frac{1}{4} \tilde{A} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\nu\tau} B - A \right).$$

Требования  $\tilde{A} \geq 0$ ,  $\tilde{R} \geq \tilde{A}/4$  будут выполнены, если

$$\frac{\nu}{\tau} B \leq A \leq \frac{1}{\nu\tau} B.$$

Сравнивая эти неравенства с (4), видим, что параметры  $\nu$  и  $\tau$  можно найти из условий

$$\gamma_1 = \frac{\nu}{\tau}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\tau\nu}. \quad (16)$$

Отсюда получим

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} = \sqrt{\xi}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} = \tau_1, \quad \rho = \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}.$$

После подстановки этих выражений в (15) определим  $\kappa = \kappa_1 = (\gamma_1 + \gamma_2)/4$ . Из предыдущего ясно, что минимум  $\rho$  (максимум  $\xi$ ) достигается лишь при условиях (16).

Для  $v$  мы получили задачу

$$\tilde{R}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + \tilde{A}v_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad v_1 = \rho_1 z_1, \quad v_0 = z_0,$$

$$\text{где } \tilde{R} = \frac{1}{4}(\gamma_2 - \gamma_1) B > 0, \quad \tilde{A} = A - \gamma_1 B = D_1 \geq 0.$$

Так как  $\frac{1}{4} D_2 = \tilde{R} - \frac{1}{4} \tilde{A} = \frac{1}{4}(\gamma_2 B - A) \geq 0$ , то имеет место оценка (14). Подставляя в (14)  $v_k = \rho_1^{-k} z_k$ , получим

$$\|Z_{k+1}\|_{(\rho_1)} \leq \rho_1^k \|Z_1\|_{(\rho_1)}, \quad (17)$$

где норма  $\|Z_{k+1}\|_{(\rho_1)}^2$  определена тождеством (7). Так как  $D_1 \geq 0$ ,  $D_2 \geq 0$ , то  $\|\cdot\|_{(\rho_1)}$  — полунорма. Границы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на практике определяются неточно. Пусть  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  — вычисленные значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , так что  $\tilde{\gamma}_1 < \gamma_1$ ,  $\tilde{\gamma}_2 > \gamma_2$ . Тогда  $\kappa_1$ ,  $\tau_1$ ,  $\rho_1$  выражаются через  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  по (9), (10) и  $\tilde{D}_1 = A - \tilde{\gamma}_1 B \geq \frac{1}{4}(\gamma_1 - \tilde{\gamma}_1) B > 0$ ,  $\tilde{D}_2 = \tilde{\gamma}_2 B - A \geq \frac{1}{4}(\tilde{\gamma}_2 - \gamma_2) B > 0$ , т. е.  $\|Z_{k+1}\|_{(\rho_1)}$  — норма.

Имея априорную оценку для однородного уравнения (6), нетрудно оценить решение неоднородного уравнения (5а).

Мы рассматривали схему (5) с произвольными начальными данными  $y_0$  и  $y_1$ . Значение  $y_1$  можно определять по произвольному  $y_0$ , пользуясь двухслойной итерационной схемой

$$B \frac{y_1 - y_0}{\tau_0} + Ay_0 = f, \quad \text{где} \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (18)$$

Теорема 1 при этом сохраняет силу.

**3. Явная схема.** Хорошо известна явная ( $B = E$  — единичный оператор) трехслойная схема с произвольным нулевым приближением  $y_0$  и первым приближением  $y_1$ , определяемым по двухслойной схеме (18) с оптимальным значением  $\tau = \tau_0$  (см. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева [1]).

Рассмотрим эту явную схему для уравнения

$$Cv = \varphi, \quad (19)$$

где  $C$  — самосопряженный оператор с границами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$C = C^*, \quad \gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_2 \geq \gamma_1 > 0. \quad (20)$$

Явная схема имеет вид

$$\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2\tau_1} + \kappa_1(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) + Cx_k = \varphi, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$\frac{x_1 - x_0}{\tau_0} + Cx_0 = \varphi, \quad x_0 - \text{произвольный вектор из } H. \quad (22)$$

Выразим  $x_{k+1}$  через  $x_k$  и  $x_{k-1}$ :

$$x_{k+1} = \frac{4\tau_1\kappa_1}{1 + 2\tau_1\kappa_1} \left( E - \frac{1}{2\kappa_1} C \right) x_k - \frac{2\tau_1\kappa_1 - 1}{2\tau_1\kappa_1 + 1} x_{k-1} + \frac{2\tau_1}{1 + 2\tau_1\kappa_1} \varphi.$$

Подставляя сюда выражения (9) для  $\tau_1$  и  $\kappa_1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= (1 + \alpha) Sx_k - \alpha x_{k-1} + (1 + \alpha) \tau_0 \varphi, \\ x_1 &= Sx_0 + \tau_0 \varphi, \quad x_0 - \text{произвольный вектор,} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $S = E - \tau_0 C$  — оператор перехода двухслойной схемы с  $\tau = \tau_0 = 1/(2\kappa_1) = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ ,

$$\alpha = \frac{2\tau_1\kappa_1 - 1}{2\tau_1\kappa_1 + 1} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2 + 2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} = \left( \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}} \right)^2, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

т. е.

$$\alpha = \rho_1^2. \quad (24)$$

Схему (23) обычно получают так. Записывают сначала уравнение (19) в так называемом подготовленном виде, т. е. в виде уравнения

$$v = Sv + \tau\varphi, \quad S = E - \tau C,$$

и выбирают  $\tau$  так, чтобы  $\|S\|$  была минимальна. Для этого, как было показано в § 1, надо положить  $\tau = \tau_0$ :

$$v = Sv + \tau_0\varphi, \quad S = E - \tau_0 C. \quad (25)$$

К этому уравнению и применяют явную схему (23).

В силу теоремы 1 для схемы (23) верна оценка (17) при  $B = E$ .

Рассмотрим теперь схему

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= (1 + \alpha) Sx_k - \alpha x_{k-1} + (1 + \alpha) \tau_0\varphi, \quad \alpha = \rho_1^2, \\ x_0 \text{ и } x_1 &\text{ — произвольные векторы из } H. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Она отличается от (23) только произволом в выборе  $x_1$ . Скорость сходимости схем (23) и (26) в составной норме  $\|\cdot\|_{(\rho)}$  одна и та же:

$$\ln \frac{1}{\rho_1} = \ln \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}} = O(2\sqrt{\xi}), \quad \xi \rightarrow 0.$$

#### 4. Оценка скорости сходимости явной схемы.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (20). Тогда при  $\alpha = \rho_1^2$  для задачи

$$x_{k+1} = (1 + \alpha) Sx_k - \alpha x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x_1 = Sx_0, \quad x_0 \in H, \quad (27)$$

где  $S = E - \tau_0 C$ , верна априорная оценка

$$\|x_n\| \leq q_n \|x_0\|, \quad q_n = \rho_1^n \left( 1 + \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} n \right). \quad (28)$$

**Доказательство.** Последовательно применяя уравнение (27), получим

$$x_{n+1} = \mathcal{P}_n(S) x_1 + \mathcal{R}_{n-1}(S) x_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где  $\mathcal{P}_n(S)$  и  $\mathcal{R}_{n-1}(S)$  — операторные полиномы степени  $n$  и  $n-1$  соответственно. Подставляя (29) в уравнение (27), получим,

в силу произвольности  $x_0$ , что  $\mathcal{R}_n$  и  $\mathcal{P}_n$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\mathcal{P}_{n+1}(S) = (1 + \alpha) S \mathcal{P}_n(S) - \alpha \mathcal{P}_{n-1}(S), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (30)$$

$$\mathcal{R}_{n+1}(S) = (1 + \alpha) S \mathcal{R}_n(S) - \alpha \mathcal{R}_{n-1}(S), \quad n = 1, 2, \dots \quad (31)$$

Из уравнений (27) и (29) при  $k = n = 1$  и  $k = n = 2$  следует:

$$\mathcal{P}_1(S) = (1 + \alpha) S, \quad \mathcal{R}_0(S) = -\alpha E,$$

$$\mathcal{P}_2(S) = (1 + \alpha)^2 S^2 - \alpha E, \quad \mathcal{R}_1(S) = -\alpha(1 + \alpha) S.$$

Чтобы формула (30) была верна и для  $n = 1$ , определим  $\mathcal{P}_0(S)$  из соотношения

$$\alpha \mathcal{P}_0(S) = (1 + \alpha) S \mathcal{P}_1(S) - \mathcal{P}_2(S),$$

т. е.  $\mathcal{P}_0(S) = E$ .

Таким образом для  $\mathcal{P}_n$  и  $\mathcal{R}_n$  выполняются одни и те же соотношения (30) с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_0(S) &= E, & \mathcal{R}_0(S) &= -\alpha E, \\ \mathcal{P}_1(S) &= (1 + \alpha) S, & \mathcal{R}_1(S) &= -\alpha(1 + \alpha) S. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{R}_n(S) = -\alpha \mathcal{P}_n(S)$$

и формула (29) принимает вид

$$x_{n+1} = \mathcal{P}_n(S) x_1 - \alpha \mathcal{P}_{n-1}(S) x_0. \quad (33)$$

Положим

$$\mathcal{P}_n(S) = \rho_1^n Q_n \left( \frac{1}{\rho_0} S \right) = \rho_1^n Q_n(\bar{S}), \quad \bar{S} = \frac{1}{\rho_0} S.$$

Подставляем это выражение в (30):

$$\rho_1^{n+1} Q_{n+1}(\bar{S}) = (1 + \alpha) \rho_1^n \rho_0 \bar{S} Q_n(\bar{S}) - \alpha \rho_1^{n-1} Q_{n-1}(\bar{S}), \quad \alpha = \rho_1^2.$$

Разделим обе части на  $\rho_1^{n+1}$  и учтем, что

$$\rho_0 = \frac{2\rho_1}{1 + \rho_1^2}.$$

В результате получим для  $Q_n$  рекуррентную формулу

$$Q_{n+1}(\bar{S}) = 2\bar{S} Q_n(\bar{S}) - Q_{n-1}(\bar{S}) \quad (34)$$

с дополнительным условием

$$Q_0(\bar{S}) = E, \quad Q_1(\bar{S}) = 2\bar{S},$$

где

$$-E \leq \bar{S} = \frac{1}{\rho_0} S \leq E.$$

Отсюда видно, что  $Q_n(t)$  есть полином П. Л. Чебышева второго рода (см. В. Л. Гончаров [1]),

$$Q_n(t) = U_n(t), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

где

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \quad U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t.$$

Многочлены  $U_n(t)$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} U_{n+1}(t) &= 2tU_n(t) - U_{n-1}(t), \quad n \geq 1, \\ T_n(t) &= U_n(t) - tU_{n-1}(t), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где  $T_n(t)$  — полином П. Л. Чебышева первого рода.

Для многочленов  $U_n(t)$  верна оценка

$$|U_n(t)| \leq n+1, \quad |t| \leq 1. \quad (36)$$

Перепишем теперь формулу (33):

$$x_{n+1} = \rho_1^n U_n(\bar{S}) x_1 - \rho_1^{n+1} U_{n-1}(\bar{S}) x_0. \quad (37)$$

Учитывая рекуррентные соотношения (35), получим

$$x_{n+1} = \rho_1^{n+1} \left( U_n(\bar{S}) \left( \frac{1}{\rho_1} x_1 - \bar{S} x_0 \right) + T_{n+1}(\bar{S}) x_0 \right), \quad (38)$$

где  $T_{n+1}(t)$  — полином П. Л. Чебышева первого рода. Используем тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} x_1 - \bar{S} x_0 &= \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \frac{x_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} (x_1 - S x_0) = \\ &= \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} \frac{x_1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} (x_1 - S x_0). \end{aligned} \quad (39)$$

Нам понадобятся следующие неравенства (см. (12) из § 2 и (36)):

$$\|U_n(\bar{S})\| \leq \max_{|t| \leq 1} |U_n(t)| \leq n+1 \quad \text{при} \quad \|\bar{S}\| \leq 1, \quad (40)$$

$$\|T_n(\bar{S})\| \leq \max_{|t| \leq 1} |T_n(t)| \leq 1 \quad \text{при} \quad \|\bar{S}\| \leq 1. \quad (41)$$

Подставляя (39) в (38) и учитывая (40), (41), будем иметь

$$\|x_{n+1}\| \leq \rho_1^{n+1} \left( \|x_0\| + \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} \frac{n+1}{\rho_0} \|x_1\| + \frac{n+1}{\rho_0} \|x_1 - S x_0\| \right). \quad (42)$$

Если  $x_1 = Sx_0$ , то отсюда следует (28). Теорема 8 доказана. Если  $x_1$  — любой вектор, то из (37) и (36) получаем

$$\|x_n\| \leq n\rho_1^{n-1} \|x_1\| + (n-1)\rho_1^n \|x_0\|. \quad (43)$$

Решение уравнения  $x_{k+1} = (1+\alpha)Sx_k - \alpha x_{k-1} + \tilde{\varphi}_k$ ,  $x_0 = x_1 = 0$ ,

следуя гл. VI, § 3, ищется в виде  $x_k = \sum_{j=1}^k \omega_{k,j}$ , где  $\omega_{k+1,j} =$

$= (1+\alpha)S\omega_{k,j} - \alpha\omega_{k-1,j}$  при  $k > j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\omega_{j,j} = 0$ ,  $\omega_{j+1,j} = \tilde{\varphi}_j$ . Отсюда  $\|x_k\| \leq \|\tilde{\varphi}\| / (1-\rho_1)^2 < \|\tilde{\varphi}\| / \xi$ , где  $\xi = \gamma_1/\gamma_2$ ,

$\|\tilde{\varphi}\| = \max_{1 \leq j \leq k} \|\tilde{\varphi}_j\|$ . Оценка

$$\|x_k\| \leq \|\tilde{\varphi}\| / \xi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (44)$$

вместе с (43) выражает вычислительную устойчивость схемы (23). Полагая  $\tilde{\varphi} = \tau_0(1+\alpha)\varphi = (1-\rho_1)^2\gamma_1$ , получаем для (23) при  $x_0 = x_1 = 0$  оценку  $\|x_k\| \leq \|\varphi\|/\gamma_1$ .

**5. Априорные оценки для неявной схемы в энергетических пространствах  $H_A$  и  $H_B$ .** Рассмотрим теперь неявную схему (5) с  $B \neq E$  и начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} y_0 - \text{произвольный вектор из } H, \\ B \frac{y_1 - y_0}{\tau_0} + Ay_0 = f. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Нетрудно убедиться в том, что неявная схема (5), (45) и явная схема (23) эквивалентны при

$$x_n = A^{1/2}y_n, \quad C = C_1 = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}, \quad \varphi = A^{1/2}B^{-1}f, \quad (46)$$

или при

$$x_n = B^{1/2}y_n, \quad C = C_2 = B^{-1/2}AB^{-1/2}, \quad \varphi = B^{-1/2}f. \quad (47)$$

В самом деле, применяя к (5), (45) оператор  $A^{1/2}B^{-1}$  и обозначая  $x_n = A^{1/2}y_n$ , получим схему (23) с  $C = C_1$ . Обратно, заменяя в (23)  $C = C_1$  и  $x_n = A^{1/2}y_n$  и действуя затем оператором  $BA^{-1/2}$ , получаем неявную схему (5), (45).

Условия (20) равносильны условиям

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0. \quad (48)$$

Из (46) и (47) видно, что

$$\|x_n\| = \|y_n\|_A = \sqrt{(Ay_n, y_n)} \quad \text{при } C = C_1, \quad x_n = A^{1/2}y_n,$$

$$\|x_n\| = \|y_n\|_B = \sqrt{(By_n, y_n)} \quad \text{при } C = C_2, \quad x_n = B^{1/2}y_n.$$

Неявную схему можно трактовать, как явную схему для уравнения

$$Cv = \varphi,$$

эквивалентного уравнению  $Au = f$  при

$$C = C_1, \quad v = A^{1/2}u, \quad \varphi = A^{1/2}B^{-1}f$$

или при  $C = C_2, \quad v = B^{1/2}u, \quad \varphi = B^{-1/2}f$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (48). Тогда для неявной схемы (5), (45) при  $\tau = \tau_1$  и  $\kappa = \kappa_1$  верна оценка

$$\|y_n - u\|_D \leq q_n \|y_0 - u\|_D, \quad D = A \quad \text{или} \quad D = B. \quad (49)$$

**Замечание.** Можно показать, что при тех же условиях (48) и дополнительном требовании перестановочности операторов  $A$  и  $B, AB = BA$ , выполняется оценка

$$\|Ay_n - f\| \leq q_n \|Ay_0 - f\|. \quad (50)$$

**6. Факторизованные схемы.** Оператор  $B$  выбирается из тех же соображений, что и в случае двухслойной схемы (см. §§ 2, 3). Одними и теми же операторами можно пользоваться как для двухслойных, так и для трехслойных схем. В частности, можно взять факторизованный оператор

$$B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2), \quad R_1 + R_2 = R \quad (51)$$

с треугольными операторами  $R_1$  и  $R_2 = R_1^*$ . Операторы  $B$  и  $R$  эквивалентны с постоянными  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$ :

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 B \leq R \leq \overset{\circ}{\gamma}_2 B, \quad \overset{\circ}{\gamma}_1 > 0, \quad R = R^* > 0, \quad B = B^* > 0, \quad (52)$$

$A$  и  $R$  эквивалентны с постоянными  $c_1, c_2$ :

$$c_1 R \leq A \leq c_2 R, \quad c_2 \geq c_1 > 0, \quad (53)$$

так что условия (48) выполнены с постоянными

$$\gamma_1 = c_1 \overset{\circ}{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = c_2 \overset{\circ}{\gamma}_2.$$

Постоянные  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$  были определены в § 2. Если выполнены условия  $R \geq \delta E, \|R_2 x\|^p \leq \frac{\Delta}{4} (Rx, x)$  для всех  $x \in H$ , то постоянные  $\overset{\circ}{\gamma}_1$  и  $\overset{\circ}{\gamma}_2$  для факторизованного оператора (51) при  $\omega = \omega_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$  равны

$$\overset{\circ}{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\eta})}, \quad \overset{\circ}{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \quad \frac{\overset{\circ}{\gamma}_1}{\overset{\circ}{\gamma}_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Если  $R = A$ , то  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \overset{\circ}{\gamma}_1$ ,  $\gamma_2 = \overset{\circ}{\gamma}_2$ ,

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}, \quad \sqrt{\xi} = \left( \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}} \right)^{1/2},$$

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\eta}} - \sqrt{2} \sqrt[4]{\eta}}{\sqrt{1+\sqrt{\eta}} + \sqrt{2} \sqrt[4]{\eta}}.$$

При  $\eta \rightarrow 0$  коэффициент  $\rho_1$  имеет следующую асимптотику

$$\rho_1 \approx 1 - 2\sqrt{\xi} \approx 1 - 2\sqrt{2} \sqrt[4]{\eta},$$

а скорость сходимости итераций

$$\ln(1/\rho_1) = O\left(2\sqrt{2} \sqrt[4]{\eta}\right).$$

Это значит, что число итераций пропорционально  $1/\sqrt[4]{\eta}$ . Напомним, что для двухслойной схемы с оператором (51) и постоянным  $\tau = \tau_0$  скорость сходимости итераций равна

$$\ln(1/\rho_0) = O(4\sqrt{\eta}).$$

В случае разностной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в  $p$ -мерной ступенчатой области и кубической сетки с шагом  $h$ , имеем  $\eta = O(h^2)$ ,  $\sqrt{\eta} = O(h)$  и, таким образом, число итераций для трехслойной схемы с факторизованным оператором (51) есть величина  $O\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \ln(1/\epsilon)\right)$ . Решение задачи Дирихле в  $p$ -мерной ступенчатой области для уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f, \quad 0 < c_1 \leq k \leq c_2$$

требует  $O\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \ln(1/\epsilon)\right)$  итераций с общим объемом работы  $O(h^{-(p+1/2)} \ln(1/\epsilon))$ .

**7. Двухступенчатый метод.** Трехслойную итерационную схему (5), (45) можно трактовать как метод поправок:

$$\left. \begin{aligned} y_{k+1} &= (1 + \alpha) y_k - \alpha y_{k-1} - (1 + \alpha) \tau_0 \omega_k, & \alpha &= \rho_1^2, \\ y_1 &= y_0 - \tau_0 \omega_0, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где  $\omega_k = B^{-1} r_k$  — поправка,  $r_k = A y_k - f$  — невязка.

Определяя  $\omega$  как решение уравнения

$$R\omega = r_k \quad (55)$$

каким-либо итерационным методом с нулевым начальным приближением  $\omega^{(0)} = 0$ , мы получим двухступенчатый трехслойный



метод. Зададимся числом  $q$ ,  $0 < q < 1$ , и сделаем  $m$  итераций, где  $m$  такое, что выполняется условие

$$\| \omega^{(m)} - \omega \|_R \leq q < 1.$$

Тогда, как было показано в § 3, п. 5, для поправки  $\omega_k = \omega^{(m)}$  получаем уравнение

$$B\omega_k = r_k, \quad B = R^{1/2}(E - \tilde{T}_m)^{-1} R^{1/2},$$

где  $\tilde{T}_m$  — разрешающий оператор схемы внутренних итераций, так что

$$R^{1/2}(\omega^{(m)} - \omega) = \tilde{T}_m(0 - R^{1/2}\omega) = -\tilde{T}_m R^{1/2}\omega.$$

Скорость сходимости двухступенчатого трехслойного метода следует из теоремы 3, где

$$q_n = \rho_1^n \left( 1 + \frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} n \right), \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{c_1}{c_2} \frac{1 - q}{1 + q}.$$

В работе Гана [1] двухступенчатый трехслойный метод применялся для решения разностной задачи Дирихле для уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f, \quad 0 < c_1 \leq k \leq c_2$$

с переменными коэффициентами. Внутренние итерации для решения уравнения (1) проводились по методу переменных направлений с оптимальным набором параметров. Для случая малых  $c_1/c_2$  было отмечено существенное ускорение итераций по сравнению с двухступенчатой двухслойной схемой. В работе Вашпреса [3] внешние итерации проводились по методу Ланцоша, а внутренние — по методу переменных направлений.

## Дополнение

### НЕКОТОРЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА ПРОГОНКИ

#### § 1. Поточковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами \*)

Рассмотрим вариант метода прогонки, применяемый при решении задач с сильно меняющимися коэффициентами. Примерами таких задач являются задачи гидродинамики с теплопроводностью и магнитной гидродинамики, где коэффициенты теплопроводности, электропроводности сильно зависят от термодинамических параметров среды. В случае тепловых задач могут иметь место адиабатические участки, где теплопроводность отсутствует, а также изотермические участки, где теплопроводность бесконечно велика. В магнитных задачах — соответственно, идеально проводящие и неэлектропроводные участки. Поясним существо метода на модельной задаче: найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

и дополнительным условиям

$$\left. \begin{aligned} -k \frac{\partial u}{\partial x} \lambda^{(1)} + \kappa^{(1)} u &= v^{(1)} & \text{при } x=0, \\ k \frac{\partial u}{\partial x} \lambda^{(2)} + \kappa^{(2)} u &= v^{(2)} & \text{при } x=1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\kappa^{(\alpha)} \geq 0$ ,  $\lambda^{(\alpha)} = 0, 1$ ,  $\kappa^{(\alpha)} + \lambda^{(\alpha)} > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Коэффициент  $k(x, t)$  — сильно меняющаяся функция

$$0 \leq k < \infty. \quad (3)$$

Когда коэффициент теплопроводности  $k(x, t)$  стремится к бесконечности, а производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$  — к нулю, величина потока  $w(x, t) = -k(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  остается конечной. Поэтому при решении задачи (1), (2) в качестве искомой функции, кроме  $u(x, t)$ , введем также поток  $w(x, t)$ .

Предположим наличие между искомой функцией  $u(x, t)$  и потоком  $w(x, t)$  связи вида

$$\alpha u + \beta w = \gamma. \quad (4)$$

\*) См. Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский [1], [2].

Так как коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в (4) определены с точностью до множителя, то на функции  $\alpha$  и  $\beta$  следует наложить дополнительное условие. Например, можно потребовать

$$\alpha + \beta = 1. \quad (5)$$

Впрочем, в зависимости от типа краевой задачи, характера коэффициента  $k(x, t)$  ( $0 < c_1 \leq k(x, t) < \infty$ ,  $0 \leq k(x, t) \leq c_2$  и т. п.) можно вместо (5) на  $\alpha$  и  $\beta$  налагать другие условия. Например, иногда удобно считать  $\alpha = 1$  либо  $\beta = 1$  или полагать  $\alpha + C(x)\beta = 1$ ,  $C(x)$  — некоторая функция,  $C(x) > 0$ .

Для решения задачи (1)–(3) введем сетку

$$\{x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{N-1/2}\}$$

с шагами  $h_0/2 = x_{1/2}$ ,  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $h_N/2 = 1 - x_{N-1/2}$ . В узлах  $x_{i-1/2}$  будем вычислять сеточную функцию  $y_{i-1/2}^j$ , соответствующую искомой функции  $u(x_{i-1/2}, t_j)$ .

Введем также сетку

$$\{x_0 = 0, x_i = x_{i-1} + \bar{h}_{i-1/2}, i = 1, 2, \dots, N, x_N = 1\},$$

где  $\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ . В узлах с целыми индексами будем определять сеточную функцию  $W_i^j$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) — аналог потока  $w(x_i, t_j) = -ku' \big|_{x=x_i}^{t=t_j}$ .

В узлах  $x_{i-1/2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  уравнение (1) аппроксимируем схемой

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i-1/2}^{j+1} - y_{i-1/2}^j}{\tau} &= \frac{W_{i-1}^{j+1} - W_i^{j+1}}{\bar{h}_{i-1/2}} + \Phi_{i-1/2}^{j+1}, \\ W_i^{j+1} &= -a_i^{j+1} \frac{y_{i+1/2}^{j+1} - y_{i-1/2}^{j+1}}{h_i}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $a_i^j$  и  $\Phi_{i-1/2}^j$  — сеточные функции, являющиеся аналогами коэффициентов  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$ . Например, положим  $a_i^j = k(x_i, t_j)$ ,  $\Phi_{i-1/2}^j = f(x_{i-1/2}, t_j)$ . Используя разложение  $u_{1/2} = u_0 + h_0 u'_0/2 + O(h_0^2)$  и полагая  $w_0 = -ku' \big|_{x=0}$ , краевое условие (2) при  $x=0$  аппроксимируем разностным выражением

$$\left( \lambda^{(1)} + \frac{\kappa^{(1)} h_0/2}{a_0^{j+1}} \right) W_0^{j+1} + \kappa^{(1)} y_{1/2}^{j+1} = \nu^{(1)}. \quad (7)$$

Аналогично аппроксимируется краевое условие (2) при  $x=1$ :

$$-\left( \lambda^{(2)} + \frac{\kappa^{(2)} h_N/2}{a_N^{j+1}} \right) W_N^{j+1} + \kappa^{(2)} y_{N-1/2}^{j+1} = \nu^{(2)}. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 2a_0/h_0, \quad b_i = a_i/h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad b_N = 2a_N/h_N, \\ C_{i-1/2} &= \bar{h}_{i-1/2}/\tau, \quad F_{i-1/2} = \Phi_{i-1/2} \bar{h}_{i-1/2} + C_{i-1/2} y_{i-1/2}^j. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Объединяя (6) – (8), учитывая (9), приходим к задаче

$$\left. \begin{aligned} W_{i-1} - W_i - C_{i-1/2} y_{i-1/2} &= -F_{i-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_{i-1/2} - y_{i+1/2} &= W_i / b_i, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^{(1)} + \kappa^{(1)} / b_0) W_0 + \kappa^{(1)} y_{1/2} &= v^{(1)}, \\ -(\lambda^{(2)} + \kappa^{(2)} / b_N) W_N + \kappa^{(2)} y_{N-1/2} &= v^{(2)}, \\ \lambda^{(\alpha)} + \kappa^{(\alpha)} > 0, \kappa^{(\alpha)} \geq 0, \lambda^{(\alpha)} = 0, &1, \alpha = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Предположим, что существует связь

$$y_{i-1/2} \alpha_{i-1} + \beta_{i-1} W_{i-1} = \gamma_{i-1} \quad (12)$$

и найдем рекуррентные формулы для вычисления прогоночных коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  и искомым функций  $y_{i-1/2}$ ,  $W_i$ . Поскольку в данном случае  $C_{i-1/2} = \hbar_{i-1/2} / \tau > 0$ , то оказывается удобным дополнительное условие нормировки взять в виде

$$\alpha_{i-1} + C_{i-1/2} \beta_{i-1} = 1. \quad (13)$$

Пусть получено соотношение (12) при условии (13), связывающее функции  $y_{i-1/2}$ ,  $W_{i-1}$  и прогоночные коэффициенты  $\alpha_{i-1}$ ,  $\beta_{i-1}$ ,  $\gamma_{i-1}$  в точках  $x_{i-1}$  и  $x_{i-1/2}$ . Исключая  $y_{i-1/2}$  и  $W_{i-1}$  из (12), (10) и требуя, чтобы соотношение (12) выполнялось в точке  $x_i$ ,  $x_{i+1/2}$  (т. е. имело бы место равенство  $y_{i+1/2} \alpha_i + \beta_i W_i = \gamma_i$ ), приходим к соотношениям

$$\alpha_i = \frac{1}{\delta_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{\delta_i} \left( \beta_{i-1} + \frac{1}{b_i} \right), \quad \gamma_i = \frac{1}{\delta_i} (\beta_{i-1} F_{i-1/2} + \gamma_{i-1}), \quad (14)$$

где  $1/\delta_i$  – произвольный пока множитель. Потребуем, чтобы в точках  $x_i$ ,  $x_{i+1/2}$  выполнялось соотношение (13), т. е.  $\alpha_i + C_{i+1/2} \beta_i = 1$ . Тогда находим,

$$\delta_i = 1 + C_{i+1/2} (\beta_{i-1} + 1/b_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (15)$$

Из условий  $\alpha_0 + \beta_0 C_{1/2} = 1$ ,  $y_{1/2} \alpha_0 + \beta_0 W_0 = \gamma_0$  и краевого условия

$$(\lambda^{(1)} + \kappa^{(1)} / b_0) W_0 + \kappa^{(1)} y_{1/2} = v^{(1)}$$

имеем

$$\alpha_0 = \kappa^{(1)} / \Delta_0, \quad \beta_0 = (\lambda^{(1)} + \kappa^{(1)} / b_0) / \Delta_0, \quad \gamma_0 = v^{(1)} / \Delta_0,$$

где

$$\Delta_0 = \kappa^{(1)} + C_{1/2} (\lambda^{(1)} + \kappa^{(1)} / b_0). \quad (16)$$

Для вычисления  $y_{i-1/2}$  и  $W_{i-1/2}$  можно пользоваться рекуррентными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} y_{i-1/2} &= - (W_i - F_{i-1/2}) \beta_{i-1} + \gamma_{i-1}, \quad i = N, N-1, \dots, 1, \\ W_{i-1} &= (W_i - F_{i-1/2}) (1 - C_{i-1/2} \beta_{i-1}) + C_{i-1/2} \gamma_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для определения значения  $W_N$  из второго граничного условия (11) и первого рекуррентного соотношения (17) при  $i = N$ , получаем

$$W_N = \frac{-v^{(2)} + \kappa^{(2)} (\gamma_{N-1} + \beta_{N-1} F_{N-1/2})}{\lambda^{(2)} + \kappa^{(2)} / b_N + \kappa^{(2)} \beta_{N-1}}. \quad (18)$$

Отметим, что коэффициент  $\alpha_i$  при счете не используется. При выбранной нормировке (13) ( $C_{i-1/2} > 0$ ) прогоночные формулы оказываются наиболее простыми.

При больших коэффициентах  $a_i^j = k(x_i, t_j)$  вычисление потока по формуле

$$W_i = -b_i (y_{i+1/2} - y_{i-1/2}), \quad b_i = a_i/h_i$$

приводит к существенной потере точности. Это и послужило причиной введения потока  $W_i$  в качестве дополнительной искомой функции и вычисления его по рекуррентному соотношению (17).

В том случае, когда величина  $b_i = a_i/h_i$  оказывается малой, например,  $0 \leq b_i < 1$  вместо формул (14), (16) следует пользоваться формулами

$$\beta_0 = (x^{(1)} + \lambda^{(1)} b_0) / \tilde{\Delta}_0, \quad \gamma_0 = v^{(1)} b_0 / \tilde{\Delta}_0, \\ \tilde{\Delta}_0 = x^{(1)} b_0 + C_{1/2} (\lambda^{(1)} b_0 + x^{(1)})$$

и

$$\beta_i = \frac{1}{\tilde{\delta}_i} (1 + b_i \beta_{i-1}), \quad \gamma_i = \frac{b_i}{\tilde{\delta}_i} (\beta_{i-1} F_{i-1/2} + \gamma_{i-1}), \\ \tilde{\delta}_i = b_i + C_{i+1/2} (b_i \beta_{i-1} + 1).$$

Из структуры приведенных рекуррентных формул видно, что они устойчивы по отношению к случайной ошибке.

## § 2. Матричная прогонка \*)

Для решения систем разностных уравнений часто используют метод матричной прогонки, который поясняется ниже на частном примере.

Рассмотрим уравнение Шредингера, в случае когда потенциал  $V(x)$  обладает следующими свойствами:  $V(x)$  непрерывен при  $0 < x < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \infty$  при  $x \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow 1$ . Это соответствует краевой задаче

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad (2)$$

где  $i$  — мнимая единица,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  — масса частицы. Без ограничения общности будем считать, что

$$V(x) \geq 0. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$a^2 = \hbar/(2m), \quad q(x) = V(x)/\hbar \quad (4)$$

и представим  $\psi(x, t)$  в виде

$$\psi(x, t) = u(x, t) + iv(x, t), \quad (5)$$

\*) См., например, И. М. Гельфанд и О. В. Локуциевский, дополнение II в книге С. К. Годунова и В. С. Рябенского [1], В. В. Русанов [1], Р. Д. Рихтмайер [1].

где  $u$  и  $v$  — действительная и мнимая части функции  $\psi$ . Из (1), (2) для определения  $u$  и  $v$  получаем задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q(x) v, & 0 < x < 1, \\ -\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x) u, & 0 < t < T, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \operatorname{Re} \psi_0(x) = \bar{u}_0(x), & v(x, 0) &= \operatorname{Im} \psi_0(x) = \bar{v}_0(x), \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0, & u(0, t) &= u(1, t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Введем сетки

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = 1/N\}, \\ \bar{\omega}_\tau &= \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\} \end{aligned}$$

и аппроксимируем задачу (6), (7) системой разностных уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_t &= a^2 \hat{\Delta}_{\bar{x}\bar{x}} - q(x) \hat{v}, & v^0 &= \bar{v}_0(x), \\ -v_t &= a^2 \hat{\Delta}_{\bar{x}\bar{x}} - q(x) \hat{u}, & u^0 &= \bar{u}_0(x), \\ \hat{u}_0 &= \hat{u}_N = \hat{v}_0 = \hat{v}_N = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Запишем систему (8) в векторной форме

$$\vec{Y}_{i+1} - 2\vec{B}_i \vec{Y}_i + \vec{Y}_{i-1} = -\vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \vec{Y}_0 = \vec{Y}_N = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{Y}_i &= \begin{pmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_i = \begin{pmatrix} \frac{v_i h^2}{a^2 \tau} \\ -\frac{u_i h^2}{a^2 \tau} \end{pmatrix}, \\ \vec{B}_i &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{q_i h^2}{2a^2} & -\frac{h^2}{2a^2 \tau} \\ \frac{h^2}{2a^2 \tau} & 1 + \frac{q_i h^2}{2a^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача (9) является частным случаем следующей задачи: найти векторы  $\vec{Y}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), удовлетворяющие уравнению

$$A_i \vec{Y}_{i+1} - B_i \vec{Y}_i + C_i \vec{Y}_{i-1} = -\vec{F}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (11)$$

и краевым условиям

$$A_0 \vec{Y}_1 - B_0 \vec{Y}_0 = -\vec{F}_0, \quad -B_N \vec{Y}_N + C_N \vec{Y}_{N-1} = -\vec{F}_N, \quad (12)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) — квадратные матрицы. Предположим существование матриц  $B_i^{-1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Решение задачи (11), (12) будем искать в виде

$$\vec{Y}_{i-1} = X_i \vec{Y}_i + \vec{Z}_i, \quad i = N, N-1, \dots, 1, \quad (13)$$

где  $X_i$  и  $\vec{Z}_i$  — неопределенные пока матрицы и векторы. Из формулы (13) и уравнения (11) находятся (как и в случае обычной прогонки) рекуррентные

соотношения для вычисления матриц  $X_i$  и векторов  $\vec{Z}_i$ . Из (13) и (12) находятся начальные значения  $X_0, \vec{Z}_0, \vec{Y}_N$ , позволяющие начать счет по рекуррентным формулам. Выпишем рекуррентные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X_{i+1} &= (B_i - C_i X_i)^{-1} A_i, \quad X_1 = B_0^{-1} A_0, \\ \vec{Z}_{i+1} &= (B_i - C_i X_i)^{-1} (C_i \vec{Z}_i + \vec{F}_i), \quad \vec{Z}_1 = B_0^{-1} \vec{F}_0, \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{Y}_N &= (B_N - C_N X_N)^{-1} (C_N \vec{Z}_N + \vec{F}_N), \\ \vec{Y}_{i-1} &= X_i \vec{Y}_i + \vec{Z}_i, \quad i = N, N-1, \dots, 1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Вычисления по формулам (14), (15) можно вести до тех пор, пока матрицы  $B_i - C_i X_i$  остаются невырожденными, что и будем считать выполненным для  $i = 0, 1, \dots, N$ . Задача (14), (15) разрешима и процесс решения устойчив по отношению к случайной ошибке, т. е.

$$\|X_i\| < 1 \text{ при } i = 1, 2, \dots, N,$$

когда выполнены условия

$$\|B_0^{-1} A_0\| < 1, \quad \|B_N^{-1} C_N\| < 1, \quad \|B_i^{-1} A_i\| + \|B_i^{-1} C_i\| < 1 \quad (16)$$

при  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

Для решения системы (9), (10) формулы (14), (15), в которых

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i^{11} & x_i^{12} \\ x_i^{21} & x_i^{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_i = \begin{pmatrix} z_i^1 \\ z_i^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$A_0 = C_N = 0, \quad B_0 = B_N = E, \quad \vec{F}_0 = \vec{F}_N = 0, \quad A_i = C_i = E,$$

$$B_i = 2\vec{B}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

принимают вид

$$\hat{a}_{i-1} = x_i^{11} \hat{a}_i + x_i^{12} \hat{\sigma}_i + z_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\hat{\sigma}_{i-1} = x_i^{21} \hat{a}_i + x_i^{22} \hat{\sigma}_i + z_i^2, \quad \hat{a}_N = \hat{\sigma}_N,$$

где  $x_i^{nm}, z_i^n$  ( $n, m = 1, 2, i = 1, 2, \dots, N$ ) вычисляются по следующим формулам:

$$x_{i+1}^{11} = \frac{1}{\Delta_i} \left( 2 + \frac{q_i h^2}{a^2} - x_i^{12} \right), \quad x_{i+1}^{12} = \frac{1}{\Delta_i} \left( \frac{h^2}{a^2 \tau} + x_i^{12} \right),$$

$$x_{i+1}^{21} = \frac{1}{\Delta_i} \left( -\frac{h^2}{a^2 \tau} + x_i^{21} \right), \quad x_{i+1}^{22} = \frac{1}{\Delta_i} \left( 2 + \frac{q_i h^2}{a^2} - x_i^{11} \right),$$

$$\Delta_i = \left( 1 + \frac{q_i h^2}{2a^2} \right)^2 + \left( \frac{h^2}{2a^2 \tau} \right)^2, \quad x_0^n, \quad m = 0, \quad n, \quad m = 1, 2,$$

$$z_{i+1}^1 = x_{i+1}^{11} \left( z_i^1 + \frac{v_i h^2}{a^2 \tau} \right) + x_{i+1}^{12} \left( z_i^2 - \frac{u_i h^2}{a^2 \tau} \right),$$

$$z_{i+1}^2 = x_{i+1}^{21} \left( z_i^1 + \frac{v_i h^2}{a^2 \tau} \right) + x_{i+1}^{22} \left( z_i^2 - \frac{u_i h^2}{a^2 \tau} \right),$$

$$z_0^1 = z_0^2 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Условие устойчивости (16) приводит к требованию  $2 \|B_i^{-1}\| = \|\tilde{B}_i^{-1}\| < 1$ . Вычислив норму  $\tilde{B}_i^{-1}$ , приходим к условию

$$\|\tilde{B}_i^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{\Delta_i}} < 1,$$

которое очевидно выполнено.

### § 3. Циклическая прогонка \*)

Циклическая прогонка используется для нахождения периодического решения разностного уравнения (или системы разностных уравнений). Подобные задачи возникают при приближенном решении уравнений с частными производными в цилиндрических и сферических координатах.

Рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 &= -f_1, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} &= -f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 &= -f_N. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Такая алгебраическая задача возникает при отыскании периодического,  $y_{i+N} = y_i$ , решения системы трехчленных уравнений  $a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i$  при условии

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i, \quad c_{i+N} = c_i, \quad f_{i+N} = f_i.$$

Относительно коэффициентов системы (1) будем предполагать, что

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > a_i + b_i. \quad (2)$$

Систему (1) запишем в виде

$$A_N \vec{y}_N = -\vec{f}_N, \quad (3)$$

где

$$\vec{y}_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_N = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix},$$

а матрица  $A_N$  имеет вид

$$A_N = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Присутствие отличных от нуля членов в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы (4) не позволяет решать (3) (или (1)) обычным методом прогонки.

\*) См. А. А. Абрамов, В. Б. Андреев [1].



Для решения (3) применяется идея метода окаймления (Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева [1]). Запишем (3) в виде

$$A_{N-1} \vec{y}_{N-1} + \vec{u}_{N-1} y_N = - \vec{f}_{N-1}, \quad (5)$$

$$\vec{v}_{N-1}^* \vec{y}_{N-1} - c_N y_N = - f_N, \quad (6)$$

где

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-2} & -c_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-1} & -c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\vec{u}_{N-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{N-1}^* = \begin{pmatrix} b_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{N-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_{N-1} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Решение уравнения (5) представим в виде

$$\vec{y}_{N-1} = \vec{p}_{N-1} + y_N \vec{q}_{N-1}, \quad (9)$$

где  $\vec{p}_{N-1}$  и  $\vec{q}_{N-1}$  — решения задач

$$A_{N-1} \vec{p}_{N-1} = - \vec{f}_{N-1}, \quad A_{N-1} \vec{q}_{N-1} = - \vec{u}_{N-1}. \quad (10)$$

Поскольку матрица  $A_{N-1}$  является матрицей Якоби, то решения задач (10) могут быть найдены методом обычной прогонки. Из (9) и (6) находим

$$y_N = \frac{f_N + \vec{v}_{N-1}^* \vec{p}_{N-1}}{c_N - \vec{v}_{N-1}^* \vec{q}_{N-1}},$$

$\vec{y}_{N-1}$  находим из (9).

Приведем получающиеся формулы решения задачи (1) — формулы циклической прогонки:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{a_i \gamma_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \\ i &= 2, 3, \dots, N, \quad \alpha_2 = b_2/c_1, \quad \beta_2 = f_1/c_1, \quad \gamma_2 = a_1/c_1, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \\ i &= N-2, \dots, 1, \quad p_{N-1} = \beta_N, \quad q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} y_N &= \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1} p_1}{1 - \alpha_{N+1} q_1 - \gamma_{N+1}}, \quad y_i = p_i + y_N q_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Метод циклической прогонки является устойчивым, так как решения задач (10) ищутся методом прогонки, который устойчив при выполнении условий (2), а знаменатель  $1 - \alpha_{N+1}q_1 - \gamma_{N+1}$  в выражении для  $y_N$  не обращается в нуль.

Действительно, из (2), (11) видно, что

$$\alpha_i < 1, \gamma_i > 0, \alpha_2 + \gamma_2 < 1.$$

Предполагая  $\alpha_i + \gamma_i < 1$ , получаем

$$\alpha_{i+1} + \gamma_{i+1} = \frac{b_i + a_i \gamma_i}{c_i - a_i \alpha_i} < \frac{b_i + a_i - a_i \alpha_i}{c_i - a_i \alpha_i} < 1. \quad (14)$$

Учитывая (12) и (14), находим  $q_{N-1} < 1, q_1 < 1$ . Из всего сказанного следует, что  $1 - \alpha_{N+1}q_1 - \gamma_{N+1} > 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

Абрамов А. А.

1. О влиянии ошибок округления при решении уравнения Лапласа, Вычисл. матем. и вычисл. техн., вып. 1 (1953), 37—40.

Абрамов А. А., Андреев В. Б.

1. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений, ЖВМ и МФ 3, № 2 (1963), 377—381.

Алексидзе М. А.

1. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона, ДАН СССР 147, № 6 (1962), 1271—1273.

Андреев В. Б.

1. Итерационные схемы переменных направлений для численного решения третьей краевой задачи в  $p$ -мерном параллелепипеде, ЖВМ и МФ 5, № 4 (1965), 626—637.
2. О равномерной сходимости некоторых разностных схем, ЖВМ и МФ 6, № 2 (1966), 238—250.
3. Об одном методе численного решения третьей краевой задачи для уравнения параболического типа в  $p$ -мерном параллелепипеде, Сб. «Вычислит. методы и программирование», вып. VI, изд-во МГУ (1967), 64—75.
4. О разностных схемах с расщепляющимся оператором для общих  $p$ -мерных параболических уравнений второго порядка со смешанными производными, ЖВМ и МФ 7, № 2 (1967), 312—321.
5. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений, ЖВМ и МФ 8, № 6 (1968), 1218—1231.
6. О сходимости разностных схем с расщепляющимся оператором, аппроксимирующих третью краевую задачу для параболического уравнения, ЖВМ и МФ 9, № 2 (1969), 337—349.
7. О равномерной сходимости разностных схем для задачи Неймана, ЖВМ и МФ 9, № 6 (1969), 1285—1298.

Анучина Н. Н.

1. Разностные схемы решения задачи Коши для гиперболических симметричных систем, ДАН СССР 154, № 2 (1964), 247—250.

Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.

1. Численные процессы решения дифференциальных уравнений, «Мир», 1969.

Багриновский К. А., Годунов С. К.

1. Разностные схемы для многомерных задач, ДАН СССР 115, № 3 (1957), 431—433.

Бадагадзе В. В.

1. О построении разностных схем для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка, ЖВМ и МФ 6, № 3 (1966), 512—520.

Баклановская В. Ф.

1. Исследование метода сеток решения первой краевой задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации, Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», «Наука», 1964, Дополнение к ЖВМ и МФ 4, № 4 (1964), 228—243.

Бахвалов Н. С.

1. К вопросу о числе арифметических действий при решении уравнения Пуассона для квадрата методом конечных разностей, ДАН СССР 113, № 2 (1957), 252—254.
2. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., астрон., физ., химии, № 5 (1959), 171—195.
3. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор, ЖВМ и МФ 6, № 5 (1966), 861—883.

Бейкер (Baker G. A.)

1. An implicit, numerical method for solving the  $n$ -dimensional heat equation, Quart. of Appl. Math. 17, N 4 (1960), 440—443.

Бейкер и Олифант (Baker G. A., Oliphant T. A.)

1. An implicit, numerical method for solving the two-dimensional heat equation, Quart. of Appl. Math. 17, N 4 (1960), 361—373.

Белухина И. Г.

1. Разностные схемы для решения некоторых статических задач теории упругости, ЖВМ и МФ 8, № 4 (1968), 808—823.
2. Разностные схемы для решения плоской динамической задачи теории упругости со смешанными краевыми условиями, ЖВМ и МФ 9, № 2 (1969), 362—372.

Березин И. С. и Жидков Н. П.

1. Методы вычислений, т. 1, Изд. 3-е, «Наука», 1966.
2. Методы вычислений, т. 2. Физматгиз, 1962.

Бояринцев Ю. Е.

1. О сходимости разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами, Тр. МИАН СССР 74 (1966), 16—37.

О'Брайен, Хайман, Каплан (O'Brien G. G., Hupman M. A., Kaplan S.)

1. A study of the numerical solution of partial differential equations, J. of Math. and Phys. 29, N 4 (1951), 223—251.

Брембл, Хаббард (Bramble J. H., Hubbard B. E.)

1. On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation, Num. Math. 4, N 4 (1962), 313—327.

Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б.

1. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана, ЖВМ и МФ 5, № 5 (1965), 828—840.

Буханан (Buchanan M. L.)

1. A necessary and sufficient condition for stability of difference schemes for initial value problems, J. Soc. Industr. Appl. Math. 11, N 4 (1963), 919—935.

Вазов В., Форсайт Дж.

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963.

Варга Р.

1. Численные методы решения многомерных многогрупповых диффузионных уравнений, Сб. «Теория ядерных реакторов», Госатомиздат, 1963.

Вашпресс (Wachspress E. L.)

1. The numerical solution of boundary value problems, Mathematical Methods for Digital Computers, N. Y., 1960, 121—127.

2. Optimum alternating-direction-implicit iteration parameters for a model problem, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **10**, N 2 (1962), 339—350.
  3. Extended application of alternating-direction-implicit iteration model problem theory, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **11**, N 3 (1963), 994—1016.
  4. Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics, N. Y 1966.
- Вашпресс, Хабетлер (Wachspress E. L., Habetler G. J.)
1. An alternating-direction-implicit iteration technique, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **8**, N 2 (1960), 403—424.
- Вендроф (Wendroff B.)
1. Well-posed problems and stable difference operators, *SIAM J. Numer. Anal.* **5**, N 1 (1968), 71—82.
- Видланд (Widlund O. B.)
1. On the stability of parabolic difference schemes, *Math. of Comput.* **19**, № 89 (1965), 1—13.
  2. Stability of parabolic difference schemes in the maximum norm, *Numer. Math.* **8**, N 2 (1966), 186—202.
- Владимиров В. С.
1. Уравнения математической физики, «Наука», 1967.
- Волков Е. А.
1. К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, «Вычисл. матем.», Сб. 1 (1957), 34—61.
  2. Метод сеток для внешней задачи Дирихле, *ЖВМ и МФ* **6**, № 3 (1966), 503—511.
  3. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и некоторых треугольниках, *Тр. МИАН СССР* **74** (1966), 55—85.
- Вулих Б. З.
1. Введение в функциональный анализ, «Наука», 1967.
- Галанин А. Д.
1. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах, Атомиздат, М., 1957.
- Ган (Gunn J. E.)
1. The numerical solution of  $\nabla a \nabla u = f$  by a semi-explicit alternating direction iterative technique, *Numer. Math.* **6**, N 3 (1964), 181—184.
  2. The solution of elliptic difference equations by semi-explicit iterative techniques, *J. Soc. Industr. Appl. Math. Ser. B., Numer. Anal.* **1**, N 2 (1965), 24—45.
- Гантмахер Ф. Р.
1. Теория матриц, «Наука», 1967.
- Гельфанд И. М.
1. Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966.
- Гельфонд А. О.
1. Исчисление конечных разностей, «Наука», 1967.
- Гершгорин С. А.
1. О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона, *Изв. Ленингр. политехн. ин-та, отд. техн., ест., матем.*, **30** (1927), 75—95.
- Годунов С. К.
1. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Матем. сб.* **47** (89), № 3 (1959), 271—306.
  2. Разностные методы решения уравнений газовой динамики, изд-во НГУ, Новосибирск, 1962.
- Годунов С. К., Забродин А. В.
1. О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач, *ЖВМ и МФ* **2**, № 4 (1962), 706—708.

- Годунов С. К., Прокопов Г. П.  
 1. О решении разностного уравнения Лапласа, ЖВМ и МФ 9, № 2 (1969), 462—468.
- Годунов С. К., Рябенский В. С.  
 1. Введение в теорию разностных схем, Физматгиз, 1962.  
 2. Канонические виды систем линейных обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, ЖВМ и МФ 3, № 2 (1963), 211—222.  
 3. Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений, УМН 18, вып. 3 (111) (1963), 3—14.
- Гольдин В. Я., Данилова Г. В., Калиткин Н. Н.  
 1. Численное интегрирование многомерного уравнения переноса, Сб. «Численные методы решения задач матем. физики», «Наука», 1966, Дополнение к ЖВМ и МФ 4, № 6 (1966), 190—193.
- Гончаров В. Л.  
 1. Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
- Гриншпан (Greenspan D.)  
 1. Lectures on the numerical solution of linear, singular and nonlinear differential equations, New York, 1968.
- Гулин А. В.  
 1. Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойных разностных схем, ЖВМ и МФ 8, № 4 (1968), 899—902.
- Гулин А. В., Самарский А. А.  
 1. Об устойчивости разностных схем в комплексном гильбертовом пространстве, ДАН СССР 181, № 5 (1968), 1042—1045.
- Гусман Ю. А., Оганесян Л. А.  
 1. Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений, ЖВМ и МФ 5, № 2 (1965), 351—357.
- Дегтярев Л. М., Фаворский А. П.  
 1. Поточковый вариант метода прогонки, ЖВМ и МФ 8, № 3 (1968), 679—684.  
 2. Поточковый вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами, ЖВМ и МФ 9, № 1 (1969), 211—218.
- Демьянович Ю. К.  
 1. Метод сеток для некоторых задач математической физики, ДАН СССР 159, № 2 (1964), 250—253.  
 2. Устойчивость метода сеток для эллиптических задач, ДАН СССР 164, № 1 (1965), 20—23.
- Джон (John F.)  
 1. On the integration of parabolic equations by difference methods. I, Linear and quasi-linear equations for the infinite interval, Comm. Pure. Appl. Math. 5, N 2 (1952), 155—211.
- Дуглас (Douglas J.)  
 1. On the numerical integration of  $u_{xx} + u_{yy} = u_t$  by implicit methods, J. Soc. Industr. Appl. Math. 3, N 1 (1955), 42—65.  
 2. The solution of the diffusion equation by a high order correct difference equation. J. Math. and Phys. 35, N 2 (1956), 145—151.  
 3. The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 89, N 2 (1958), 484—518.  
 4. Alternating direction methods for three space variables, Numerische Math. 4, N 1 (1962), 41—63.
- Дуглас, Ган (Douglas J., Gunn J. E.)  
 1. Two high-order correct difference analogues for the equation of multi-dimensional heat flow, Math. of Comput. 17, N 81 (1963), 71—80.  
 2. A general formulation of alternating direction methods, Part I, Parabolic and hyperbolic problems, Numerische Math. 6, N 5 (1964), 428—453.

Дуглас, Джонс (Douglas J., Jones B. F.)

1. On predictor-corrector methods for nonlinear parabolic differential equations, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **11**, N 1 (1963), 195—204.

Дуглас, Пирси (Douglas J., Pearcy C. M.)

1. On convergence of alternating direction procedures in the presence of singular operators, *Numerische Math.* **5**, N 2 (1963), 175—184.

Дуглас, Рэкфорд (Douglas J., Rachford H.)

1. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82**, N 2 (1956), 421—439.

Дюфорт, Франкел (Du Fort E. C., Frankel S. P.)

1. Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations, *Math. Tables and Other Aids Comput.* **7**, N 43 (1953), 135—152.

Дьяконов Е. Г.

1. Метод переменных направлений решения систем конечноразностных уравнений, *ДАН СССР* **138**, № 2 (1961), 271—274.
2. Об одном итерационном способе решения систем конечноразностных уравнений, *ДАН СССР* **138**, № 3 (1961), 522—525.
3. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач, *ЖВМ и МФ* **2**, № 4 (1962), 549—568.
4. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, *ЖВМ и МФ* **4**, № 2 (1964), 278—291.
5. Разностные схемы второго порядка точности с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами, *Сб. «Вычисл. методы и программирование», изд-во МГУ*, **3** (1965), 163—190.
6. О некоторых итерационных методах решения систем разностных уравнений, возникающих при решении методом сеток уравнений в частных производных эллиптического типа, *Сб. «Вычисл. методы и программирование», изд-во МГУ*, **3** (1965), 191—222.
7. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру, *ЖВМ и МФ* **6**, № 1 (1966), 12—34.
8. Экономичные разностные методы, основанные на расщеплении разностного оператора, для некоторых систем уравнений в частных производных, *Сб. «Вычислительные методы и программирование», изд-во МГУ* **6** (1967), 76—120.

Ильин А. М.

1. Устойчивость разностных схем задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных, *ДАН СССР* **164**, № 3 (1965), 491—494.

Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.

1. Линейные уравнения второго порядка параболического типа, *УМН* **17**, вып. 3 (105) (1962), 3—146.

Камынин Л. И.

1. Об устойчивости разностных параболических уравнений, *ДАН СССР* **136**, № 6 (1961), 1287—1290.

Канторович Л. В.

1. О методе наискорейшего спуска, *ДАН СССР* **56**, № 3 (1947), 233—236.
2. Функциональный анализ и прикладная математика, *УМН* **3**, вып. 6 (28) (1948), 89—185.

Канторович Л. В., Акилов Г. П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, *Физматгиз*, 1959.

Канторович Л. В., Крылов В. И.

1. Приближенные методы высшего анализа, *Физматгиз*, 1962.

Каго (Kato T.)

1. Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition. *Numerische Math.* 2, N 1 (1960), 22—29.

Келлер, Томэ (Keller H. B., Thomée V.)

1. Unconditionally stable difference methods for mixed problems for quasi-linear hyperbolic systems in two dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* 15, N 1 (1962), 63—73.

Коллатц (Collatz L.)

1. Zur stabilität des Differenzenverfahrens bei der Stabschwingungsgleichung, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 31, N 11—12 (1951), 392—393.

2. Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

Коновалов А. Н.

1. Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний, *ДАН СССР* 147, № 1 (1962), 25—27.

2. Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости, *ЖВМ и МФ* 4, № 4 (1964), 760—764.

3. Об одной итерационной схеме решения статических задач теории упругости, *ЖВМ и МФ* 4, № 5 (1964), 942—945.

4. Разностные методы расчета плоских задач теории упругости. Тр. МИАН СССР 74 (1966), 38—54.

5. О численном решении смешанной задачи теории упругости, *ЖВМ и МФ* 9, № 2 (1969), 469—474.

Коновальцев И. В.

1. Об устойчивости двухслойных разностных схем, *ЖВМ и МФ* 8, № 2 (1968), 322—333.

2. Устойчивость в  $C$  и  $L_p$  двухслойных разностных схем для параболических уравнений с переменными коэффициентами, *ЖВМ и МФ* 8, № 4 (1968), 894—899.

Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я.

1. *Приближенное решение операторных уравнений*, «Наука», 1969.

Красносельский М. А., Крейн С. Г.

1. Итерационный процесс с минимальными невязками, *Матем. сб.*, нов. серия 31 (73), вып. 2 (1952), 315—334.

Крейн С. Г.

1. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967.

Крейс (Greiss H. O.)

1. Über die Lösung des Cauchyproblems für lineare partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzgleichungen, *Acta Mathematica* 101, N 3—4 (1959), 179—199.

2. Über die Stabilitätsdefinition für Differenzgleichungen die partielle Differentialgleichungen approximieren, *BIT*, 2 (1962), 153—181.

3. Об аппроксимации линейных уравнений с частными производными разностными уравнениями, *Математика, сб. переводов* 7, № 2 (1963), 57—66.

4. Über implizite Differenzmethoden für partielle Differentialgleichungen, *Numerische Math.* 5, N 1 (1963), 24—47.

5. On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 17, N 3 (1964), 335—353.

Кряквина С. А.

1. О точности схем переменных направлений для уравнения теплопроводности, *ЖВМ и МФ* 6, № 3 (1966), 582—589.

Курант (Courant R.)

1. Über Anwendung der Variationrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen, *Acta Mathem.* 49, N 1 (1926), 1—68.



Курант Р., Гильберт Д.

1. Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1953.

Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.

1. О разностных уравнениях математической физики, УМН, вып. 8 (1940), 125—160.

Ладыженская О. А.

1. Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей, Ученые записки ЛГУ, сер. матем., 23, № 133 (1952), 192—246.

2. Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.

3. Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, УМН 12, вып. 5 (77) (1957), 123—148.

Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.

1. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964.

Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.

1. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967.

Лакс П. Д.

1. Об устойчивости конечно-разностных аппроксимаций решений гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, Математика, сб. переводов 6, № 3 (1962), 67—88.

Лакс, Вендроф (Lax P. D., Wendroff V.)

1. Systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 13, N 2 (1960), 217—237.

2. On the stability of difference schemes, Comm. Pure Appl. Math. 15, N 4 (1962), 363—371.

3. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy, Comm. Pure Appl. Math. 17, N 3 (1964), 381—398.

Лакс П. Д., Ниренберг Л.

1. Об устойчивости разностных схем; точная форма неравенства Гординга, Математика, сб. переводов 11, № 6 (1967), 3—20.

Лакс, Рихтмайер (Lax P. D., Richtmyer R. D.)

1. Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math. 9, N 2 (1956), 267—293.

Лебедев В. И.

1. О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных, Изв. АН СССР, сер. матем. 22, № 5 (1958), 717—734.

2. О задаче Дирихле и Неймана на треугольных и шестиугольных сетках, ДАН СССР 138, № 1 (1961), 33—36.

3. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики, ЖВМ и МФ 4, № 3 (1964), 449—465, и 4, № 4 (1964), 649—659.

Лебедев В. И., Финогенов С. А.

1. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе, ЖВМ и МФ 11, № 2 (1971), 425—438.

Лиз (Lees M.)

1. A priori estimates for the solution of difference approximations to parabolic partial differential equations, Duke Math. J. 27, N 3 (1960), 297—311.

2. Energy inequalities for the solution of differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 94, N 1 (1960), 58—73.

3. Alternating direction and semi-explicit difference methods for parabolic partial differential equations, Num. Math. 3, N 5 (1961), 398—412.

4. Alternating direction methods for hyperbolic differential equations, J. Soc. Industr. Appl. Math. 10, N 4 (1962), 610—616.

Люстерник Л. А.

1. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа, УМН 9, вып. 2 (60) (1954), 3—66.

Люстерник Л. А., Соболев В. И.

1. Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.

Марчук Г. И.

1. Численные методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1958 (см. также изд. 2-е, М., 1961).
2. Численные методы в прогнозе погоды, Гидрометеорологическое изд-во, Ленинград, 1967.

Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А.

1. К вопросу об оптимальных итерационных процессах, ДАН СССР 181, № 6 (1968), 1331—1334.

Марчук Г. И., Яненко Н. Н.

1. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики, Сб. «Некоторые вопросы вычисл. и прикладной математики», Новосибирск, 1966, 5—22.

Мейман Н. Н.

1. К теории уравнений в частных производных. ДАН СССР 97, № 4 (1954), 593—596.

Микеладзе Ш. Е.

1. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов, Изв. АН СССР, сер. матем. 5, № 1 (1941), 57—74.
2. Численное решение уравнения теплопроводности, Тр. Тбилисского матем. ин-та, 27 (1960), 367—410.

Миллер, Стрэнг (Miller J., Strang G.)

1. Matrix theorems for partial differential and difference equations, Math. Scandinavica 18, N 2 (1966), 113—133.

Михлин С. Г.

1. Численная реализация вариационных методов, «Наука», 1966.
2. Курс математической физики, «Наука», 1968.

Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.

1. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, «Наука», 1965.

Мортон, Шехтер (Morton K. W., Schechter S.)

1. On the stability of finite difference matrices, J. Soc. Industr. Appl. Math., ser. B., Numer. Anal. 2, N 1 (1965), 119—128.

Нейман, Рихтмайер (Neumann J., Richtmyer R. D.)

1. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, J. of Appl. Physics 21, N 3 (1950), 232—243.

Ницше, Ницше (Nitsche J., Nitsche J. C. C.)

1. Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations, Arch. Rat. Mech. and Anal. 5, N 4 (1960), 293—306.
2. Fehlerabschätzung für die numerische Berechnung von Integralen, die Lösungen elliptischer Differentialgleichungen enthalten, Arch. Rat. Mech. and Anal. 5, N 4 (1960), 307—314.

Олифант (Oliphant T. A.)

1. An implicit, numerical method for solving two-dimensional time-dependent diffusion problems, Quart. of Appl. Math., 19, № 3 (1961), 221—229.

Петровский И. Г.

1. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, 1961.

Писмен, Рэкфорд (Peaceman D. W., Rachford H. H.)

1. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Industr. Appl. Math. 3, N 1 (1955), 28—42.

Приказчиков В. Г.

1. Разностная задача на собственные значения для эллиптического оператора, ЖВМ и МФ 5, № 4 (1965), 648—657.
2. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма — Лиувилля, ЖВМ и МФ 9, № 2 (1969), 315—336.

Равьярт (Raviart P. A.)

1. Sur l'approximation de certaines équation d'évolution linéaires et non linéaires, *J. de mathem. pures et appliq.* **46**, N 1 (1967), 11—107.

Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.

1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

Рихтмайер Р. Д.

1. Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, 1960.

Рихтмайер, Мортон (Richtmyer R. D., Morton K. W.)

1. Difference methods for initial-value problems, Second edition, New York, London, Sydney, 1967.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.

1. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, «Наука», 1968.

Русанов В. В.

1. Об устойчивости метода матричной прогонки, *Вычислит. математика*, сб. 6 (1960), 74—83.

Рябенский В. С.

1. О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши, *ДАН СССР* **86**, № 6 (1952), 1071—1074.
2. Структура спектров семейств несамосопряженных разностных операторов (Материалы к Совм. сов.-амер. симпозиуму по уравнениям с части. произв.), Новосибирск, 1963.
3. Спектр семейства разностных операторов над функциями на сеточном графе, *ЖВМ и МФ* **7**, № 6 (1967), 1392—1398.

Рябенский В. С., Филиппов А. Ф.

1. Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956.

Самарский А. А.

1. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа, *ЖВМ и МФ* **1**, № 3 (1961), 441—460.
2. Априорные оценки для разностных уравнений, *ЖВМ и МФ* **1**, № 6 (1961), 972—1000.
3. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа, *ЖВМ и МФ* **2**, № 1 (1962), 25—56.
4. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, *ЖВМ и МФ* **2**, № 5 (1962), 787—811.
5. О сходимости метода дробных шагов для уравнения теплопроводности, *ЖВМ и МФ* **2**, № 6 (1962), 1117—1121.
6. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа, *ЖВМ и МФ* **3**, № 2 (1963), 266—298.
7. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках, *ЖВМ и МФ* **3**, № 3 (1963), 431—466.
8. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности, *ЖВМ и МФ* **3**, № 5 (1963), 812—840.
9. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, *ЖВМ и МФ* **4**, № 3 (1964), 580—585.
10. Локально-одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области, *ЖВМ и МФ* **4**, № 4 (1964), 638—648.
11. Экономичные разностные схемы для уравнений параболического типа со смешанными производными, *ЖВМ и МФ* **4**, № 4 (1964), 753—759.
12. Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости, *ЖВМ и МФ* **5**, № 1 (1965), 34—43.

13. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора, ЖВМ и МФ 5, № 3 (1965), 548—551.
14. К теории разностных схем, ДАН СССР 165, № 5 (1965), 1007—1010.
15. О принципе аддитивности для построения экономических разностных схем, ДАН СССР 165, № 6 (1965), 1253—1256.
16. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики, Aplikace Matematiky 10, № 2 (1965), 146—164.
17. О точности метода сеток для задачи Дирихле в произвольной области, Aplikace Matematiky 10, № 3 (1965), 293—296.
18. Некоторые вопросы теории разностных схем, ЖВМ и МФ 6, № 4 (1966), 665—686.
19. Аддитивные схемы. Доклад на Международном съезде математиков в Москве (1966), Тезисы докладов, секция 14, вычисл. математика, стр. 46—47.
20. О регуляризации разностных схем, ЖВМ и МФ 7, № 1 (1967), 62—93.
21. Классы устойчивых схем, ЖВМ и МФ 7, № 5 (1967), 1096—1133.
22. О выборе итерационных параметров в методе переменных направлений для разностной задачи Дирихле повышенного порядка точности, ДАН СССР 179, № 3 (1968), 548—551.
23. Необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойных разностных схем, ДАН СССР 181, № 4 (1968), 808—811.
24. Двухслойные итерационные схемы, ДАН СССР 185, № 3 (1969), 524—527.
25. Итерационные двухслойные схемы для несамосопряженных уравнений, ДАН СССР 186, № 1 (1969), 35—38.
26. Лекции по теории разностных схем, Вычислительный центр АН СССР, М., 1969.
27. Некоторые вопросы общей теории разностных схем, Сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными», Труды симпозиума, посвященного 60-летию академика Сергея Львовича Соболева, «Наука», 1970, 191—223.
28. Об устойчивости трехслойных разностных схем, ДАН СССР 192, № 5 (1970), 998—1001.

Самарский А. А., Андреев В. Б.

1. Итерационные схемы переменных направлений для численного решения задачи Дирихле, ЖВМ и МФ 4, № 6 (1964), 1025—1036.

Самарский А. А., Гулин А. В.

1. Об устойчивости разностных схем по правым частям, ДАН СССР 192, № 2 (1970), 285—288.

Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.

1. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана, ЖВМ и МФ 5, № 5 (1965), 816—827.

Самарский А. А., Соболев И. М.

1. Примеры численного расчета температурных волн, ЖВМ и МФ 3, № 4 (1963), 702—719.

Самарский А. А., Фрязинов И. В.

1. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. ЖВМ и МФ 1, № 5 (1961), 806—824.
2. О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами, ЖВМ и МФ 11, № 2 (1971), 385—410.

Самокиш Б. А.

1. Исследование быстроты сходимости метода наискорейшего спуска, УМН 12, вып. 1 (73) (1957), 238—240.

Саульев В. К.

1. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, 1960.

Сеге Г.

1. Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.

Сердюкова С. И.

1. Исследование устойчивости в  $S$  явных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами, устойчивых в  $l_2$ , ЖВМ и МФ 3, № 2 (1963), 365—370.
2. Равномерная устойчивость шеститочечной схемы повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности, ЖВМ и МФ 7, № 1 (1967), 214—218.
3. Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений, ЖВМ и МФ 7, № 3 (1967), 497—509.

Соболев С. Л.

1. Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
2. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

Стрэнг (Strang G.)

1. Accurate partial difference methods, I, Linear Cauchy problems, Arch. Rational Mech. Anal. 12, N 5 (1963), 392—402.
2. Implicit difference methods for initial-boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 16, N 1 (1966), 188—198.

Ти (Тее G. J.)

1. A new technique for solving elliptic partial differential equations, J. Soc. Ind. Appl. Math. 12, N 2 (1964), 311—347.

Тихонов А. Н., Самарский А. А.

1. Об однородных разностных схемах, ЖВМ и МФ 1, № 1 (1961), 5—63.
2. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках, ЖВМ и МФ 1, № 3 (1961), 425—440.
3. Разностная задача Штурма — Лиувилля, ЖВМ и МФ 1, № 5 (1961), 784—805.
4. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках, ЖВМ и МФ 2, № 5 (1962), 812—832.
5. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности на неравномерных сетках, ЖВМ и МФ 3, № 1 (1963), 99—108.
6. Уравнения математической физики, «Наука», 1966.

Томэ (Thomé V.)

1. A stable difference scheme for the mixed boundary problem for a hyperbolic first order system in two dimensions, J. Soc. Industr. Appl. Math. 10, N 2 (1962), 229—245.
2. Elliptic difference operators and Dirichlet's problem, Contr. to dif. equations, 3 (1964), 301—324.
3. Parabolic difference operators, Math. Scand. 19, N 1 (1966), 77—107.
4. On maximum norm stable difference operators, «Numerical solution of partial differential equations», Proc. Internat. Symposium, 1965, New York, 1966, 125—151.
5. Generally unconditionally stable difference operators, SIAM J. Numer. Anal. 4, N 1 (1967), 55—69.

Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.

1. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963.

Федоренко Р. П.

1. О скорости сходимости одного итерационного процесса, ЖВМ и МФ 4, № 3 (1964), 559—564.

Федорюк М. В.

1. Об устойчивости в  $S$  задачи Коши для разностных уравнений и уравнений с частными производными, ЖВМ и МФ 7, № 3 (1967), 510—540.

Филиппов А. Ф.

1. Об устойчивости разностных уравнений, ДАН СССР 100, № 6 (1955), 1045—1048.

Франк Л. С.

1. Разностные схемы высокого порядка точности для систем дифференциальных уравнений первого порядка, Вестник МГУ, сер. матем., мех., 1966, вып. 2, 26—33.
2. Разностные операторы в свертках, ДАН СССР 181, № 2 (1968), 286—289.
3. О гиперболических разностных операторах, ДАН СССР 189, № 3 (1969), 486—488.

Франкел (Frankel S. P.)

1. Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations, Math. Tables and Other Aids Comput. 4, N 30 (1950), 65—75.

Фрязинов И. В.

1. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, ЖВМ и МФ 1, № 6 (1961), 1122—1127.
2. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи, ЖВМ и МФ 4, № 6 (1964), 1106—1112.
3. О решении третьей краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в произвольной области локально-одномерным методом, ЖВМ и МФ 6, № 3 (1966), 487—502.
4. Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа, ЖВМ и МФ 8, № 2 (1968), 436—443.
5. Априорные оценки для одного семейства экономичных схем, ЖВМ и МФ 9, № 3 (1969), 595—604.
6. Экономичные схемы повышенного порядка точности для решения многомерного уравнения параболического типа, ЖВМ и МФ 9, № 6 (1969), 1316—1326.

Хаббард (Hubbard B. E.)

1. Alternating direction schemes for the heat equation in a general domain, J. Soc. Ind. Appl. Math., ser. B, Numer. Anal. 2, N 3 (1965), 448—463.
2. Some locally one-dimensional difference schemes for parabolic equations in an arbitrary region, Math. Comput. 20, N 93 (1966), 53—59.

Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.

1. Неравенства, ИЛ, 1918.

Шаманский В. Е.

1. О решении краевых задач итерационными методами, ЖВМ и МФ 7, № 3 (1967), 541—550.
2. О методе линеаризации для решения нелинейных краевых задач, Укр. матем. ж. 20, № 2 (1968), 218—227.

Якут Л. И.

1. К вопросу обоснования сходимости разностных схем, ДАН СССР 151, № 1 (1963), 76—79.

Яненко Н. Н.

1. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, ДАН СССР 125, № 6 (1959), 1207—1210.
2. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов), ДАН СССР 134, № 5 (1960), 1034—1036.
3. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности, Изв. высш. учебн. заведений, сер. матем., № 4 (23) (1961), 148—157.
4. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, ЖВМ и МФ 2, № 5 (1962), 933—937.
5. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений, Сиб. матем. ж. 5, № 6 (1964), 1431—1434.

6. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1967.
  7. Введение в разностные методы математической физики (лекции для студентов НГУ), ч. I—II, Новосибирск, 1968.
- Яненко Н. Н., Бояринцев Ю. Е.
1. О сходимости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, ДАН СССР 139, № 6 (1961), 1322—1324.
- Яненко Н. Н., Демидов Г. В.
1. Метод слабой аппроксимации как конструктивный метод построения решения задачи Коши, Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.», Новосибирск, 1966, 60—83.
- Яненко Н. Н., Сучков В. А., Погодин Ю. Я.
1. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах, ДАН СССР 128, № 5 (1959), 903—905.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аппроксимация оператора** 278  
— разностная 18  
— суммарная 397
- Интегро-интерполяционный метод** 111  
Исходное семейство разностных схем 303, 320
- Итерационная схема** 449  
— — двухслойная 452  
— — продольно-поперечная 457  
— — Ричардсона 479  
— — стационарная 490  
— — трехслойная 517  
— — факторизованная 497, 526
- Итерационный метод двухступенчатый** 513, 527  
— — двухшаговый 451  
— — для квазилинейных уравнений 216  
— — одношаговый 451
- Каноническая форма двухслойной разностной схемы** 294  
— — трехслойной разностной схемы 295
- Корректность разностной задачи** 41, 275, 296
- Коши — Буняковского неравенство** 48  
— — — обобщенное 66
- Краевая задача первая** 226, 230, 235  
— — с условиями периодичности 163, 212  
— — третья 34, 35, 87, 148, 211, 239, 287
- Липшица условие** 195, 320
- Метод баланса** 111  
— выделения стационарных неоднородностей 199  
— итерационный одношаговый, двухшаговый 451  
— минимальных поправок 503  
— наискорейшего спуска 509
- Метод переменных направлений** 350  
— — — итерационный 457, 492  
— приближенной факторизации 370  
— прогонки 42  
— — матричной 532  
— — потоковой 529  
— — циклической 535  
— простой итерации 454  
— разделения переменных 76, 309  
— расщепления 374  
— расщепляющегося оператора 370  
— суммарной аппроксимации 397  
— установления 450  
— энергетических неравенств 56, 83, 101
- Норма негативная** 26, 66  
— оператора 63  
— сеточная 16
- Окрестность узла сетки** 239
- Оператор Лапласа разностный** 227, 252  
— линейный 63  
— обратный 63  
— перехода 295  
— положительный 64  
— постоянный 302  
— разрешающий 298  
— солряженный 65  
— треугольный 347  
— факторизованный 367
- Операторы энергетически эквивалентные** 263
- Оценка априорная** 42
- Параметры итерационные** 452, 461, 519  
— — «по Жордану» 462  
— — циклические 463
- Погрешность аппроксимации** 19, 277  
— — на решении дифференциальной задачи 29  
— — оператора 25



- Принцип максимума 60, 239  
 — суперпозиции 98, 336  
 Пространство сеточных функций 16  
 — энергетическое 66
- Разностная производная** 18, 19  
 — схема 29, 275  
 — — аддитивная 395  
 — — двухслойная 72  
 — — Дюфорта — Франкела 89, 337  
 — — консервативная 110, 111  
 — — локально-одномерная 407, 413  
 — — монотонная 146, 206  
 — — наилучшая 119, 131  
 — — неявная 31, 73  
 — — однородная 103, 105, 106, 201, 219  
 — — Писмена — Рекфорда 360  
 — — повышенного порядка точности 71, 249  
 — — предиктор-корректор 217  
 — — Ричардсона 89  
 — — Саульева 323  
 — — с весами 71, 220  
 — — с расщепляющимся оператором 368  
 — — сквозного счета 218  
 — — составная 395  
 — — точная 140  
 — — трехслойная 37  
 — — усеченная 144  
 — — факторизованная 368  
 — — шеститочечная симметричная 73, 188  
 — — экономичная 358  
 — — явная 31, 72, 188
- Регуляризатор 345  
 Регуляризация разностных схем 345
- Сетка** 14  
 — квадратная 231  
 — неравномерная 15, 24
- Сетка прямоугольная 231  
 — равномерная 14  
 — связная 234, 239  
 Скорость сходимости 33, 277  
 Слой 72  
 Стефана задача 218  
 Схема разностная см. Разностная схема  
 Сходимость итераций 455  
 — разностной схемы 33, 277
- Теорема вложения разностная** 53, 257  
 Точность разностной схемы 277
- Узел сетки** 14, 230, 232  
 — — внутренний 15, 230, 232, 233  
 — — граничный 15, 230, 232  
 — — нерегулярный 233  
 — — приграничный 233
- Устойчивость абсолютная** 79  
 — абстрактной задачи Коши 293  
 — безусловная 79  
 — двухслойной разностной схемы 296, 305, 309  
 — коэффициентная 149, 289  
 — по начальным данным 76, 298  
 — разностной схемы 33, 41, 275  
 — трехслойной разностной схемы 325  
 — условная 79
- Формула Грина разностная** 47, 255  
 — разностного дифференцирования 45  
 — суммирования по частям 46  
**Функционал шаблонный** 105, 116  
**Функция Грина разностная** 119, 120  
 — сеточная 14
- Шаблон** 18  
 — нерегулярный 24  
 — пятиточечный нерегулярный 228  
 — регулярный 227  
**Шаг сетки** 14